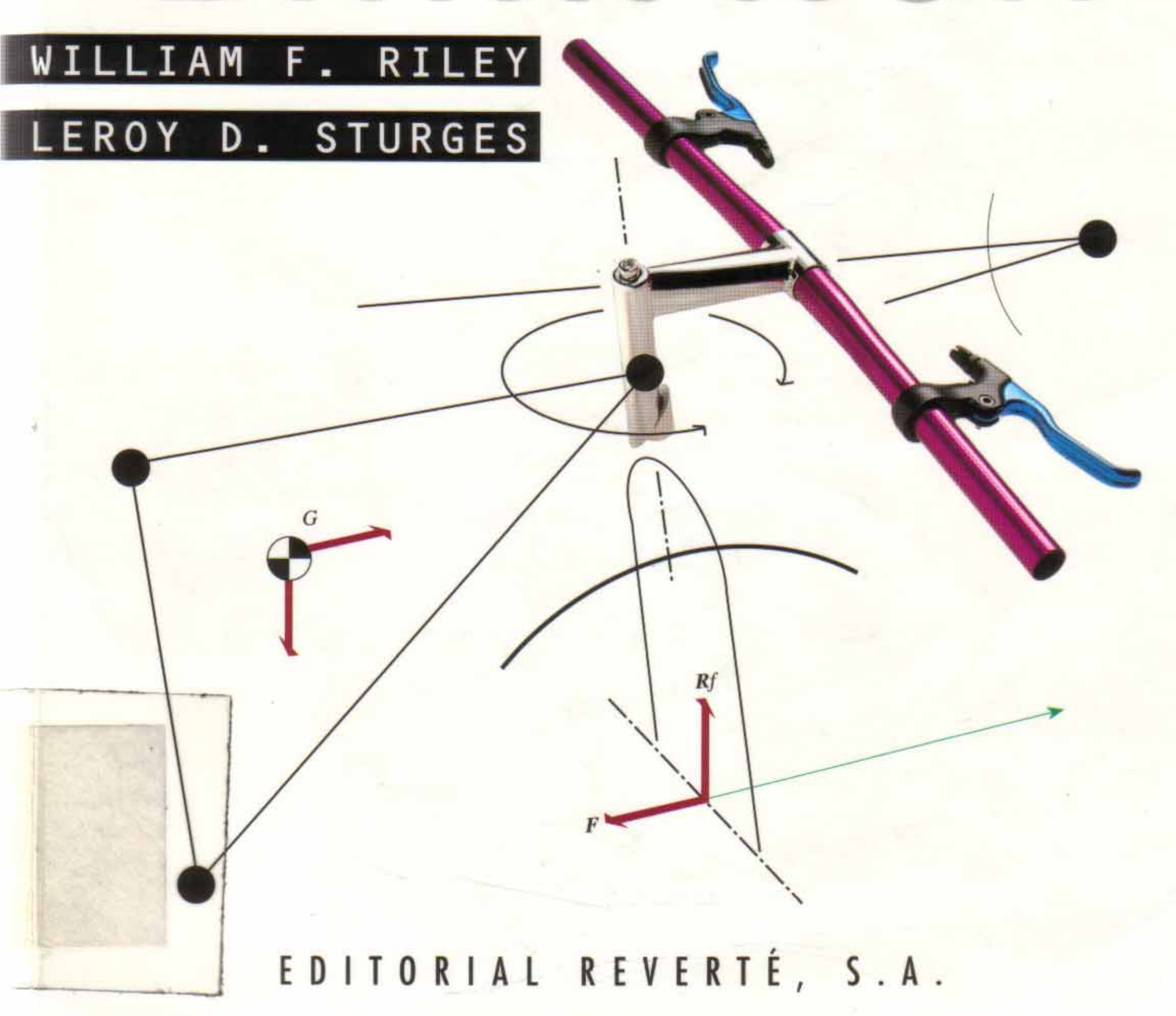
INGENIERÍA MECÁNICA

DINÁMICA

WILLIAM F. RILEY
LEROY D. STURGES



EDITORIAL REVERTÉ, S.A.

Tabla 1.6 FACTORES DE CONVERSIÓN ENTRE UNIDADES SI Y DEL U.S. CUSTOMARY SYSTEM

Magnitud	U.S.C.S a SI	SI a U.S.C.S.
Longitud	1 in. = 25,40 mm	1 m = 39,37 in.
	1 ft = 0,3048 m	1 m = 3,281 ft
	1 mi = 1,609 km	1 km = 0,6214 mi
Superficie	1 in.^{2} = 645,2 mm^2	1 m^2 = 1550 in.^{2}
	1 ft^2 = 0,0929 m^2	1 m^2 = 10,76 ft^2
Volumen	1 in.^{3} = 16,39(10^3) mm^3	1 mm^3 = 61,02(10^{-6}) in.^{3}
	1 ft^3 = 0,02832 m^3	1 m^3 = 35,31 ft^3
	1 gal = 3,785 L[a]	1 L = 0,2646 gal
Velocidad	1 in./s = 0,0254 m/s	1 m/s = 39,37 in./s
	1 ft/s = 0,3048 m/s	1 m/s = 3,281 ft/s
	1 mi/h = 1,609 km/h	1 km/h = 0,6214 mi/h
Aceleración	1 in./s^2 = 0,0254 m/s^2	1 m/s^2 = 39,37 in./s^2
	1 ft/s^2 = 0,3048 m/s^2	1 m/s^2 = 3,281 ft/s^2
Masa	1 slug = 14,59 kg	1 kg = 0,06854 slug
Momento segundo de superficie	1 in.^{4} = 0,4162(10^6) mm^4	1 mm^4 = 2,402(10^{-6}) in.^{4}
Fuerza	1 lb = 4,448 N	1 N = 0,2248 lb
Carga distribuida	1 lb/ft = 14,59 N/m	1 kN/m = 68,54 lb/ft
Presión o esfuerzo	1 psi = 6,895 kPa	1 kPa = 0,1450 psi
	1 ksi = 6,895 MPa	1 MPa = 145,0 psi
Momento (flector, de una fuerza o un par)	1 ft · lb = 1,356 N · m	1 N · m = 0,7376 ft · lb
Trabajo o energía	1 ft · lb = 1,356 J	1 J = 0,7376 ft · lb
Potencia	1 ft · lb/s = 1,356 W	1 W = 0,7376 ft · lb/s
	1 hp = 745,7 W	1 kW = 1,341 hp

[a]Para el litro de usan los símbolos L y l. Como "l" puede confundirse con el número "1", el National Institute of Standards and Technology recomienda para los Estados Unidos el símbolo "L" (v. NIST special publication 811, sept.1991).

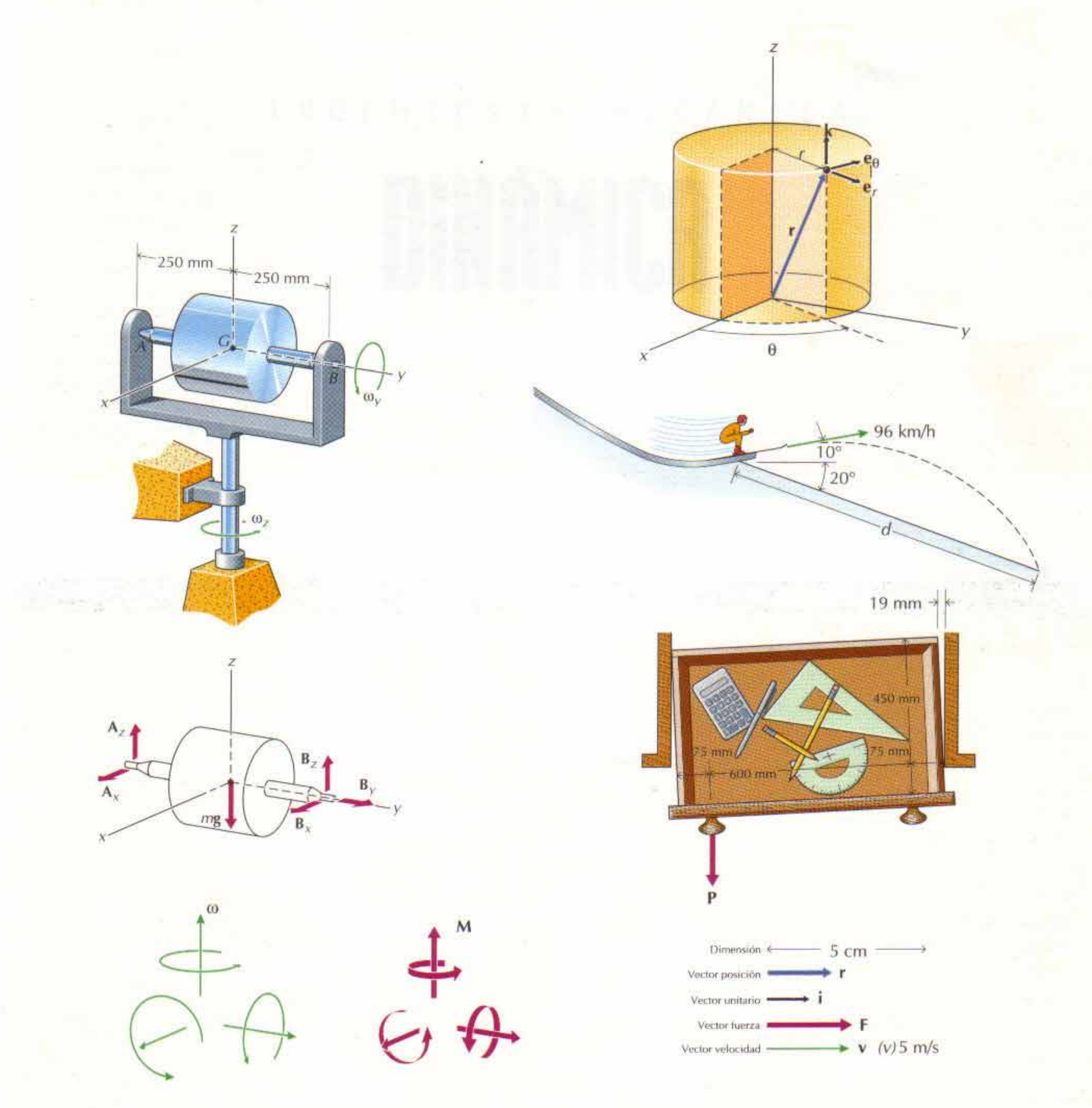
Tabla B.8 DATOS ASTRONÓMICOS

Constante de Gravitación Universal		
$G = 6{,}673\ (10^{-11})\ m^3/(kg \cdot s^2) = 3{,}439\ (10^{-8})\ ft^4/(lb \cdot s^4)$		
Sol		
Masa	1,990(10^{30})kg	1,364(10^{29}) lb · s^2/ft
Radio medio	696 000 km	432 000 mi
Tierra		
Masa	5,976(10^{24}) kg	4,095(10^{23}) lb · s^2/ft
Radio medio	6370 km	3960 mi
Periodo de rotación	23,93 h	
Luna		
Masa	7,350(10^{22})kg	5,037(10^{21}) lb · s^2/ft
Radio medio	1740 km	1080 mi
Distancia media a la Tierra (entre centros)	384 000 km	239 000 mi
Excentricidad (e)	0,055	
Sistema Solar		

Planeta	Distancia media al Sol U.A.[a]	e	Diámetro medio (relativo a la Tierra)	Masa (relativa a la Tierra)
Mercurio	0,387	0,206	0,380	0,05
Venus	0,723	0,007	0,975	0,81
La Tierra	1,000	0,017	1,000	1,00
Marte	1,524	0,093	0,532	0,11
Júpiter	5,203	0,048	11,27	317,8
Saturno	9,539	0,056	9,49	95,2

[a] La Unidad Astronómica (U.A.) es igual a la distancia media de la Tierra al Sol = 149,6 (10^6) km = 92,96(10^6) mi.

La utilización de cuatro colores (cuatricromías) en las ilustraciones hace que éstas sean más coloridas y agradables a la vista, pero además hace que la información contenida en ellas sea más fácil de entender. Por ejemplo, las fuerzas y los momentos pueden distinguirse fácilmente del resto de la información del dibujo porque siempre se indican con una flecha roja grande. Análogamente, los vectores de posición siempre se indican con una flecha azul de tamaño medio; los vectores velocidad y aceleración, mediante una flecha verde normal; y los vectores unitarios con una flecha negra pequeña. Los ejes de coordenadas y las acotaciones de las dimensiones (lineales y angulares) se dibujan con líneas negras finas. Esto permite que aún queden muchos colores para describir las diferentes partes de los objetos.





PRÓLOGO

Nuestro propósito al escribir este texto de Dinámica, junto a su compañero de Estática, ha sido presentar una visión nueva del tema y proporcionar un orden de presentación más lógico de la materia. Creemos que nuestro orden de presentación dará a los estudiantes una mejor comprensión del tema y les preparará mejor para abordar cursos superiores y para su posterior vida profesional.

INTRODUCCIÓN

Este libro está dirigido a los programas que se desarrollan en los cursos de carreras técnicas. Se da a los estudiantes un tratamiento extenso, claro, práctico y comprensible de la teoría que normalmente se presenta en los cursos de introducción a la Mecánica. Se pone de manifiesto la aplicación de los principios de la Dinámica a la solución de problemas prácticos de ingeniería. Este texto puede utilizarse también como libro de referencia para los técnicos que se dedican a la ingeniería aeroespacial, de automoción, civil, mecánica, de minas y del petróleo.

En el texto se hace un amplio uso de los temas de Matemática y de Física de los cursos previos. Los estudiantes que inicien un curso de Dinámica que utilice este libro deben tener un conocimiento práctico de la introducción al Cálculo diferencial e integral y al Álgebra vectorial, y haber seguido o estar matriculados en un curso de Ecuaciones diferenciales.

Los métodos vectoriales no siempre simplifican la solución de los problemas bidimensionales de Dinámica. En cambio, en el caso de problemas tridimensionales, el Álgebra vectorial proporciona un método sistemático que frecuentemente elimina los errores que pudieran aparecer con un enfoque menos sistemático. En este libro, se utilizará el Álgebra vectorial siempre que dé la solución eficaz del problema. Cuando el Álgebra vectorial no ofrezca ventaja, se utilizará un método escalar. Se anima a los estudiantes a que desarrollen su capacidad de elección de las herramientas más adecuadas para la solución del problema que les ocupe.

ORGANIZACIÓN

Este texto se aparta de la organización tradicional de tratar primeramente todos los aspectos de la Dinámica del punto y después tratar los de la Dinámica del cuerpo rígido. A la descripción de la Cinemática del punto (cap. 13) sigue inmediatamente la descripción de la Cinemática del cuerpo rígido (cap. 14). En un curso que trate la Cinemática del punto y la del cuerpo rígido, creemos que es más lógico y eficaz tratar de golpe toda la Cinemática.

Análogamente, al método de Fuerza-Masa-Aceleración (segunda ley de Newton) para la resolución de problemas de Cinética del punto material (cap. 15) sigue inmediatamente el método de Fuerza- Masa-Aceleración para la resolución de problemas de Cinética del cuerpo rígido (cap. 16). Con este enfoque, el estudiante aprende primero un método para resolver problemas de Cinética y lo aplica consecuentemente a una amplia variedad de problemas. Estos cuatro capítulos constituyen una introducción completa, aun cuando breve, a la Dinámica del punto material y del cuerpo rígido.

Los cuatro capítulos siguientes presentan dos métodos alternativos para resolver ciertos tipos de problemas. Primeramente, se utliza el método trabajo-energía para la resolución de problemas de Cinética del punto material (cap. 17) y del cuerpo rígido (cap. 18). A continuación, se utiliza el método impulso-cantidad de movimiento para resolver problemas de Cinética del punto material (cap. 19) y del cuerpo rígido (cap. 20). Ninguno de estos métodos vale para resolver todo tipo de problemas. No obstante, cuando se puedan aplicar estos métodos particulares, suelen dar la solución de manera más sencilla que con el método Fuerza-Masa-Aceleración.

El último capítulo (cap. 21) presenta una introducción al estudio de las vibraciones mecánicas. En este capítulo, se utilizan los principios de la Cinética para tratar un tipo particular de problemas en los que interviene el movimiento vibratorio u oscilatorio. El capítulo se ha introducido para aquellos profesores que crean que un curso de introducción a la Mecánica queda incompleto si no se hace, al menos, mención a las vibraciones.

Como el estudio de la Cinética del punto material del capítulo 15 no depende del de la Cinemática del cuerpo rígido del capítulo 14 y, análogamente, el estudio del método trabajo- energía del punto material en el capítulo 17 no depende del del cuerpo rígido de los capítulos 14 ó 16, se puede impartir un curso de la manera tradicional, siguiendo los capítulos en el orden siguiente: 13, 15, 17, 19, 14, 16, 18, 20, 21.

CARACTERÍSTICAS

Énfasis en los aspectos técnicos

En todo el libro se hace resaltar el significado técnico del tema junto a los métodos matemáticos de análisis. Se han introducido muchos ejemplos ilustrativos en el cuerpo principal del texto, en lugares en los que la ilustración inmediata del método refuerce su presentación. Los estudiantes suelen interesarse más en un tema cuando pueden ver y apreciar su valor al avanzar en él.

Creemos que los estudiantes pueden progresar en un curso de Mecánica sólo a través de la comprensión de los principios físicos y matemáticos conjuntamente y no mediante la simple memorización de fórmulas y la subsiguiente sustitución de datos que les permitan obtener soluciones de problemas senci-

llos. Es más, creemos que es preferible enseñar unos pocos principios fundamentales para resolver problemas que enseñar un gran número de casos particulares y trucos. Por tanto, el texto pretende desarrollar en el estudiante su capacidad para analizar un problema dado de manera sencilla y lógica y aplicar unos pocos principios fundamentales, bien comprendidos, a su resolución.

Se ha realizado un concienzudo esfuerzo para presentar la materia de manera sencilla y directa, teniendo siempre presente el punto de vista del estudiante.

Tratamiento de la Cinemática antes que la Cinética

El proceso natural de aprendizaje comienza con situaciones sencillas y pasa luego a otras más complicadas. Este libro está estructurado de manera que cada principio se aplica primeramente a un punto, luego a un sistema de puntos, luego a un cuerpo rígido sometido a un sistema de fuerzas coplanarias y por último al caso general de un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas tridimensional.

La Cinemática (estudio del movimiento sin atender a las causas que lo originan) del punto y del cuerpo rígido se desarrolla con todo cuidado ya que el dominio de esta materia es esencial para el tratamiento de la Cinética (estudio de la relación entre el movimiento y las fuerzas que lo originan) del punto y del cuerpo rígido.

A continuación, se desarrollan para su utilización en una gran variedad de problemas los tres métodos comunes para la resolución de problemas de Cinética, cuales son, (1) fuerza, masa y aceleración; (2) trabajo y energía; (3) impulso y cantidad de movimiento. Estos métodos se desarrollan uno tras otro y se aplican primero a un punto, luego a un sistema de puntos, luego a cuerpos rígidos en movimiento plano y por último a casos tridimensionales cualesquiera. El dominio del método fuerza, masa y aceleración proporciona un medio para resolver todos los problemas de Dinámica. Los otros dos métodos sólo proporcionan un método más eficaz para la resolución de ciertos problemas.

Creemos que este enfoque da la organización lógica y conveniente de la materia objeto de un curso de introducción a la Dinámica. La Cinemática se trata por completo antes de estudiar la Cinética. Ésta se desarrolla totalmente, utilizando las leyes de Newton, antes de presentar al estudiante los métodos trabajo-energía e impulso-cantidad de movimiento. De esta manera, se evita introducir al estudiante a dichos métodos de manera desarticulada.

Además, en los distintos apartados principales de este libro, la materia progresa desde los conceptos de Mecánica del punto ya conocidos (en un curso previo de Física) a los conceptos menos conocidos de la mecánica del cuerpo rígido bidimensional y llegando luego a los conceptos más complejos del movimiento del cuerpo rígido tridimensional. De esta manera, los temas más atractivos quedan distribuidos de manera más uniforme a lo largo del semestre.

Otras obras organizan la materia en cuatro categorías: (1) Dinámica del punto (Cinemática del punto seguida de una presentación integrada de los tres métodos de solución de los problemas de Cinética del punto); (2) Dinámica de los sistemas de puntos (Cinemática de sistemas de puntos seguida de una presentación integrada de los tres métodos de solución de problemas de Cinética); (3) Dinámica del cuerpo rígido (Cinemática del cuerpo rígido seguida de una presentación integrada de los tres métodos de solución de problemas de Ciné-

tica del cuerpo rígido) en movimiento plano; y (4) Cinemática y Cinética tridimensionales del punto y del cuerpo rígido.

Este método de presentación adolece de tres dificultades. Primera, resulta difícil al estudiante dominar simultáneamente tres métodos de solución para un problema. Segunda, los conceptos fáciles y conocidos (referentes a la Cinemática y Cinética del punto) se tratan en las primeras semanas del curso y los conceptos más difíciles y menos conocidos (relativos a la Cinemática y Cinética del cuerpo rígido) se tratan en las últimas semanas. Tercera, si sólo se domina la parte del curso constituida por la Dinámica del punto, el estudiante no será capaz de seguir con aprovechamiento cursos posteriores en los que sea necesaria competencia en la Dinámica del cuerpo rígido.

Diagramas de sólido libre

La mayoría de los ingenieros consideran que el diagrama de sólido libre es la herramienta más importante para la solución de los problemas de Mecánica. El diagrama de sólido libre es igualmente importante en Dinámica que en Estática. En nuestro método, siempre que se escriba una ecuación de equilibrio o de movimiento, deberá acompañarse del correspondiente diagrama de sólido libre completo.

Métodos de solución de problemas

El éxito en los cursos de Mecánica técnica depende, en gran manera, de seguir un método disciplinado de solución de problemas y de resolver muchos. Animamos al estudiante a que desarrolle su habilidad de reducir los problemas a una serie de problemas componentes más sencillos que puedan analizarse y combinarse fácilmente para dar la solución del problema inicial. A lo largo de todo el texto, se hace hincapié en la conveniencia de presentar los resultados de manera clara, lógica y limpia, junto con una metodología eficaz para la descomposición y solución de los problemas. Un primer curso de Mecánica constituye un excelente punto de partida para el desarrollo de este enfoque disciplinado que tan necesario es en la mayoría de los trabajos técnicos.

Ejemplos desarrollados

Los ejemplos desarrollados son valiosísimos para los estudiantes. Se han elegido con gran cuidado los problemas de ejemplo con el fin de ilustrar los conceptos que se están estudiando. A la presentación de un concepto sigue un ejemplo desarrollado que ilustra dicho concepto al estudiante. En este libro se han introducido, aproximadamente, 120 ejemplos desarrollados.

Problemas para casa

Este libro contiene una gran selección de problemas que ilustran la amplia aplicación de los principios de la Dinámica a los distintos campos de la Ingeniería. Los problemas de cada grupo representan una amplia gama de dificultades. Creemos que el estudiante profundiza su dominio de un tema mediante la aplicación de la teoría básica a la resolución de problemas que presenten cierto grado de dificultad. El dominio no se consigue, generalmente, resolviendo un gran número de problemas sencillos pero parecidos. Los problemas del texto exigen la comprensión de los principios de la Dinámica sin requerir un tiempo de cálculo excesivo.

Cifras significativas

Los resultados deben siempre darse con toda la precisión posible. Sin embargo, no hay que dar los resultados con 10 cifras significativas simplemente porque la calculadora dé tantos dígitos. Una de las tareas en todo trabajo técnico estriba en determinar la precisión de los datos de que se dispone y la precisión con que se puede dar la respuesta final. Los resultados deben reflejar la precisión de los datos de partida.

Sin embargo, en un libro no es posible que los estudiantes examinen o cuestionen la precisión de los datos. Tampoco es posible, en un curso de introducción, acotar los errores de cada número. Por tanto, como difícilmente es posible una precisión superior a un 0,2% en los problemas técnicos, todos los datos que se mencionan en los Problemas Ejemplo y en los Problemas para Casa, independientemente del número de cifras que se den, se supondrá que tienen una precisión suficiente para justificar un redondeo de la respuesta final al grado de precisión mencionado (tres o cuatro cifras significativas).

Problemas para resolver con calculadora

Muchos estudiantes acuden al centro de enseñanza con calculadoras, algunas de ellas programables. Habida cuenta de ello incluimos, al final de muchos capítulos, problemas que pueden resolverse mejor utilizando tales herramientas. Estos problemas no constituyen un simple ejercicio de machacar números; se han elegido para ilustrar cómo la solución de un problema puede depender de las condiciones iniciales o finales, o de algún parámetro del problema. Los problemas a resolver con calculadora figuran al final de muchos capítulos y presentan una C antes del número del problema.

Problemas de repaso

Al final de cada capítulo hay un conjunto de problemas de repaso. Estos problemas tienen por misión que los estudiantes puedan comprobar cómo han captado los conceptos tratados en el capítulo. Como los problemas no se asocian directamente a ningún apartado en particular, integran frecuentemente cuestiones diversas tratadas en el capítulo y por ello se refieren a aplicaciones más realistas que las que puedan figurar en un problema destinado a ilustrar un concepto concreto.

Unidades SI y unidades U.S.A.

Las empresas técnicas más importantes operan en un ámbito internacional. Además, la utilización del Sistema Internacional de Unidades (SI) va imponiéndose cada vez más en los Estados Unidos. A consecuencia de ello, los ingenieros deben manejar con soltura tanto el sistema SI como el sistema USCS (U.S. Customary System) de unidades. En la versión española de este libro sólo se utiliza en Sistema Internacional tanto en los ejemplos ilustrativos como en los problemas para casa.

Resúmenes de los capítulos

Para ayudar a los estudiantes, hemos escrito un resumen que figura al final de cada capítulo. Estos apartados proporcionan una sinopsis de los conceptos

principales que se han explicado en el capítulo y que los estudiantes pueden utilizar como repaso o como ayuda para el estudio.

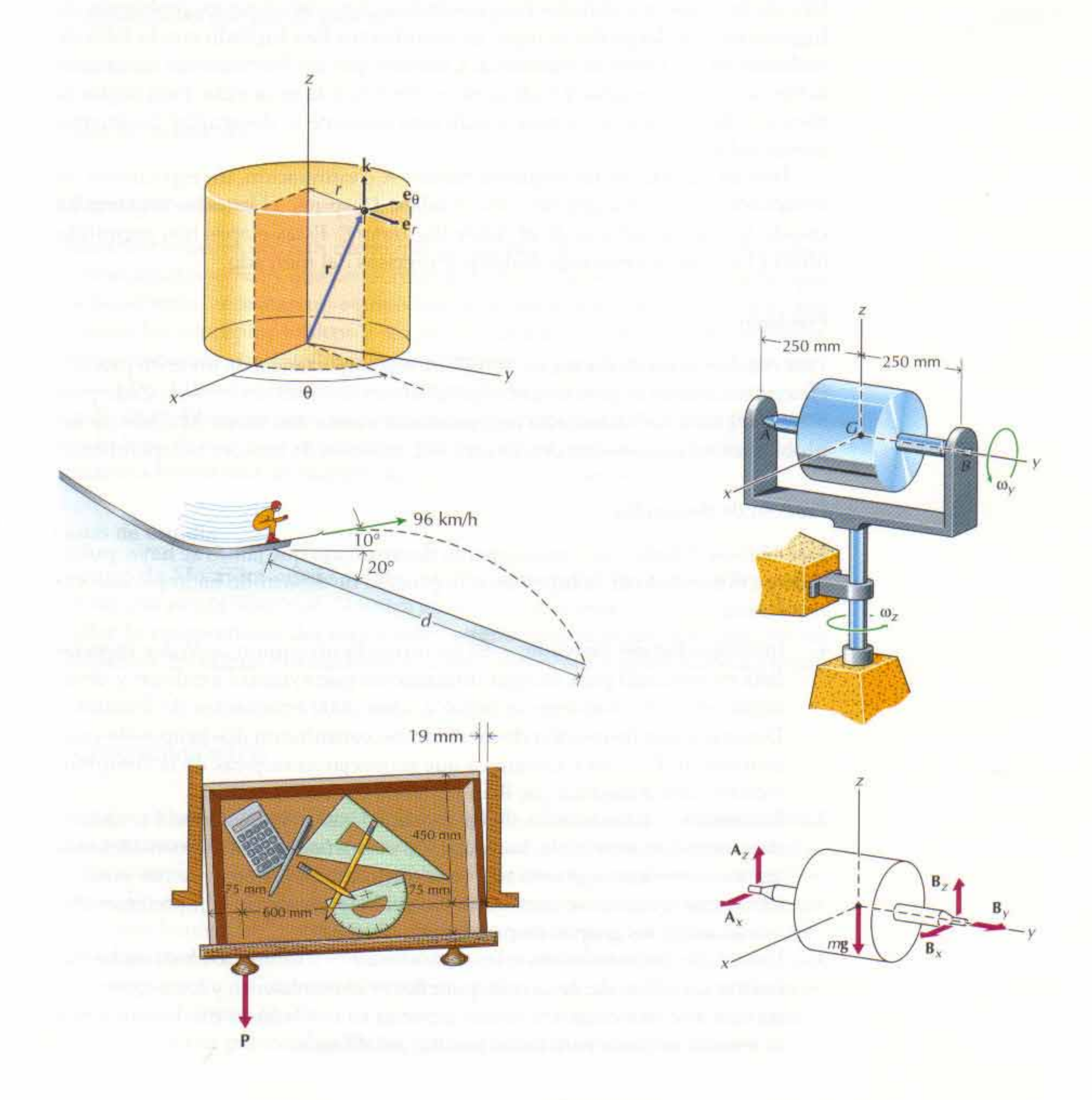
Soluciones

Al final del libro se consignan las respuestas a la mitad aproximada de los problemas. Creemos que la primera exposición de un tema debe incluir algunos problemas cuyos resultados se den. Como a esta primera exposición se suelen reservar los problemas más sencillos, se dan las respuestas a los primeros problemas de cada artículo y por esta razón se dan las de la mitad aproximada de los problemas restantes. Los problemas de los que se dan las respuestas están indicados con un asterisco tras el número del problema.

DISEÑO

Utilización del color

Una de las primeras cosas que se observan al abrir este libro es que se utilizan diversos colores. Creemos que el color ayuda eficazmente a los estudiantes de Mecánica por dos razones: Primera, los estudiantes orientados visualmente de hoy en día están más motivados por los textos que representan con mayor precisión el mundo real. Segunda, un código de colores adecuado facilita al estudiante la comprensión de las figuras y el texto.



En la página anterior, pueden verse figuras de las que se encontrarán en el libro. Podemos ver que los vectores fuerza se representan en rojo y los vectores velocidad, en verde. Los vectores de posición son azules; las dimensiones se representan con líneas finas negras; y los vectores unitarios son negros y gruesos. A lo largo de todo el libro se utiliza este uso pedagógico del color.

También hemos utilizado el color para ayudar al estudiante a identificar los elementos de estudio más importantes. Así, los problemas ejemplo se han enmarcado siempre en azul y beige y las ecuaciones importantes figuran en un cuadro azul.

Ilustraciones

Una de las cosas más difíciles para el estudiante es visualizar los problemas de Ingeniería. A lo largo del tiempo, los estudiantes han luchado con la falta de realismo de los libros de Mecánica. Creemos que las ilustraciones mecánicas deben ser tan coloreadas y tridimensionales como lo es la vida. Para captar la atención del estudiante, hemos tenido esto presente al desarrollar las ilustraciones del texto.

Hemos partido de un esquema básico. A continuación, un especialista en ilustración técnica ha añadido los detalles. Después, el estudio artístico ha creado las figuras utilizando el *Adobe Illustrator©*. Estas etapas han permitido ofrecer las ilustraciones más realistas y precisas del mercado.

Precisión

Tras muchos años de docencia, apreciamos la importancia de un texto preciso. Hemos realizado un gran esfuerzo para ofrecer un libro sin errores. Cada problema del texto se ha resuelto independientemente dos veces. Muchos de los problemas se han resuelto una tercera vez, también de manera independiente.

Proceso de desarrollo

Este libro es el texto más extensamente desarrollado que jamás se haya publicado en el mercado de la Ingeniería. El proceso de desarrollo ha implicado varias etapas.

1. **Investigación del mercado** Se ha formado un equipo de Wiley especialista en mercado para recoger información que ayudara a enfocar y desarrollar el texto. También se envió a unos 3000 enseñantes de Estática y Dinámica una inspección de mercado. Se consultaron dos grupos de catedráticos de Estática y Dinámica que aconsejaron mejoras de la comprensión en clase a medida que iban tomando forma los textos.
2. **Revisiones** Catedráticos de los Estados Unidos y del Canadá revisaron concienzudamente cada borrador de este manuscrito. Se consideraron atentamente sus sugerencias y se incorporaron siempre que fue posible. Otros seis revisores se encargaron de evaluar uno de los componentes clave del texto: los grupos de problemas.
3. **Desarrollo del manuscrito y las ilustraciones** Junto a los autores ha trabajado un editor de desarrollo para llevar el manuscrito y los esquemas a su más alto potencial. Un artista especial ha colaborado con los autores y el estudio artístico para hacer resaltar los dibujos.

PAQUETE TÉCNICO PARA EL PROFESOR

Manual de soluciones

Tras muchos años de docencia, reconocemos la importancia de un manual de soluciones de calidad análoga a la del texto. Por esa razón, hemos preparado el manual. Incluye la resolución completa de cada problema del libro y los problemas más atractivos están marcados con un asterisco. Cada solución figura con el enunciado del problema y, cuando se tercie, con la figura correspondiente.

Hacemos esto en beneficio del profesor para que, junto con el manual, no tenga que tener a mano el libro al preparar la clase. El manual también contiene transparencias que puede proyectar en clase.

PARA EL ALUMNO

Equipo instruccional

Nuestros revisores nos han dicho que generalmente no les satisface el equipo instruccional o *software* que proporciona el editor. También nos han dicho que los estudiantes necesitan un equipo instruccional que sea fácil de utilizar, que refuerce los conceptos básicos y sea muy interactivo. Teniendo esto presente, hemos trabajado con Intellipro para producir un paquete que satisfaga estas demandas. El equipo instruccional consta de 30 problemas, 10 de *Estática* y 20 de *Dinámica*. El equipo instruccional resalta la importancia de los diagramas de sólido libre dando a los estudiantes práctica de su trazado. Los problemas de Dinámica tienen una animación que ayuda a visualizarlos.

Guías de estudio

El curso de Mecánica puede ser duro y frecuentemente los estudiantes precisan de una ayuda adicional. Nuestra guía de estudio está redactada para desarrollar la comprensión del estudiante y darle habilidad en la resolución de problemas. En la guía de estudio se resaltan los conceptos principales del texto.

RECONOCIMIENTOS

En la preparación de este libro han participado, directa e indirectamente, muchas personas. En particular, queremos agradecer a Rebecca Sidler su cuidadosa revisión del manuscrito y la resolución de muchos problemas de ambos tomos. En auxilio de los autores, muchos colegas actuales y anteriores, así como estudiantes, han contribuido con ideas referentes a los métodos de presentación, problemas ejemplo y problemas para casa. No obstante, las opiniones finales acerca del ordenamiento de la materia y el hincapié en los temas se deben a los autores. Mucho nos gustaría recibir comentarios de los lectores e intentaremos dar personalmente las gracias por dichas comunicaciones.

Quisiéramos agradecer a las siguientes personas sus sugerencias y los estímulos que nos han dado durante el proceso de revisión.

H. J. Sneck	Rensselaer
Thomas Lardiner	University of Massachusetts
K. L. DeVries	University of Utah
John Easley	University of Kansas
Brian Harper	Ohio State University
Kenneth Oster	University of Missouri-Rolla
D. W. Yannitell	Louisiana State University
James Andrews	University of Iowa
D. A. DaDeppo	University of Arizona
Ed Hornsey	University of Missouri-Rolla
William Bingham	North Carolina State University
Robert Rankin	Arizona State University
David Taggart	University of Rhode Island
Allan Malvick	University of Arizona
Gaby Neunzert	Colorado School of Mines
Tim Hogue	Oklahoma State University
Bill Farrow	Marquette University
Matthew Ciesla	New Jersey Institute of Technology
William Lee	US Naval Academy
J. K. Al-Abdulla	University of Wisconsin
Erik G. Thompson	Colorado State University
Dr. Kumar	University of Pennsylvania
William Walston	University of Maryland
John Dunn	Northeastern University
Ron Anderson	Queen's University (Canada)
Duane Storti	University of Washington
Jerry Fine	Rose-Hulman Institute of Technology
Ravinder Chona	Texas A & M
Bahram Ravani	University of California-Davis
Paul C. Chan	New Jersey Institute of Technology
Wally Venable	West Virginia University
Eugene B. Loverich	North Arizona University
Kurt Keydel	Montgomery College
Francis Thomas	University of Kansas
Colonel Tezak	U.S. Military Academy

William F. Riley
Leroy D. Sturges

ÍNDICE ANALÍTICO

CAPÍTULO 17 CINÉTICA DEL PUNTO: MÉTODOS DE TRABAJO Y ENERGÍA 265

CAPÍTULO 18 CINÉTICA DEL CUERPO RÍGIDO: MÉTODOS DE TRABAJO Y ENERGÍA 303

CAPÍTULO 20 CINÉTICA DEL CUERPO RÍGIDO: IMPULSO, CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y MOMENTO CINÉTICO 403

CAPÍTULO 21 VIBRACIONES MECÁNICAS 447

LISTA DE SÍMBOLOS

Vectores unitarios

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	Vectores unitarios según las direcciones x, y, z (coordenadas rectangulares)
$\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_t$	Vectores unitarios según las direcciones n, t (coordenadas normal y tangencial)
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$	Vectores unitarios según las direcciones r, θ (coordenadas polares)

Magnitudes cinemáticas

$\mathbf{r}$	Vector de posición
x, y, z	Componentes rectangulares del vector de posición
$\mathbf{v}$	Vector velocidad
v_x, v_y, v_z	Componentes rectangulares del vector velocidad
$\mathbf{v}_{B\text{rel}}$	Velocidad del punto B relativa al origen de un sistema de ejes de coordenadas solidarios a un cuerpo rígido (giran con él)
$\mathbf{a}$	Vector aceleración
a_x, a_y, a_z	Componentes rectangulares del vector aceleración
$\mathbf{a}_{B\text{rel}}$	Aceleración del punto B relativa al origen de un sistema de ejes de coordenadas solidarios a un cuerpo rígido (giran con él)
$\boldsymbol{\omega}$	Vector velocidad angular
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	Componentes rectangulares del vector velocidad angular
$\boldsymbol{\alpha}$	Vector aceleración angular
$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$	Componentes rectangulares del vector aceleración

Magnitudes trabajo y energía

T_i, T_f	Energía cinética (inicial, final)
$U_{1\to2}$	Trabajo efectuado por una fuerza y/o un momento cuando el punto material o el cuerpo pasa de la posición 1 a la posición 2
$U^{(c)}_{1\to2}$	Trabajo efectuado por una fuerza conservativa
$U^{(e)}_{1\to2}$	Trabajo efectuado por una fuerza no conservativa (o que el potencial del cual deriva sea desconocido)
V_i, V_f	Energía potencial de una fuerza (inicial, final)

Magnitudes impulso, cantidad de movimiento y momento cinético

$\mathbf{L}$	Vector cantidad de movimiento
$\mathbf{H}_A$	Vector momento cinético (relativo al punto A)
e	Coeficiente de restitución

Magnitudes de las vibraciones

ω_n	Pulsación propia sin amortiguamiento
ω_d	Pulsación propia con amortiguamiento
f_n	Frecuencia propia sin amortiguamiento
f_d	Frecuencia propia con amortiguamiento
τ_n	Periodo propio sin amortiguamiento
τ_d	Periodo propio con amortiguamiento
ζ	Índice de amortiguamiento
Ω	Pulsación de la oscilación forzada
δ	Decremento logarítmico

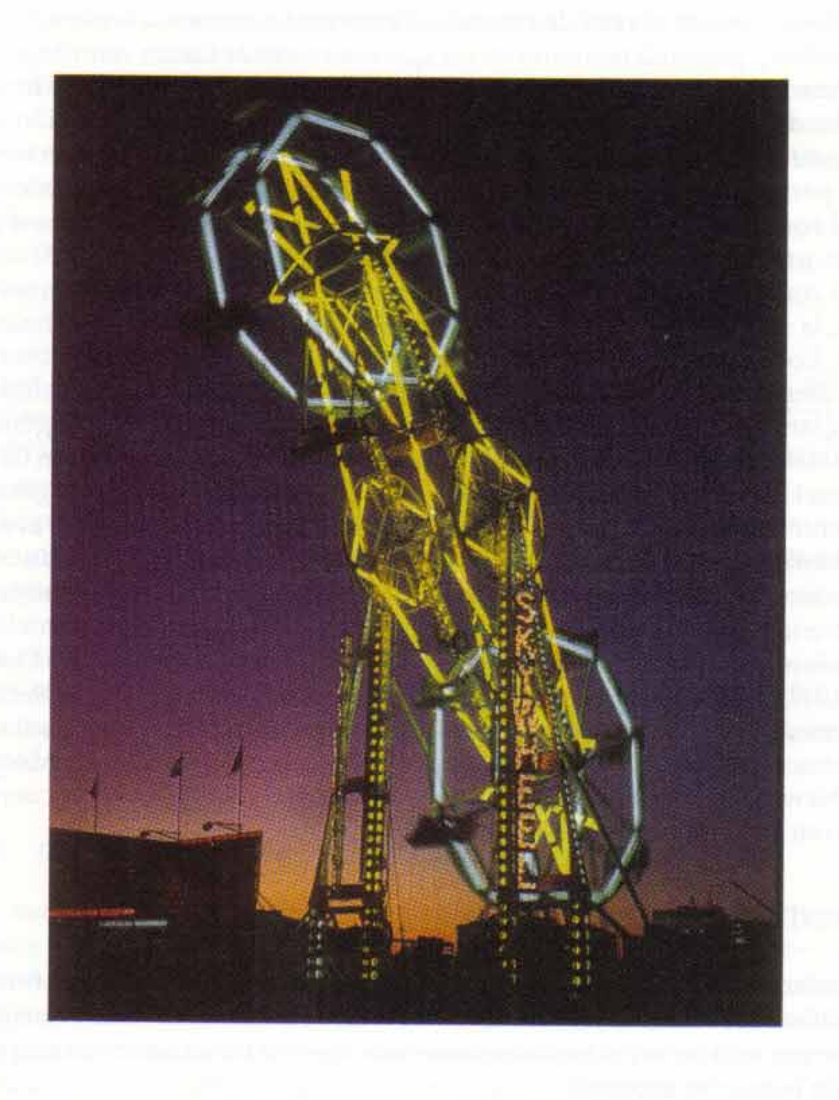
Diversas constantes físicas

m	Masa de un punto material o de un cuerpo rígido
W	Peso de un punto material o de un cuerpo rígido
k	Constante elástica de un resorte
μ_s	Coeficiente de rozamiento estático
μ_k	Coeficiente de rozamiento cinético
I_x, I_y, I_{xy}, …	Momentos y productos de inercia
k	Radio de giro
G	Constante de la gravitación universal
M_e	Masa de la Tierra
R_e	Radio de la Tierra

INGENIERÍA MECÁNICA

DINÁMICA

12 PRINCIPIOS GENERALES



La noria doble de feria ilustra los tipos de movimiento que aparecen en los problemas de Dinámica. Los movimientos son: traslación curvilínea de los asientos, rotación en torno a un eje fijo de los brazos y movimiento plano cualquiera de las ruedas.

12.1 INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA

Se ha definido la Mecánica diciendo que es la rama de la Física que trata de la respuesta de los cuerpos a la acción de las fuerzas. Por conveniencia, se divide su estudio en tres partes, cuales son: Mecánica de los cuerpos rígidos, Mecánica de los cuerpos deformables y Mecánica de los fluidos. A su vez, la Mecánica de los cuerpos rígidos puede subdividirse en Estática (equilibrio del cuerpo rígido) y Dinámica (movimiento del cuerpo rígido).

La Estática fue la primera parte de la Mecánica que se desarrolló porque los principios de la Estática se necesitan para la construcción de edificios. Los constructores de las pirámides de Egipto comprendieron y utilizaron dispositivos tales como la palanca, la polea y el plano inclinado.

La Dinámica se desarrolló mucho después porque las magnitudes que en ella intervienen (velocidad y aceleración) dependen de la medida precisa del tiempo. Los experimentos de Galileo Galilei (1564-1642) de caída de cuerpos, péndulos y cilindros rodando por un plano inclinado dieron inicio al desarrollo de la Dinámica. No obstante, Galileo vio dificultada su labor por la falta de relojes adecuados para medir los pequeños intervalos de tiempo que intervenían en sus experimentos. Huygens (Christiaan) (1629-1695) continuó la labor de Galileo e inventó el reloj de péndulo. También determinó la aceleración de la gravedad y presentó teoremas en los que intervenía la fuerza centrífuga. Sir Isaac Newton (1642-1727) completó la formulación de los principios fundamentales de la Mecánica con su descubrimiento de la ley de la Gravitación universal y su enunciado de las leyes del movimiento. El trabajo de Newton acerca de las partículas o puntos materiales, basado en la Geometría, lo extendió Euler (Leonhard) (1707-1793) a los sistemas de cuerpos rígidos. Euler fue el primero en utilizar la expresión *momento de inercia*. D'Alembert (1717-1783) introdujo el concepto de fuerza de inercia. Cuando se introducen las fuerzas de inercia, la suma de las fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo en movimiento es nula. Los trabajos previos en Mecánica, basados principalmente en observaciones astronómicas y en consideraciones geométricas, fueron formalizados por Lagrange (1736-1813), quien dedujo analíticamente las ecuaciones generalizadas del movimiento utilizando conceptos energéticos. La deducción de estas ecuaciones, que se conocen con el nombre de ecuaciones de Lagrange, representó un gran avance en el desarrollo de la Mecánica clásica. Otro avance importante se debe a Coriolis (1792-1843), quien mostró cómo la introducción de términos adicionales permite aplicar las leyes de Newton cuando el sistema de referencia está en rotación.

Siguieron importantísimos avances en Mecánica debidos a Max Planck (1858-1947) que formuló la Mecánica cuántica y a Albert Einstein (1879-1955) que formuló la teoría de la Relatividad (1905). Estas nuevas teorías no rechazan la Mecánica newtoniana; simplemente, son más generales que ella. La Mecánica de Newton era y es aplicable a la predicción del movimiento de cuerpos cuando su celeridad es pequeña frente a la de la luz.

12.2 LEYES DE NEWTON

Los fundamentos de los estudios de Mecánica técnica son las leyes que formuló y publicó Sir Isaac Newton en 1687. En un tratado titulado "The Principia", Newton enunció las leyes fundamentales que rigen el movimiento de una partícula de la manera siguiente:

Leyes de Newton del movimiento	
Primera ley	Todo cuerpo se mantiene en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme, salvo si se ve forzado a cambiar dicho estado por la acción de fuerzas a él aplicadas.
Segunda ley	El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz aplicada y tiene lugar en la dirección de la recta según la cual se aplica la fuerza.
Tercera ley	La reacción es siempre igual y opuesta a la acción; es decir, las acciones que dos cuerpos se ejercen uno sobre otro son siempre iguales y directamente opuestas.

Estas leyes, que hoy se conocen por el nombre de "Leyes de Newton del movimiento", suelen expresarse actualmente de la siguiente manera:

Primera ley En ausencia de fuerzas exteriores, una partícula inicialmente en reposo o que se mueva con velocidad constante seguirá en reposo o moviéndose con velocidad constante a lo largo de una recta.

Segunda ley Si sobre una partícula se ejerce una fuerza exterior, aquélla se acelerará en la dirección y sentido de la fuerza y el módulo de la aceleración será directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa de la partícula.

Tercera ley Para toda acción existe una reacción igual y opuesta. Las fuerzas de acción y reacción entre cuerpos en contacto son de igual módulo e igual recta soporte, pero de sentidos contrarios.

Las tres leyes de Newton se desarrollaron a partir del estudio del movimiento planetario (movimiento de partículas). Durante el siglo XVIII, Leonhard Euler (1707-1783) extendió a los sistemas de cuerpos rígidos el trabajo de Newton acerca de partículas.

La primera ley contiene el caso en que el cuerpo esté en equilibrio. Así pues, la primera ley nos proporciona un fundamento para el estudio de la Estática. La segunda ley trata del movimiento acelerado de un cuerpo y proporciona un fundamento para el estudio de la Dinámica.

La ley que rige la atracción mutua entre dos cuerpos aislados también fue formulada por Newton y se conoce con el nombre de **"Ley de la Gravitación"**. Esta ley es muy importante en todos los estudios referentes al movimiento de los planetas, naves espaciales y satélites artificiales.

12.3 MAGNITUDES FUNDAMENTALES DE LA MECÁNICA

Las magnitudes fundamentales de la Mecánica son el espacio, el tiempo, la masa y la fuerza. Tres de estas magnitudes —espacio, tiempo y masa— son absolutas. Esto significa que son independientes entre sí y no pueden expresarse en función de las otras magnitudes ni de manera más simple. La fuerza no es independiente de las otras tres magnitudes sino que está relacionada con la masa del cuerpo y con la manera de variar con el tiempo la velocidad del cuer-

po. Damos a continuación una breve descripción de estas cuatro magnitudes junto con algunos otros conceptos importantes en Dinámica:

Espacio es la región geométrica a la que nos referimos comúnmente llamándola "universo". Esta región se extiende sin límite en todas direcciones.

Tiempo es el intervalo entre dos sucesos. La medida de dicho intervalo se realiza comparándolo con sucesos reproducibles tales como el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor de su eje.

Materia es toda sustancia que ocupa lugar en el espacio.

Un **cuerpo** es materia limitada por una superficie cerrada.

Inercia es la propiedad de la materia que la dota de resistencia a cambiar su movimiento.

Masa es una medida cuantitativa de la resistencia de un cuerpo a cambiar su movimiento.

Fuerza es la acción de un cuerpo sobre otro. Las fuerzas siempre se producen por parejas y las dos fuerzas son de igual módulo y sentidos opuestos. El efecto exterior de una fuerza sobre un cuerpo es o el desarrollo de fuerzas resistivas (reacciones) sobre el cuerpo (problemas de Estática) o el movimiento acelerado del cuerpo (problemas de Dinámica).

Punto material o partícula es un cuerpo sin forma ni tamaño que puede suponerse ocupa un punto del espacio. Los problemas de Mecánica se simplifican mucho cuando el cuerpo puede tratarse como punto material.

Cuerpo rígido es un conjunto de puntos materiales que se mantienen a distancias invariables unos de otros en todo momento y en cualesquiera situaciones de carga. El concepto de cuerpo rígido constituye una idealización de la situación real ya que todos los cuerpos reales cambian hasta cierto punto su forma al someterlos a un sistema de fuerzas. Cuando se supone que el cuerpo es rígido (exento de deformación), no se necesitan las propiedades materiales del cuerpo para analizar las fuerzas y sus efectos sobre dicho cuerpo. En este libro, los cuerpos que tratemos, salvo el caso de resortes deformables, los consideraremos rígidos.

La **posición** de un punto en el espacio se especifica utilizando medidas lineales y angulares respecto a un sistema de coordenadas cuyo origen se sitúa en cierto punto de referencia. El sistema básico de referencia que se utiliza como ayuda para la resolución de problemas de Mecánica es un sistema inercial primario, consistente en un sistema imaginario de ejes rectangulares que no se trasladan ni giran en el espacio. Las medidas efectuadas respecto a este sistema se denominan absolutas. Las leyes de la mecánica newtoniana serán válidas en este sistema de referencia mientras las velocidades que intervengan sean despreciables frente a la celeridad de la luz que es de 300 000 km/s. Un sistema de referencia solidario a la superficie terrestre se mueve respecto al sistema inercial primario; no obstante, las correcciones que hay que realizar correspondientes al movimiento absoluto de la Tierra son insignificantes y se pueden despreciar en la mayoría de los problemas técnicos en los que intervienen máquinas y estructuras instaladas en la superficie terrestre.

12.4 UNIDADES DE MEDIDA

Las magnitudes físicas que se utilizan para expresar las leyes de la Mecánica son: masa, longitud, fuerza, tiempo, velocidad, aceleración, etc. Estas magnitudes pueden dividirse en magnitudes fundamentales y magnitudes derivadas.

Las magnitudes fundamentales no se pueden definir en función de otras magnitudes físicas. El número de magnitudes consideradas fundamentales es el número mínimo necesario para dar una descripción coherente y completa de todas las magnitudes físicas que suelen encontrarse en el tema tratado. La longitud y el tiempo constituyen ejemplos de magnitudes consideradas fundamentales.

Las magnitudes derivadas son aquellas cuyas operaciones de definición se basan en medidas de otras magnitudes físicas. El área de una superficie, el volumen, la velocidad y la aceleración constituyen ejemplos de magnitudes derivadas en Mecánica.

La masa y la fuerza son magnitudes que se pueden considerar o bien fundamentales o bien derivadas. En el sistema de unidades internacional (SI), la masa se considera magnitud fundamental y la fuerza, derivada. En el U.S. Customary System, se considera magnitud fundamental la fuerza y la masa, derivada.

Unidades de longitud El valor de cada magnitud fundamental se define mediante una unidad o "patrón" elegida arbitrariamente. La yarda, el pie y la pulgada, por ejemplo, provienen de la antigua práctica de utilizar como patrones de longitud el brazo, el pie y el pulgar humanos. El primer patrón de longitud verdaderamente internacional ha sido una barra de platino iridiado, llamado metro patrón,[1] que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas de Sèvres, Francia. La distancia entre dos marcas finas practicadas cerca de los extremos es, por definición, un metro. Históricamente, se pretendió que el metro fuese la diezmillonésima parte de la longitud del meridiano de París. Medidas de precisión efectuadas con posterioridad a haber construido la barra del metro patrón mostraron que éste difería del valor pretendido en, aproximadamente, un 0,023%.

En 1961 se adoptó, por acuerdo internacional, un patrón de longitud atómico. Se eligió la longitud de onda en el vacío de la raya anaranjada del espectro del isótopo 86 del kriptón. En la actualidad, se define el metro diciendo que es igual a 1 650 763,73 longitudes de onda de esta luz. La elección de un patrón atómico ofrece otras ventajas aparte de una mayor precisión de las medidas de longitud. El kriptón 86 se obtiene fácilmente en todas partes; es relativamente barato, todos sus átomos son iguales y emiten luz de la misma longitud de onda. La longitud de onda elegida es unívocamente característica del kriptón 86 y está definida muy nítidamente.

La definición de la yarda, por acuerdo internacional, es 1 yarda = 0,9144 m, exactamente. Así pues, 1 pulgada = 25,4 mm, exactamente; y 1 pie = 0,3048 m, exactamente.

Unidades de tiempo Análogamente, el tiempo puede medirse de diversas maneras. Desde tiempos muy lejanos, la duración del día se aceptó como patrón para la medida del tiempo. La unidad de tiempo internacionalmente aceptada, el segundo (s), se definió diciendo que era 1 / 86 400 de un día solar medio

[1] Los Estados Unidos adoptaron el metro como patrón de longitud en 1893.

o bien 1/31 557 700 de un año solar medio. El tiempo definido en función de la rotación de la Tierra se basaba en observaciones astronómicas. Como tales observaciones requerían un tiempo de varias semanas, se necesitaba para su utilización práctica una medida terrestre secundaria, calibrada mediante observaciones astronómicas. En los trabajos científicos, se utilizan como patrones secundarios de tiempo relojes de cuarzo cuyo funcionamiento se basa en las vibraciones propias mantenidas de una lámina de cuarzo. El mejor de estos relojes de cuarzo comete durante un año un error máximo de 0,02 s. Para satisfacer la necesidad de un patrón de tiempo aún mejor, se ha desarrollado un reloj atómico que aprovecha las vibraciones atómicas periódicas del isótopo cesio 133. La Decimotercera Conferencia General de Pesas y Medidas adoptó, en 1967, como patrón de tiempo el segundo basado en este reloj de cesio. Por definición, el segundo es la duración de 9 192 631 770 ciclos de vibración del isótopo cesio 133. El reloj de cesio introduce una importante mejora en la precisión asociada a otros métodos que se basan en observaciones astronómicas. Dos relojes de cesio diferirán en no más de un segundo después de funcionar 3000 años.

Unidades de masa y peso La unidad patrón de masa, el kilogramo (kg), está definida por un cilindro de platino iridiado que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en Sèvres, Francia.

En el Sistema Internacional de Unidades (SI), la unidad de fuerza es derivada y recibe el nombre de newton (N). Un newton es la fuerza que aplicada a una masa de un kilogramo le comunica una aceleración de un metro por segundo al cuadrado. Así pues, $1\ N = 1\ kg \cdot m/s^2$.

En el U.S. Customary System of Units, la unidad de fuerza es la libra (lb) y se define como el peso, al nivel del mar y a una latitud de 45° de un patrón de platino que se conserva en el National Institute of Standards and Technology (NIST) en Washington, D.C. La masa de este patrón de platino es de 0,453 592 43 kg. La unidad de masa en este sistema es derivada y se denomina slug. Un slug es la masa que se acelera un pie por segundo al cuadrado cuando se le aplica una fuerza de una libra, o sea que 1 slug es igual a $1\ lb \cdot s^2/ft$. Como el peso del patrón de platino depende de la atracción gravitatoria terrestre, el U.S. Customary System es un sistema de unidades gravitatorio y no absoluto.

Como ayuda para la interpretación del significado físico de las respuestas en unidades SI a los lectores más acostumbrados al U.S. Customary System, en la tabla 12-1 se dan algunos factores de conversión de las magnitudes mecánicas más utilizadas.

12.5 CONSIDERACIONES DIMENSIONALES

Todas las magnitudes físicas que se encuentran en la Mecánica técnica pueden expresarse dimensionalmente en función de tres magnitudes fundamentales: masa, longitud y tiempo, representadas, respectivamente, por M, L y T. Las dimensiones de las demás magnitudes físicas se deducen de su definición o de leyes físicas. Por ejemplo, las dimensiones de la velocidad se deducen de su definición, cociente entre longitud y tiempo (L/T). Según la segunda ley de Newton, la fuerza resulta ser el producto de una masa por una aceleración; por tanto, las dimensiones de la fuerza serán ML/T^2. En la tabla 12-2 se consignan las dimensiones de otras magnitudes físicas que suelen aparecer en la Mecánica técnica.

Tabla 12.1 FACTORES DE CONVERSIÓN ENTRE LOS SISTEMAS SI Y USCS		
Magnitud	U.S.C.S. a SI	SI a U.S.C.S.
Longitud	1 in. = 25,40 mm 1 ft = 0,3048 m 1 mi = 1,609 km	1 m = 39,37 in 1 m = 3,281 ft 1 km = 0,6214 mi
Área	1 $in.^2$ = 645,2 mm^2 1 ft^2 = 0,0929 m^2	1 m^2= 1550 $in.^2$ 1 m^2= 10,76 ft^2
Volumen	1 $in.^3$ = $16,39(10^3)$ mm^3 1 ft^3 = 0,02832 m^3 1 gal = 3,785 L[a]	1 mm^3= $61,02(10^{-6})$ $in.^3$ 1 m^3 = 35,31 ft^3 1 L = 0,2642 gal
Velocidad	1 in./s = 0,0254 m/s 1 ft/s = 0,3048 m/s 1 mi/h = 1,609 km/h	1 m/s = 39,37 in./s 1 m/s = 3,281 ft/s 1 km/h= 0,6214 mi/h
Aceleración	1 in./s^2 = 0,0254 m/s^2 1 ft/s^2 = 0,3048 m/s^2	1 m/s^2 = 39,37 in./s^2 1 m/s^2 = 3,281 ft/s^2
Masa	1 slug = 14,59 kg	1 kg = 0,06854 slug
Segundo momento de superficie	1 $in.^4$ = $0,4162(10^6)$ mm^4	1 mm^4 = $2,402(10^{-6})$ mm^4
Fuerza	1 lb = 4,448 N	1 N = 0,2248 lb
Carga distribuida	1 lb/ft = 14,59 N/m	1 kN/m = 68,54 lb/ft
Presión o tensión	1 psi = 6,895 kPa 1 ksi = 6,895 MPa	1 kPa = 0,1450 psi 1 MPa = 145,0 psi
Momento flector, de un par o de una fuerza	1 ft · lb = 1,356 N · m	1 N · m = 0,7376 ft · lb
Trabajo o energía	1 ft · lb = 1,356 J	1 J = 0,7376 ft · lb
Potencia	1 ft · lb/s = 1,356 W 1 hp = 745,7 W	1 W = 0,7376 ft · lb/s 1 kW = 1,341 hp

[a] Para el litro, se aceptan los dos símbolos L y l. Como "l" puede confundirse con la cifra "1", el National Institute of Standards and Technology recomienda que en los Estados Unidos se utilice el símbolo "L" (v. NIST special publication 811, septiembre 1991).

12.5.1 Homogeneidad dimensional

Cuando se utiliza una ecuación para describir un proceso físico, se dice que aquélla es dimensionalmente homogénea si su forma no depende de las unidades de medida. Por ejemplo, la ecuación que da la distancia h que recorre un cuerpo cuando se suelta partiendo del reposo en el campo de la gravedad es $h = gt^2/2$, donde h es la distancia recorrida, t es el tiempo contado a partir del instante en que se suelta y g es la aceleración de la gravedad. La ecuación es

Tabla 12.2 DIMENSIONES DE LAS MAGNITUDES FÍSICAS DE LA MECÁNICA

Magnitud física	Dimensiones	Unidades comunes	
		SI	USCS
Longitud	L	m, mm	in., ft
Área	L^2	m^2, mm^2	$in.^2$, ft^2
Volumen	L^3	m^3, mm^3	$in.^3$, ft^3
Ángulo	1 (L/L)	rad, grado	rad, grado
Tiempo	T	s	s
Velocidad lineal	L/T	m/s	ft/s
Aceleración lineal	L/T^2	m/s^2	ft/s^2
Velocidad angular	$1/T$	rad/s	rad/s
Aceleración angular	$1/T^2$	rad/s^2	rad/s^2
Masa	M	kg	slug
Fuerza	ML/T^2	N	lb
Momento de una fuerza	ML^2/T^2	N · m	ft · lb
Presión	M/LT^2	Pa, kPa	psi, ksi
Esfuerzo	M/LT^2	Pa, MPa	psi, ksi
Energía	ML^2/T^2	J	ft · lb
Trabajo	ML^2/T^2	J	ft · lb
Potencia	ML^2/T^3	W	hp
Impulso	ML/T	N · s	lb · s
Cantidad de movimiento	ML/T	N · s	lb · s
Peso específico	M/L^2T^2	N/m^3	lb/ft^3
Densidad	M/L^3	kg/m^3	$slug/ft^3$
Segundo momento de superficie	L^4	m^4, mm^4	$in.^4$, ft^4
Momento de inercia	ML^2	$kg \cdot m^2$	$slug \cdot ft^2$

válida tanto si la distancia se mide en pies, como si se mide en metros o en pulgadas y tanto si el tiempo se mide en horas, como si se mide en años o en segundos, con tal que se mida g en las mismas unidades de longitud y tiempo que h y t. Son preferibles las ecuaciones dimensionalmente homogéneas a causa de la confusión potencial que entrañan las unidades de las constantes que aparecen en las ecuaciones no homogéneas dimensionalmente.

12.6 MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Los principios de la Mecánica son pocos y relativamente sencillos; sin embargo, sus aplicaciones son infinitas en número, variedad y complejidad. El éxito depende en gran manera de seguir un método disciplinado de resolución de problemas, el cual consta de las fases siguientes.

Las tres fases de resolución profesional de problemas

1. Definición e identificación del problema
2. Desarrollo y simplificación del modelo
3. Solución matemática e interpretación del resultado.

El método de resolución de problemas indicado en este apartado resultará útil en este curso, en los cursos de Ingeniería superiores y en la mayoría de las situaciones que posteriormente se presentarán en la práctica de la Ingeniería.

Definición e identificación del problema Los problemas de Mecánica técnica (Estática, Dinámica y Mecánica de cuerpos deformables) tratan principalmente de efectos exteriores de un sistema de fuerzas sobre un cuerpo físico. La pauta que suele seguirse al resolver un problema de Mecánica técnica exige la identificación de todas las fuerzas exteriores que se ejercen sobre el cuerpo de interés. Ello puede lograrse preparando un diagrama de sólido libre que muestre el cuerpo problema aislado de todo otro cuerpo y que tenga aplicadas todas las fuerzas exteriores.

> La mayoría de los ingenieros consideran que el diagrama de sólido libre es la herramienta más importante para la resolución de problemas de Mecánica.

Esta sencilla herramienta nos da un recurso poderoso para distinguir entre causa (fuerzas exteriores) y efecto (movimiento o deformación del cuerpo problema) y nos ayuda a çentrar nuestra atención en los principios y la información necesarios para la resolución del problema.

Desarrollo y simplificación del modelo Como las relaciones entre causa y efecto se establecen en forma matemática, la situación física deberá representarse mediante un modelo matemático para obtener la situación requerida. Para resolver el problema, será necesario a menudo formular hipótesis simplificativas o aproximaciones. La aproximación más común consiste en tratar la mayoría de los cuerpos, en los problemas de Estática y Dinámica, como si fueran rígidos. Sin embargo, no hay ningún cuerpo real que lo sea, pero las variaciones de forma de los cuerpos reales suelen tener efectos despreciables sobre la aceleración originada por un sistema de fuerzas o sobre las reacciones vinculares que mantienen el equilibrio del cuerpo. En estas circunstancias, las consideraciones acerca de las variaciones de forma constituirían una complicación inútil del problema.

Solución matemática e interpretación del resultado Corrientemente, un problema físico real no se puede resolver de manera exacta o completa. No obstante, incluso en el caso de problemas complicados, con un modelo simplificado se pueden lograr buenos resultados cualitativos. La interpretación adecuada de estos resultados puede llevar a predicciones aproximadas del comportamiento físico o puede utilizarse para comprobar lo "razonables" que sean resultados analíticos o numéricos más sofisticados. El ingeniero debe constantemente conocer el problema físico real que se considera, así como todas las limitaciones asociadas al modelo matemático que se utiliza. Las hipótesis deben evaluarse continuamente para asegurarse de que el problema matemático que se está resolviendo proporcione una representación adecuada del dispositivo o proceso físico en cuestión.

La manera más eficaz de aprender la materia contenida en los cursos de Mecánica técnica consiste en resolver diversos problemas. Para llegar a ser un ingeniero eficaz, el estudiante debe desarrollar su capacidad de reducir problemas complicados a partes sencillas que puedan analizarse fácilmente y presentar los resultados de su trabajo de manera clara, lógica y precisa. Ello puede lograrse siguiendo las siguientes etapas:

Etapas para el análisis y resolución de problemas

1. Leer detenidamente el enunciado del problema.
2. Identificar el resultado que se pide.
3. Identificar los principios a utilizar para llegar al resultado.
4. Tabular la información que se proporciona.
5. Dibujar los diagramas de sólido libre adecuados.
6. Aplicar los principios y ecuaciones adecuados.
7. Dar la respuesta con el número adecuado de cifras significativas y las unidades adecuadas.
8. Estudiar la respuesta y determinar si es razonable.

En la práctica de la ingeniería se exige que el trabajo sea claro y ordenado, pues ello se dará si así lo es el pensamiento. Las soluciones chapuceras que otros no puedan leer y comprender fácilmente, por contener detalles superfluos o confusos, carecen de valor. El desarrollo de una destreza para aplicar un método ordenado a la resolución de problemas constituye una parte importante de la educación del ingeniero. Digamos también que la identificación del problema, la simplificación del modelo y la interpretación del resultado en la resolución de problemas técnicos son, a menudo, más importantes que la solución matemática.

12.7 CIFRAS SIGNIFICATIVAS DEL RESULTADO

La precisión de las soluciones de problemas técnicos reales depende de tres factores:

Factores que influyen en la precisión

1. Precisión de los datos físicos conocidos
2. Precisión del modelo físico
3. Precisión de los cálculos realizados

La precisión lograda al resolver problemas técnicos prácticos suele estar determinada por la precisión de los datos físicos, los cuales rara vez se conocen con una precisión superior al 0,2%. Una regla práctica para "redondear" los números finales que se obtienen en los cálculos que intervienen en un análisis técnico, el cual da respuestas de este grado de precisión aproximadamente, consiste en conservar cuatro cifras significativas en los números que comiencen con la cifra "1" y conservar tres cifras significativas en los números que comiencen con cualquier cifra de "2" a "9".

La velocidad y precisión de las calculadoras electrónicas de bolsillo facilitan los cálculos numéricos de la resolución de problemas técnicos. Sin embargo, el número de cifras significativas que fácilmente se obtienen no debe tomarse como indicación de la precisión del resultado. Ya se ha dicho que los datos técnicos rara vez se conocen con una precisión superior al 0,2%; por tanto, los resultados calculados deberán siempre "redondearse" al número de cifras significativas que den el mismo grado de precisión de los datos en que se basan. La mayoría de los problemas ejemplo de este libro se resuelven con la hi-

pótesis de que los datos proporcionados tienen tres cifras significativas exactas. En consecuencia, los cálculos intermedios se efectuarán con cuatro cifras significativas y las respuestas se darán con cuatro cifras significativas si el primer dígito es 1 y con tres cuando el primer dígito no sea 1. En los problemas en que los datos se consignen con sólo una o dos cifras significativas, las respuestas se basarán en la hipótesis de que dichos datos son exactos.

En el caso de predicciones analíticas a partir de datos fijos, la precisión de los datos y la adecuación del modelo determinan la precisión de los resultados. En el caso de predicciones numéricas, la precisión de cálculo de los algoritmos utilizados influye también en la precisión de los resultados.

Podemos definir el error diciendo que es la diferencia entre dos cantidades. Esta diferencia podría ser, por ejemplo, entre un valor medido experimentalmente y un valor teórico calculado. Un error podría también resultar del redondeo de números en un cálculo. Una manera de describir un error sería expresarlo mediante una diferencia porcentual (%D). Así, en el caso de dos números A y B, si se quiere comparar el número A con el número B, la diferencia porcentual entre los dos números se define en la forma siguiente:

$$D= \frac{A-B}{B}(100)$$

En esta ecuación, B es el valor de referencia con el cual se compara A.

RESUMEN

Los problemas de Dinámica en los que se conocen los movimientos son análogos a problemas de Estática, por cuanto las leyes de Newton llevan a ecuaciones en las cuales pueden despejarse las fuerzas incógnitas. Los problemas de Dinámica en los que se desconocen ciertos aspectos del movimiento son más difíciles. En estos problemas, la aplicación de la segunda ley de Newton da lugar, normalmente, a un sistema de ecuaciones diferenciales que pueden tener una resolución relativamente fácil o muy difícil.

Las magnitudes físicas que se utilizan para expresar las leyes de la Mecánica pueden dividirse en magnitudes fundamentales y magnitudes derivadas. El valor de cada magnitud fundamental viene definido por una unidad arbitrariamente elegida o "patrón". Las unidades utilizadas en el sistema SI son el metro (m) para la longitud, el kilogramo (kg) para la masa y el segundo (s) para el tiempo. La unidad de fuerza es una unidad derivada llamada newton (N). En el U.S. Customary System of Units las unidades utilizadas son el pie (ft) para la longitud, la libra (lb) para la fuerza y el segundo (s) para el tiempo. La unidad de masa es una unidad derivada llamada slug. El U.S. Customary System es un sistema de unidades gravitatorio y no un sistema absoluto.

Los términos de cualquier ecuación que se utilice para describir un proceso físico no deben depender de las unidades de medida (deben ser dimensionalmente homogéneos). Si una ecuación es dimensionalmente homogénea, será válida para cualquier sistema de unidades con tal que todas las magnitudes que figuren en la ecuación se midan en el mismo sistema. El uso de ecuaciones dimensionalmente homogéneas elimina la necesidad de factores de conversión.

El éxito en ingeniería depende en gran manera de seguir un método disciplinado en la resolución de problemas. La resolución profesional de problemas consta de tres fases:

1. Definición e identificación del problema
2. Desarrollo y simplificación del modelo
3. Solución matemática e interpretación del resultado

La identificación de todas las fuerzas exteriores que se ejercen sobre un cuerpo se puede lograr preparando un diagrama de sólido libre que muestre el cuerpo problema aislado de los demás cuerpos y con todas las fuerzas exteriores aplicadas. Para obtener la solución de la mayoría de los problemas, deberá representarse mediante un modelo matemático la situación física real. Una aproximación corriente para establecer dicho modelo consiste en tratar el cuerpo como si fuera rígido. Aun cuando no hay ningún cuerpo real que sea absolutamente rígido, las variaciones de su forma suelen tener un efecto despreciable sobre las aceleraciones originadas por un sistema de fuerzas o sobre las reacciones vinculares que mantienen el cuerpo en equilibrio; por tanto, las consideraciones acerca de las variaciones de forma suelen constituir una complicación inútil del problema. Siempre que se utilice un modelo matemático al resolver un problema, habrá que llevar cuidado en asegurarse que el modelo y el problema matemático inherente que se resuelve proporcionen una representación adecuada del proceso físico o del dispositivo que aquéllos representen.

La precisión de las soluciones de problemas técnicos reales depende de tres factores:

1. Precisión de los datos físicos conocidos
2. Precisión del modelo físico
3. Precisión de los cálculos realizados

Rara vez es posible una precisión superior al 0,2%. Los resultados calculados deberán siempre "redondearse" al número de cifras significativas que dan el mismo grado de precisión que los datos en que se basan.

13 CINEMÁTICA DEL PUNTO



La trayectoria del vuelo de un esquiador está determinada por la velocidad de despegue, la gravedad y las fuerzas aerodinámicas.

13.1 INTRODUCCIÓN

El estudio de la Dinámica consta de dos partes: la **Cinemática** que estudia cómo se mueven los cuerpos y la **Cinética** que estudia la relación entre el movimiento y las fuerzas que lo originan. La Cinemática describe cómo varían la velocidad y la aceleración de un cuerpo con el tiempo y con sus cambios de posición. La buena comprensión de la Cinemática no sólo constituye un fundamento necesario para el ulterior estudio de la Cinética, sino que es, en sí misma, un importante campo de estudio. El proyecto de muchas piezas de maquinaria que deban crear movimientos concretos se basa, casi exclusivamente, en la Cinemática. También se basa en ella el estudio del movimiento de proyectiles, naves espaciales y satélites artificiales. En este capítulo y el 14 se tratará la Cinemática.

Una **partícula** o punto es un cuerpo cuyo tamaño puede ignorarse al estudiar su movimiento. Tan sólo hay que considerar su centro de masa. La orientación del cuerpo o su rotación no desempeñan ningún papel en la descripción de su movimiento. Las partículas pueden ser muy pequeñas o muy grandes. Su pequeñez no garantiza que un cuerpo pueda modelarse por una partícula; un gran tamaño no siempre impide que el cuerpo se pueda modelar mediante una partícula. El que un cuerpo sea grande o pequeño está relacionado con la longitud del camino que sigue, con la separación entre cuerpos o con ambas cosas. En este capítulo trataremos de la Cinemática del punto o partícula. En el capítulo 14 trataremos de la Cinemática de los cuerpos rígidos (cuerpos para los cuales es importante su orientación y rotación).

Figura 13-1

13.2 POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Supongamos que un punto se mueve a lo largo de un camino, como se indica en la figura 13-1. En un cierto instante, se hallará en la posición *P*. Esta posición viene determinada, en el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares que se indica, por el vector de posición de *P* relativo al origen *O*, lo cual puede escribirse en la forma

$$\mathbf{r}_{P/O} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{13-1}$$

donde los vectores de base **i**, **j** y **k** son vectores unitarios asociados, respectivamente, a los ejes de coordenadas *x*, *y*, *z*. El símbolo /*O* del subíndice indica que las componentes (*x*, *y*, *z*) no sólo dependen de la orientación del sistema de coordenadas sino también de la posición del origen *O*. En función de otro sistema de ejes de coordenadas fijos y paralelos a los anteriores pero que tengan su origen en $\hat{O}$ (fig. 13-2), el vector de posición del punto sería

$$\mathbf{r}_{P/\hat{O}} = \hat{x}\mathbf{i} + \hat{y}\mathbf{j} + \hat{z}\mathbf{k} \tag{13-2}$$

Según la regla del triángulo para la adición de dos vectores, estos vectores de posición están relacionados de la manera siguiente:

$$\mathbf{r}_{P/O} = \mathbf{r}_{\hat{O}/O} + \mathbf{r}_{P/\hat{O}} \tag{13-3}$$

Figura 13-2

donde $\mathbf{r}_{\hat{O}/O}$ es un vector constante.

La diferencia de posición del punto en dos instantes recibe el nombre de **desplazamiento** del punto. Si éste se halla en P en el instante t y en Q en el instante $t + \Delta t$ (fig. 13-3), el desplazamiento $\delta \mathbf{r}$ vendrá dado por

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_{Q/O} - \mathbf{r}_{P/O} \tag{13-4}$$

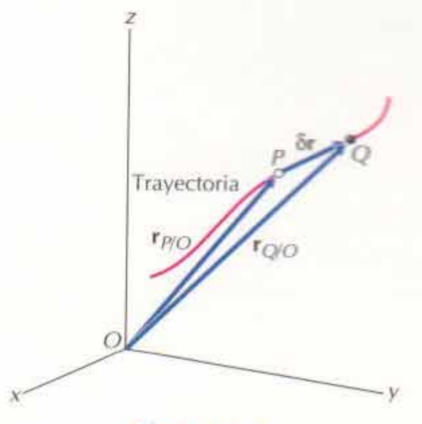


Figura 13-3

Observemos que el desplazamiento no depende de la posición del origen de coordenadas ya que

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{Q/\hat{O}} - \mathbf{r}_{P/\hat{O}} &= (\mathbf{r}_{Q/\hat{O}} - \mathbf{r}_{\hat{O}/O}) - (\mathbf{r}_{P/O} - \mathbf{r}_{\hat{O}/O})\\ &= \mathbf{r}_{Q/O} - \mathbf{r}_{P/O}\end{aligned}$$

La **velocidad** de un punto es, por definición, la variación de posición por unidad de tiempo:

$$\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{r}_{P/O}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_{P/O} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} \tag{13-5}$$

Como el desplazamiento $\delta \mathbf{r}$ es independiente de la posición del origen de coordenadas, la velocidad $\mathbf{v}_P$ también lo será. Además, resulta evidente que el sentido de la velocidad $\mathbf{v}_P$ será la del desplazamiento $\delta \mathbf{r}$, o sea tangente a la trayectoria del punto.

Como los vectores de base son constantes, la velocidad puede escribirse en función de sus componentes de la manera siguiente:

$$\mathbf{v}_P = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \tag{13-6}$$

El módulo del vector velocidad recibe el nombre de *celeridad*.

La **aceleración** de un punto es, por definición, la variación por unidad de tiempo de su velocidad.

$$\mathbf{a}_P = \frac{d\mathbf{v}_P}{dt} = \dot{\mathbf{v}}_P = \frac{d^2\mathbf{r}_{P/O}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}_{P/O} \tag{13-7}$$

También la aceleración es independiente de la posición del origen de coordenadas. En función de sus componentes, la aceleración se puede escribir en la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_P &= a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = \dot{v}_x \mathbf{i} + \dot{v}_y j + \dot{v}_z \mathbf{k}\\ &= \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}\end{aligned} \tag{13-8}$$

Si puede hallarse un sistema de coordenadas para el cual las componentes y y z de la posición, velocidad y aceleración sean nulas en todo momento, diremos que se trata de un **movimiento rectilíneo.** En tal caso, el punto se mueve a lo largo de una recta (el eje x) con celeridad y aceleración que pueden ser variables. En los apartados 13.3 y 13.4 se tratará el movimiento rectilíneo.

Si el punto no se mueve con movimiento rectilíneo pero puede hallarse un sistema de coordenadas para el cual las componentes z de la posición, velocidad y aceleración sean nulas en todo instante, diremos que se trata de un **movimiento curvilíneo plano.** En los apartados 13.5 y 13.6 se tratará la Cinemática del movimiento curvilíneo plano.

Cuando un movimiento sea tal que no sea posible encontrar un sistema de coordenadas cartesianas en el cual sea nula, en todo instante, al menos una componente de la posición, velocidad y aceleración, diremos que se trata de un **movimiento curvilíneo cualquiera** o **movimiento curvilíneo en el espacio.** En el apartado 13.7 se tratará la Cinemática del movimiento curvilíneo en el espacio.

13.3 MOVIMIENTO RECTILÍNEO

En este caso, el movimiento tiene lugar a lo largo de una recta. El sistema de coordenadas se orientará de manera que el eje x coincida con la recta de movimiento. Se acostumbra a suponer esta recta horizontal, con su sentido positivo hacia la derecha y el negativo hacia la izquierda.

Como posición, velocidad y aceleración quedan determinadas si se conocen sus componentes x, podremos prescindir de la notación vectorial. Las ecuaciones de la posición, la velocidad y la aceleración se escribirán, sencillamente, en la forma

$$r_{P/O} = x \qquad \delta x = x_Q - x_P \qquad \textbf{(13-9a,b)}$$

$$v_P = v = \dot{x} \qquad a_P = a = \dot{v} = \ddot{x} \qquad \textbf{(13-9c,d)}$$

donde el signo del número indica si el vector está dirigido en el sentido positivo del eje x o en el sentido opuesto. Así, si x es positiva, el punto se halla a la derecha del origen y si es negativa estará a la izquierda. Cuando δx es positivo, la posición final Q del punto está a la derecha de su posición inicial P; si fuese negativo, Q estaría a la izquierda de P. Si v fuese positiva, el punto se movería hacia la derecha y si fuese negativa, hacia la izquierda. Cuando velocidad y aceleración tengan el mismo signo, la velocidad aumentará y se dice que el punto está **acelerando**. Cuando velocidad y aceleración tienen signos opuestos, la velocidad decrece y se dice que el punto se **desacelera**.

Hagamos notar que el desplazamiento de un punto no es lo mismo que la distancia recorrida por él. El desplazamiento es la diferencia (vectorial) de posición entre el final y el principio de la trayectoria. Si el punto parte de una posición y vuelve a ella, su desplazamiento será **0**. Por ejemplo, el desplazamiento de un tren que vaya de Barcelona a Madrid y regrese a Barcelona es **0**. En cambio, la distancia recorrida da cuenta de lo que sucede entre el principio y el final del camino. Mide la longitud total de éste, sin tener en cuenta el sentido en que se recorre. La distancia recorrida es una magnitud escalar —sólo un número. En el caso del tren que va de Barcelona a Madrid (600 km) y regresa (600 km) la distancia recorrida es 1200 km. La distancia recorrida siempre es un número positivo.

Las ecuaciones 13-9 relacionan las cuatro variables principales: posición, velocidad, aceleración y tiempo. En las aplicaciones ordinarias, se da una relación entre dos de dichas variables y se desea hallar las otras dos. En los apartados que siguen se considerarán algunas de las combinaciones más comunes.

13.3.1 Conocida $x(t)$

Si se da la posición en función del tiempo, se hallarán la velocidad y la aceleración sin más que derivar,

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \qquad \text{y} \qquad a(t) = \frac{dv}{dt} \qquad \textbf{(13-10)}$$

13.3.2 Conocida $v(t)$

Cuando se da la velocidad en función del tiempo, puede hallarse la aceleración por derivación, como antes (ec. 13-10*b*). La posición se obtiene integrando la ecuación 13-10*a*

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

lo cual da

$$\int_{x_0}^{x} ds = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau \qquad (13\text{-}11a)$$

o bien

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau \qquad (13\text{-}11b)$$

13.3.3 Conocida $a(t)$

Cuando se da la aceleración en función del tiempo, la velocidad se obtiene integrando la ecuación 13-10*b*

$$\frac{dv}{dt} = a(t)$$

lo cual da

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau \qquad (13\text{-}12a)$$

o sea

$$v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau \qquad (13\text{-}12b)$$

La posición se halla, como antes, integrando la velocidad.

13.3.4 Conocida $a(x)$

Cuando se da la aceleración en función de la posición, hay que aplicar la regla de la cadena de la derivación a la definición (ec. 13-10*b*) de la aceleración:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\,\frac{dv}{dx} = a(x) \qquad (13\text{-}13)$$

Integrando entonces

$$\int_{v_0}^{v} v\, dv = \int_{x_0}^{x} a(s)\, ds \qquad (13\text{-}14a)$$

o sea

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} a(s)\, ds \qquad (13\text{-}14b)$$

Ahora se conoce la velocidad en función de la posición y podemos hallar ésta en función del tiempo integrando la ecuación 13-10*a*

$$\frac{dx}{dt} = v(x)$$

lo cual nos da

$$\int_{x_0}^{x} \frac{ds}{v(s)} = \int_{t_0}^{t} d\tau = t - t_0 \tag{13-15}$$

13.3.5 Conocida *a(v)*

Cuando se da la aceleración en función de la velocidad, ésta se puede hallar en función del tiempo integrando la ecuación 13-10*b*

$$\frac{dv}{dt} = a(v)$$

lo cual da

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a(v)} = \int_{t_0}^{t} d\tau = t - t_0 \tag{13-16}$$

Una vez conocida la velocidad en función del tiempo, podemos integrarla como en el apartado 13.3.2 para obtener la posición en función del tiempo.

De otra manera, se puede hallar la velocidad en función de la posición integrando la ecuación 13-13

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\,\frac{dv}{dx} = a(v)$$

para obtener

$$\int_{v_0}^{v} v\frac{dv}{a(v)} = \int_{x_0}^{x} ds = x - x_0 \tag{13-17}$$

13.3.6 Conocida *a* = constante

En el estudio anterior está incluido el caso de aceleración constante (llamado **movimiento uniformemente acelerado**) ya que si la aceleración es constante se puede tratar como función del tiempo, de la posición o de la velocidad, según convenga. Sin embargo, el caso particular del movimiento uniformemente acelerado (y el caso particular de éste de **movimiento uniforme** en el cual $a = 0$) aparece tan a menudo en Mecánica que vale la pena tratarlo aparte.

Si la aceleración es constante, las integraciones del apartado 13.3.3 son inmediatas y dan

$$v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a\, d\tau = a(t - t_0) \tag{13-18}$$

y

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(\tau - t_0)]\, d\tau \\ &= v_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}a(t - t_0)^2 \end{aligned} \tag{13-19}$$

Análogamente, la integración del apartado 13.3.4 da

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \tag{13-20}$$

Nunca insistiremos bastante en el hecho de que las ecuaciones 13-18, 13-19 y 13-20 sólo son válidas cuando la aceleración sea constante. Es frecuente el error de utilizar estas ecuaciones cuando la aceleración no es constante.

13.3.7 Análisis gráfico

En la figura 13-4 pueden verse gráficas de la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo. En dichas gráficas, la aceleración es la pendiente de la gráfica de la velocidad ya que (según ec. 13-10*b*)

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \text{pendiente de la gráfica de la velocidad en } t$$

Si es positivo el valor de la aceleración, la velocidad será creciente; si fuese negativa la aceleración, la velocidad sería decreciente. Cuanto más positiva o más negativa sea la aceleración, más deprisa crecerá o decrecerá la velocidad. Además, la variación de velocidad entre los instantes t_0 y t_1 es igual al área (señalada) bajo la gráfica *a-t* entre dichos instantes ya que (según ec. 13-12*b*)

$$v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a(\tau)\, d\tau = \begin{cases} \text{área bajo la gráfica } a\text{-}t \\ \text{entre } t_0 \text{ y } t_1 \end{cases}$$

Análogamente, la velocidad es la pendiente de la gráfica de la posición ya que (según ec. 13-10*a*)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \text{pendiente de la gráfica de la posición en } t$$

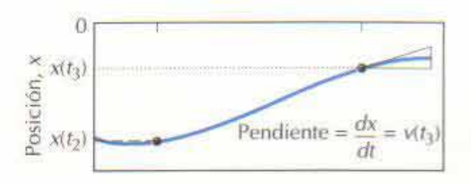
Si el valor de la velocidad es positivo, la posición será creciente; si fuese negativo, la posición sería decreciente. Además, la variación de posición entre los instantes t_0 y t_1 es igual al área (señalada) bajo la gráfica *v-t* entre dichos instantes ya que (según ec. 13-11*b*)

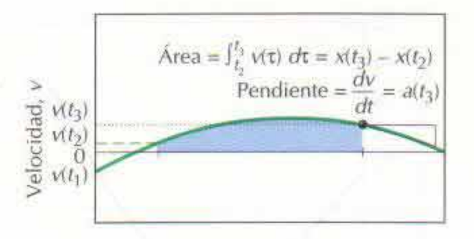
$$x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} v(\tau)\, d\tau = \begin{cases} \text{área bajo la gráfica } v\text{-}t \\ \text{entre } t_0 \text{ y } t_1 \end{cases}$$

Si el área es positiva, el punto recorre una distancia $x_1 - x_0$ hacia la derecha (en el sentido positivo de x). Si el área fuese negativa, el punto recorrería una distancia $|x_1 - x_0|$ hacia la izquierda (en el sentido negativo de x). El desplazamiento del punto entre los instantes t_0 y t_1 será la suma de todas estas áreas positivas y negativas. El desplazamiento podrá ser positivo o negativo, según que prevalezcan las áreas positivas sobre las negativas, o al revés. En cambio, la distancia recorrida es la suma de las áreas positivas más el valor absoluto de las negativas. Matemáticamente, la distancia recorrida se puede expresar en la forma

$$\text{distancia recorrida} = \int_{t_0}^{t_1} |v(\tau)|\, d\tau$$

Aun cuando estas relaciones área-pendiente no suelen ser útiles para calcular la posición o la velocidad, pueden utilizarse con las gráficas de la posición, velocidad y aceleración con fines de comprobación rápida de los resultados.





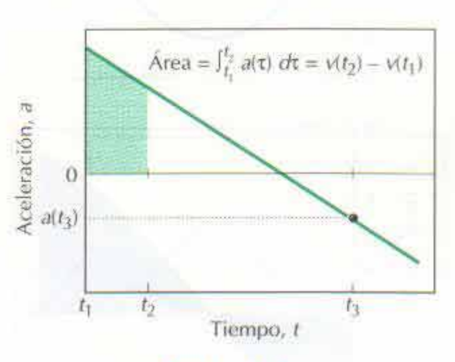


Figura 13-4

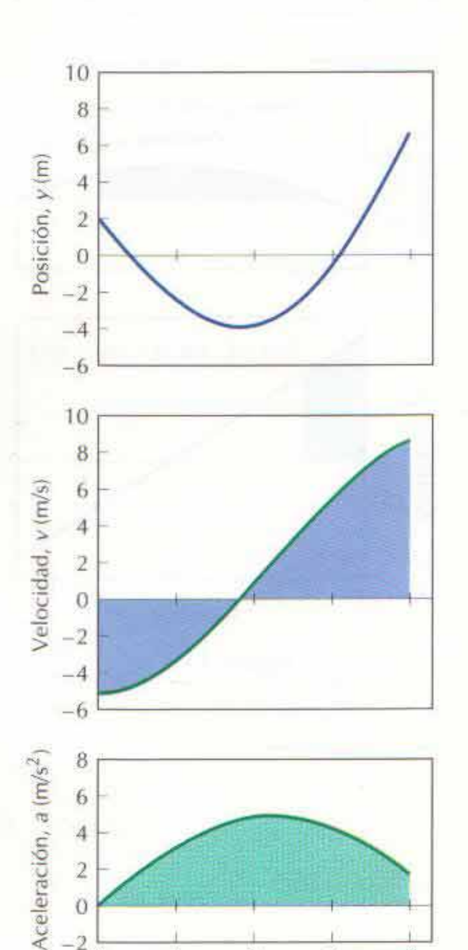


Figura 13-5

PROBLEMA EJEMPLO 13.1

Un punto material se mueve a lo largo del eje y con una aceleración $a(t) = 5 \text{ sen } \omega t$ m/s² siendo $\omega = 0{,}7$ rad/s. En el instante inicial ($t = 0$), el punto se halla 2 m por encima del origen moviéndose hacia abajo con una celeridad de 5 m/s.

- **a.** Determinar la velocidad y la posición del punto en función del tiempo.
- **b.** Representar gráficamente la posición, la velocidad y la aceleración.
- **c.** Determinar el desplazamiento δ del punto entre $t = 0$ s y $t = 4$ s.
- **d.** Determinar la distancia total recorrida por el punto entre $t = 0$ s y $t = 4$ s.

SOLUCIÓN

a. Como se da la aceleración en función del tiempo, la velocidad y la posición se obtendrán sin más que integrar las definiciones. Primeramente,

$$\frac{dv}{dt} = a(t) = 5\text{sen}\,(0{,}7\ t)$$

que se integra inmediatamente dando

$$v(t) = -5 - \frac{5}{0{,}7}[\cos(0{,}7\ t) - 1] \qquad \text{Resp.}$$

donde se ha tomado la constante de integración de manera que satisfaga la condición inicial $v = -5$ m/s cuando $t = 0$. Integrando ahora

$$\frac{dy}{dt} = v(t) = -5 - \frac{5}{0{,}7}[\cos(0{,}7\ t) - 1]$$

se tiene

$$y(t) = 2 - 5t - \frac{5}{0{,}7}\left[\frac{\text{sen}\,(0{,}7\ t)}{0{,}7} - t\right] \qquad \text{Resp.}$$

b. En la figura 13-5 se han representado gráficamente la posición, velocidad y aceleración del punto. Obsérvese que la aceleración es positiva durante los primeros cuatro segundos y por tanto, la pendiente de la gráfica de la velocidad también será positiva durante dicho tiempo. Análogamente, la velocidad es negativa durante los primeros 1,8 s y durante este tiempo también será negativa la pendiente de la gráfica de la posición. Después del instante $t \cong 1{,}8$ s la velocidad es positiva así como también la pendiente de la gráfica de la posición. En el instante $t \cong 1{,}8$ s la velocidad es nula; $v(t) = dy/dt = 0$ y la posición pasa por su valor mínimo.

c. El desplazamiento del punto entre $t = 0$ s y $t = 4$ s no es más que la diferencia de posición entre dichos instantes

10'07 8'07

$$\delta y = y(4) - y(0) = 7{,}153 - 2 = 5{,}15 \text{ m} \qquad \text{Resp.}$$

d. La distancia recorrida entre $t = 0$ s y $t = 4$ s es mayor que el desplazamiento ya que el punto se ha movido primero por debajo del origen y después por

encima de él. El lugar donde el punto invierte el sentido de su movimiento se halla determinando cuando $dy/dt = 0$ (o lo que es igual cuando $v(t) = 0$)

$$v(t) = -5 - \frac{5}{0{,}7}[\cos(0{,}7t) - 1] = 0$$

lo cual da $t = 1{,}809$ s. Entonces

$$\begin{aligned} s &= |y(1{,}809) - y(0)| + |y(4) - y(1{,}809)| \\ &= 5{,}858 + 11{,}011 = 16{,}87 \text{ m} \end{aligned} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 13.2

Un punto material que pende de un resorte se mueve con una aceleración proporcional a su posición y de signo contrario. Suponiendo que $a(x) = -4x$ m/s^2 y que la velocidad del punto es de 2 m/s hacia arriba cuando pasa por el origen

a. Determinar la velocidad del punto en función de su posición.

b. Si el punto se halla en el origen en el instante $t = 1$ s, determinar su posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

SOLUCIÓN

a. Como se da la aceleración en función de la posición, será necesario escribir la definición básica de la aceleración echando mano de la regla de la cadena

$$a(x) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v$$

Entonces se podrá obtener la velocidad integrando esta relación

$$\int v\, dv = \int a(x)\, dx = \int (-4x)\, dx$$

lo cual da

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = -2(x^2 - x_0^2)$$

Utilizando las condiciones dadas de que $v = v_0 = 2$ m/s cuando $x = x_0 = 0$ y reagrupando términos, se tiene

$$v(x) = 2\sqrt{1 - x^2} \qquad \text{Resp.}$$

b. Se puede integrar ahora esta última expresión para obtener la posición en función del tiempo. La definición da

$$\frac{dx}{dt} = v(x) = 2\sqrt{1 - x^2} \qquad (a)$$

que se puede escribir en la forma

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 2\, dt$$

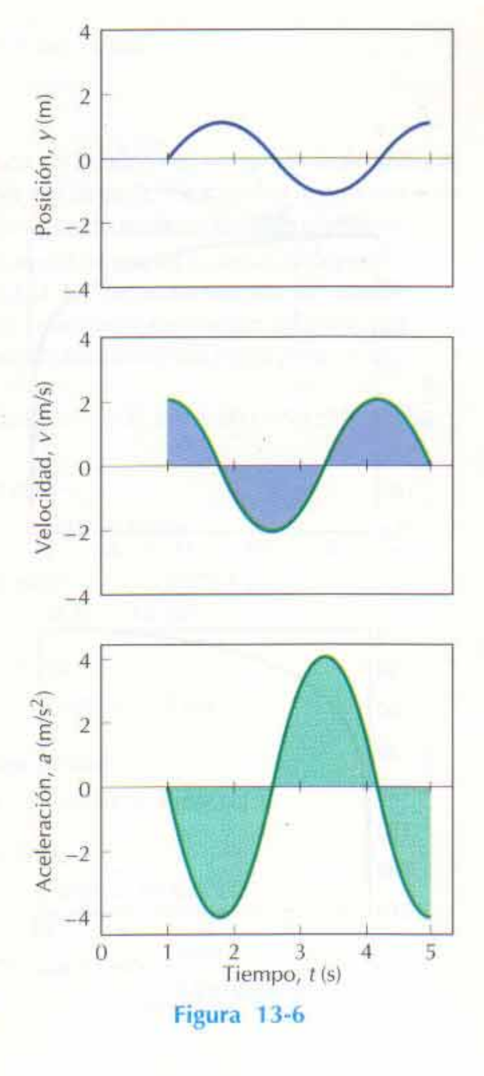


Figura 13-6

Integrando esta ecuación se tiene

$$\text{sen}^{-1}x = 2t + \text{const} \qquad \text{o} \qquad x(t) = \text{sen}\,(2t - 2) \qquad \text{Resp.}$$

donde se ha tomado la constante de integración de manera que haga $x = 0$ cuando $t = 1$ s. Aplicando esta expresión en la fórmula que se ha dado para la aceleración se tiene

$$a(t) = -4x = -4\ \text{sen}\,(2t - 2) \qquad \text{Resp.}$$

La ecuación de la velocidad en función del tiempo se puede obtener o bien sustituyendo en la ecuación a

$$v(x) = 2\sqrt{1 - x^2} = 2\sqrt{1 - \text{sen}^2\,(2t - 2)} = 2\cos\,(2t - 2)$$

o bien por derivación directa de la posición

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2\ \cos\,(2t - 2) \qquad \text{Resp.}$$

Estos resultados se han representado gráficamente en la figura 13-6.

PROBLEMA EJEMPLO 13.3

La aceleración a de una bola que cae en el aire satisface la ecuación

$$\frac{m}{g}a = -K\frac{1}{2}\rho v^2 A + m$$

donde g es la aceleración de la gravedad ($= 9{,}81\ \text{m/s}^2$), m es la masa de la bola, K es su coeficiente de forma, A es el área de la proyección de la bola sobre un plano normal al movimiento ($A = \pi r^2$), v su velocidad y ρ la densidad del aire. Sabiendo que $m = 0{,}500$ kg, $r = 6{,}25$ cm, $K = 1{,}0$, $\rho = 1{,}29\ \text{kg/m}^3$ y que la bola parte del reposo, determinar su velocidad en función de la altura.

SOLUCIÓN

Como la aceleración viene dada en función de la velocidad

$$a(v) = 9{,}81 - 0{,}01583\ v^2$$

habrá que escribir la definición básica de la aceleración echando mano de la regla de la cadena

$$a(v) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v$$

Esta relación se puede reordenar e integrar

$$\int_0^v \frac{v\ dv}{9{,}81 - 0{,}01583v^2} = \int_0^y dx$$

y se obtiene

$$-\frac{1}{0{,}03166}\left[\ln\,(9{,}81 - 0{,}01583v^2) - \ln\,(9{,}81)\right] = y - 0$$

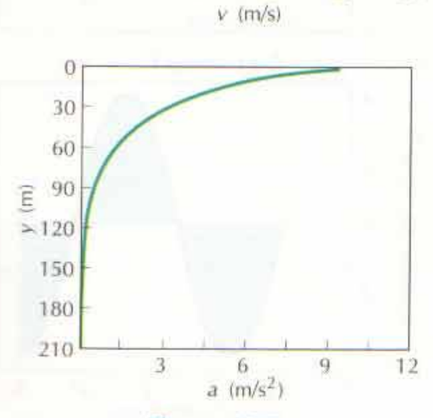


Figura 13-7

o sea

$$v = \left[\frac{1-e^{-0{,}03166y}}{0{,}001614}\right]^{1/2} \qquad \text{Resp.}$$

donde y y v se miden positivamente hacia abajo. En la figura 13-7 puede verse el resultado.

(Obsérvese que al ir cayendo la bola el término exponencial se hace muy pequeño y la velocidad tiende a un valor constante de 24,9 m/s. Este valor recibe el nombre de velocidad de régimen del cuerpo.)

PROBLEMAS

13-1 a 13-6 Se da, en función del tiempo, la posición de un punto que se mueve a lo largo del eje x. En cada problema:

a. Calcular la velocidad del punto en función del tiempo.
b. Calcular la aceleración del punto en función del tiempo.
c. Evaluar la posición, velocidad y aceleración del punto en $t=5$ s.
d. Determinar la distancia total recorrida por el punto entre $t=0$ y $t=5$ s.
e. Representar gráficamente $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$; $0 \le t \le 10$ s.

13-1* $x(t) = 5t^2 - 8t + 6$ m

13-2* $x(t) = 15 - 4t$ m

13-3 $x(t) = 3\,e^{-t/3}$ m

13-4* $x(t) = 4 \operatorname{sen} t$ m

13-5 $x(t) = 12\,e^{-t/4} \operatorname{sen} 2t$ m

13-6 $x(t) = 6t \operatorname{sen}(3t + 5\cos 2t$ m)

13-7 a 13-12 Se da, en función del tiempo, la velocidad de un punto que se mueve a lo largo del eje x; se da su posición en cierto instante. En cada problema:

a. Calcular la posición del punto en función del tiempo.
b. Calcular la aceleración del punto en función del tiempo.
c. Evaluar la posición, velocidad y aceleración del punto en $t=8$ s.
d. Determinar la distancia total recorrida por el punto entre $t=5$ s y $t=8$ s.
e. Representar gráficamente $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$, $0 \le t \le 10$ s.

13-7* $v(t) = 10 - 16$ m/s
$x(0) = 10$ m

13-8* $v(t) = 8t^2 - 20$ m/s
$x(20) = 60$ m

13-9 $v(t) = 3\,e^{-t/3}$ m/s
$x(3) = 20$ m

13-10 $v(t) = 40 \cos 8t$ m/s
$x(12) = 3$ m

13-11* $v(t) = 6t \operatorname{sen} 3t$ m/s
$x(6) = 10$ m

13-12 $v(t) = 12\,e^{-t/4} \operatorname{sen} 3t$ m/s
$x(0) = 0$ m

13-13 a 13-18 Se da, en función del tiempo, la aceleración de un punto que se mueve a lo largo del eje x; se dan la posición y velocidad de dicho punto en cierto instante. En cada problema:

a. Calcular la posición del punto en función del tiempo.
b. Calcular la velocidad del punto en función del tiempo.
c. Evaluar la posición, velocidad y aceleración del punto en $t=3$ s.
d. Determinar la distancia total recorrida por el punto entre $t=3$ s y $t=8$ s.
e. Representar gráficamente $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$, $0 \le t \le 10$ s,

13-13* $a(t) = 5 - 3t$ m/s²
$x(0) = 5$ m $\quad v(0) = 0$ m/s

13-14* $a(t) = -9{,}81$ m/s²
$x(2) = 6$ m $\quad v(2) = 12$ m/s

13-15 $a(t) = 12\,e^{-t/6}$ m/s²
$x(8) = 60$ m $\quad v(8) = -5$ m/s

13-16* $a(t) = 20 \operatorname{sen} 2t$ m/s²
$x(10) = 0$ m $\quad v(10) = 5$ m/s

13-17 $a(t) = 6t \operatorname{sen} 3t$ m/s²
$x(0) = 20$ m $\quad v(0) = 10$ m/s

13-18 $a(t) = 24\,e^{-t/6} \operatorname{sen} 2t$ m/s²
$x(3) = 0$ m $\quad v(3) = 0$ m/s

13-19* Una bola que pende del extremo de un hilo elástico tiene una aceleración proporcional a su posición pero de signo contrario

$$a(y) = -3y \text{ m/s}^2$$

Determinar la velocidad de la bola cuando $y = 1$ m si se suelta partiendo del reposo en $y = -2$ m.



Figura P13-19

13-20 Un carrito unido a un resorte se mueve con una aceleración proporcional a su posición pero de signo contrario

$$a(x) = -2x \text{ m/s}^2$$

Determinar la velocidad del carrito cuando $x = 3$ m si su velocidad era $v = 5$ m/s cuando $x = 0$ m.

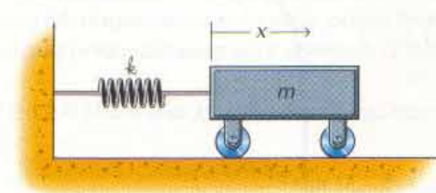


Figura P13-20

13-21 La bola del problema 13-19 pasa por el punto $y = 1$ m con velocidad positiva cuando $t = 5$ s. Determinar la posición, velocidad y aceleración de la bola en función del tiempo.

13-22* El carrito del problema 13-20 pasa por el punto $x = 3$ m con velocidad positiva cuando $t = 3$ s. Determinar la posición, velocidad y aceleración del carrito en función del tiempo.

13-23 Una bola está suspendida entre dos cintas elásticas que están ambas estiradas hasta cerca de su límite de elasticidad. La aceleración, en este caso, no es lineal sino que está dada por

$$a(x) = -3x - 5x^3 \text{ m/s}^2$$

Determinar la velocidad máxima de la bola si tiene una velocidad $v = -4$ m/s cuando $x = 1$ m.

13-24* Un carrito está sujeto entre dos resortes cuyas espiras están muy apretadas. En este caso, la aceleración viene dada por

$$a(x) = -x - 3x^2 \text{ m/s}^2$$

Determinar la posición máxima del carrito si tiene una velocidad $v = 2$ m/s cuando $x = -1$ m.

13-25* La aceleración de una astronave lanzada verticalmente viene dada (una vez parados los motores) por

$$a = -g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

donde g_0 es la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre (9,81 m/s^2), R es el radio de la Tierra (6370 km) y h es la altura de la astronave sobre la superficie terrestre. Determinar la altura máxima que alcanzará aquélla si se paran los motores a una altura $h = 32$ km y su velocidad a esa altura es de 19 300 km/h.

13-26 La aceleración de una astronave lanzada verticalmente viene dada (una vez parados los motores) por

$$a = -g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

donde g_0 es la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre (9,81 m/s^2), R es el radio de la Tierra (6370 km) y h es la altura de la astronave sobre la superficie terrestre. Determinar la velocidad de escape (velocidad necesaria cuando se apaguen los cohetes, a $h = 30$ km, para que la altura máxima a que llegue tienda a infinito).

13-27* Una bola que cae en el aire tiene una aceleración

$$a(v) = 9{,}81 - 0{,}003v^2 \text{ m/s}^2$$

donde la velocidad se expresa en metros por segundo y el sentido positivo es hacia abajo. Determinar la velocidad de la bola en función de la altura si lleva una velocidad hacia abajo de 3 m/s cuando $y = 0$. Determinar también la velocidad de régimen de la bola.



Figura P13-27

13-28 Una bola lanzada hacia arriba verticalmente en el aire tiene una aceleración

$$a(v) = 9{,}81 - 0{,}003v^2 \text{ m/s}^2$$

donde la velocidad se expresa en metros por segundo y el sentido positivo es hacia arriba. Determinar la velocidad de la bola en función de la altura si se ha lanzado hacia arriba con una velocidad inicial de 30 m/s. Determinar también la máxima altura que alcanza la bola.

13-29 El aire frena a los objetos que se mueven a través suyo con una fuerza que aumenta como el cuadrado de la velocidad. A causa de ello, la aceleración de un ciclista que baja por una pendiente resulta ser

$$a(v) = 0{,}122 - 0{,}0007v^2 \text{ m/s}^2$$

donde la velocidad se expresa en metros por segundo. Determinar la velocidad del ciclista en función de la distancia si la velocidad es nula cuando $x = 0$. Determinar también la máxima velocidad que alcanza el ciclista.



Figura P13-29

13-30* Un disco de hockey sobre hielo se desliza sobre una película de agua horizontal animado de una aceleración directamente proporcional a su celeridad

$$a(v) = -0{,}50v \text{ m/s}^2 \qquad v > 0$$

donde la velocidad se expresa en metros por segundo. Si el disco lleva una velocidad de 15 m/s cuando $x = 0$, determinar su velocidad en función de la distancia y calcular su velocidad cuando $x = 20$ m.



Figura P13-30

13-31 Para el ciclista del problema 13-29, determinar la velocidad en función del tiempo y calcular cuánto tardará en alcanzar una velocidad de 30 km/h.

13-32* Para el disco de hockey del problema 13-30, determinar su velocidad y posición en función del tiempo. Calcular también lo que tarda en reducir su velocidad hasta 0,1 m/s y determinar su posición en este instante. (Tómese $t = 0$ cuando $x = 0$).

13-33* El carril de acceso a una autopista tiene una longitud de 360 m. Un automóvil inicia el acceso partiendo del reposo. Determinar la aceleración mínima que ha de llevar el auto para introducirse suavemente en el tráfico que circula a 90 km/h por la autopista.

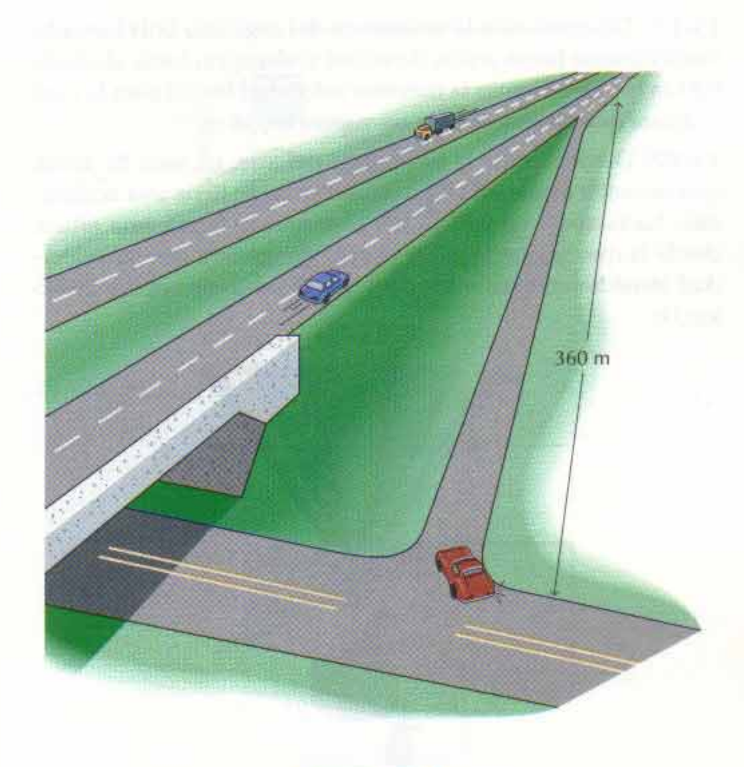


Figura P13-33

13-34 Un automóvil que va a 100 km/h sale de la autopista para entrar en una área de servicio. Determinar la mínima desaceleración que debe tener para disminuir su celeridad a 15 km/h al final de la rampa de salida que sólo tiene una longitud de 300 m.

13-35* Un automóvil tiene una aceleración constante máxima de 3 m/s² y una desaceleración constante máxima de 4,5 m/s². Determinar el mínimo tiempo que empleará en recorrer 1 km suponiendo que parte del reposo y termina también parado y que nunca supera el límite de celeridad (90 km/h).

13-36 Un pequeño automóvil eléctrico tiene una aceleración constante máxima de 1 m/s^2, una desaceleración constante máxima de 2 m/s^2 y una celeridad máxima de 80 km/h. Determinar el tiempo que tardará en recorrer un kilómetro partiendo del reposo y terminando también parado.



Figura P13-36

13-37 Despreciando la resistencia del aire, una bola lanzada verticalmente hacia arriba tiene una aceleración hacia abajo de 9,81 m/s^2. Determinar la máxima velocidad inicial para la cual la altura que alcance la bola no supere los 18 m.

13-38* Despreciando la resistencia del aire, un saco de arena que se suelte desde un globo de aire caliente tiene una aceleración hacia abajo de 9,81 m/s^2. Determinar la máxima altura desde la que se puede soltar el saco de manera que su velocidad inmediatamente antes de llegar al suelo no supere los 35 km/h.

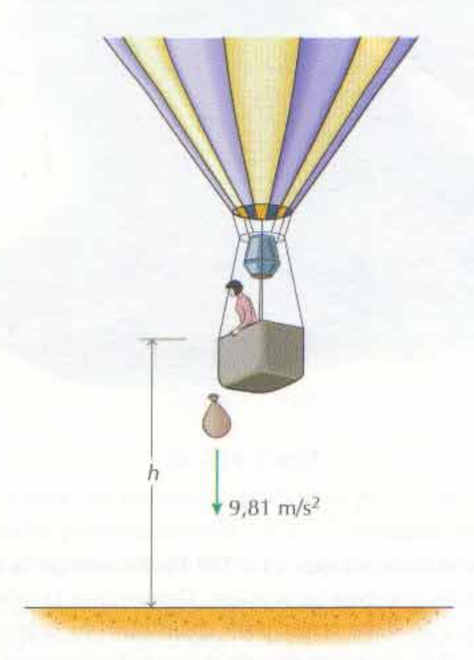


Figura P13-38

13-39 y 13-40 Dadas las gráficas de la posición en función del tiempo, construir las gráficas correspondientes de la velocidad en función del tiempo y de la aceleración en función del tiempo.

13-39

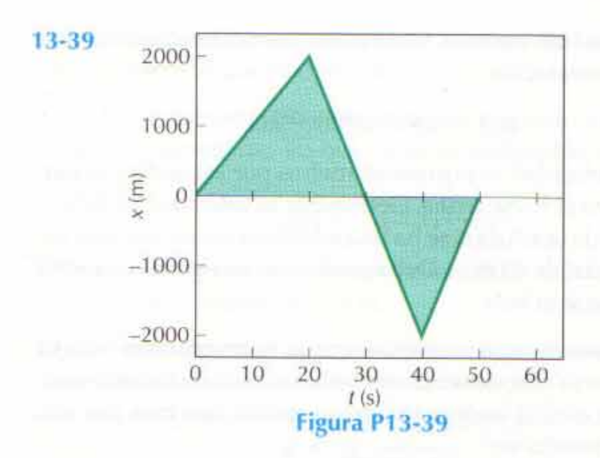


Figura P13-39

13-40

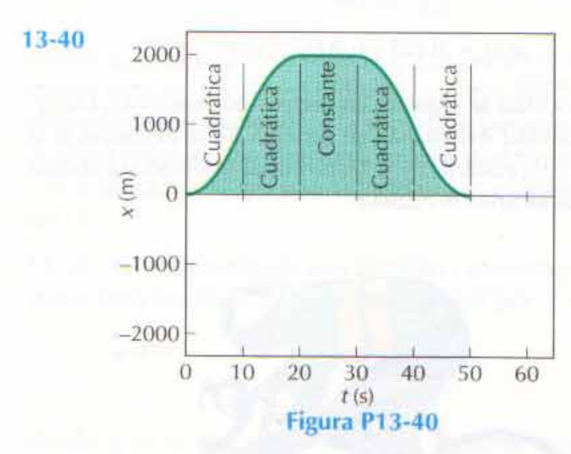


Figura P13-40

13-41 a 13-44 Dadas las gráficas de la velocidad en función del tiempo y las posiciones iniciales, construir las correspondientes gráficas de la posición en función del tiempo y de la aceleración en función del tiempo.

13-41 $x(0) = 0$ m

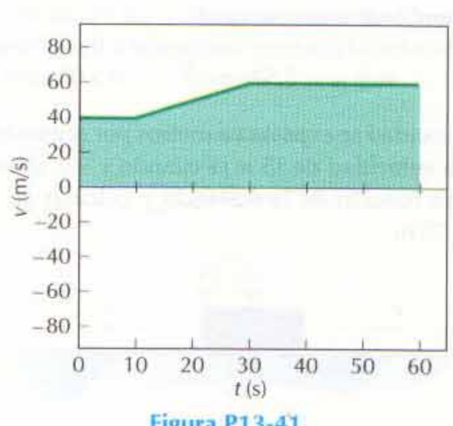


Figura P13-41

13-42 $x(0) = 0$ m

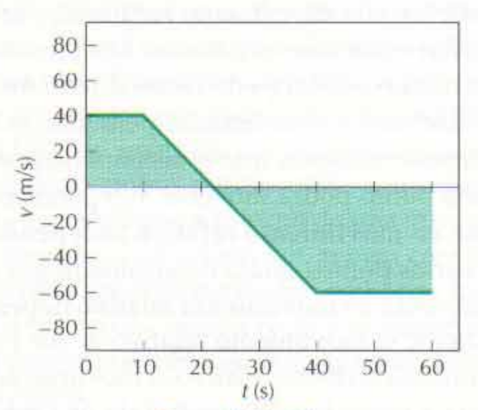
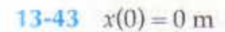


Figura P13-42



13-43 $x(0) = 0$ m

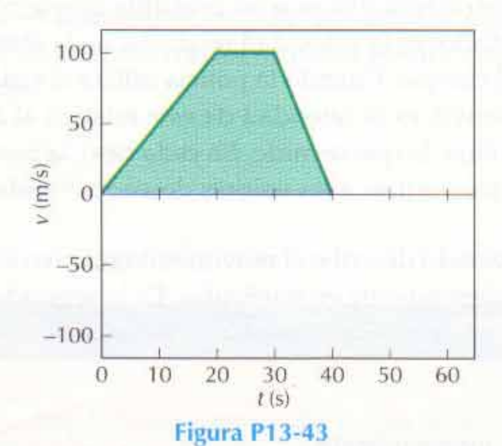


Figura P13-43

13-44* $x(0) = 0$ m

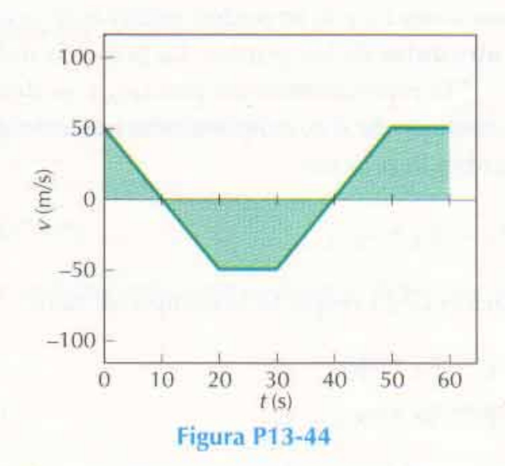


Figura P13-44

13-45 a 13-48 Dadas las gráficas de la aceleración en función del tiempo, las posiciones iniciales y las velocidades iniciales, construir las correspondientes gráficas de la posición en función del tiempo y de la velocidad en función del tiempo.

13-45* $x(0) = 0$ m; $v(0) = 0$ m/s

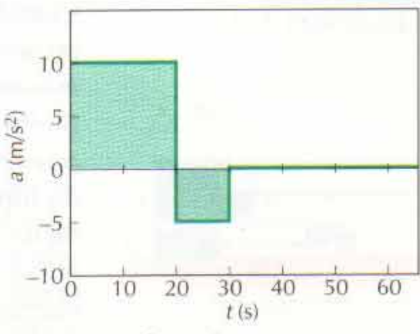


Figura P13-45

13-46 $x(0) = 0$ m; $v(0) = 0$ m/s

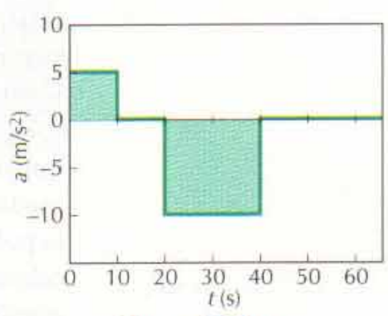


Figura P13-46

13-47 $x(0) = 0$ m; $v(0) = 25$ m/s

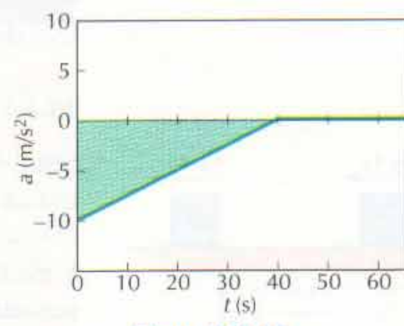


Figura P13-47

13-48 $x(0) = 0$ m; $v(20) = 20$ m/s

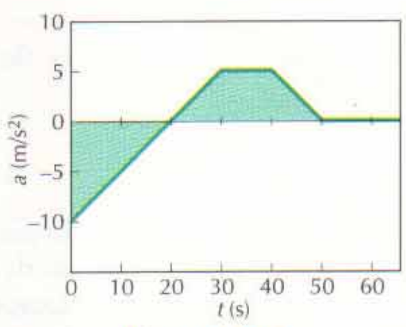


Figura P13-48

13.4 MOVIMIENTO RELATIVO A LO LARGO DE UNA RECTA

Cuando dos o más puntos se mueven con movimiento rectilíneo, para describir su movimiento podemos escribir ecuaciones separadas. Los puntos pueden moverse a lo largo de la misma recta o a lo largo de rectas diferentes. Si los n puntos están descritos por sus distintas n coordenadas pero sólo m de éstas pueden variarse independientemente, diremos que el sistema tiene m **grados de libertad** (GDL). Si $m = n$, cada punto podrá moverse independientemente de los demás y se dirá que están en **movimiento relativo independiente.** Si $m < n$, el movimiento de uno o varios puntos estará determinado por el movimiento de los demás y se dice que están en **movimiento relativo dependiente**.

Sea dependiente o independiente el movimiento relativo de los puntos, el movimiento de uno cualquiera puede escribirse relativo al movimiento de otro u otros. En ingeniería se presenta a menudo la necesidad de una descripción relativa del movimiento. Por ejemplo, en las aplicaciones a estructuras, la posición relativa de dos puntos y no su posición absoluta, es la que describe cuán severamente se deforma una estructura y si es o no probable que se rompa o colapse. En los choques de vehículos es la velocidad relativa y no la absoluta la que determina la gravedad del choque. Cuando la policía utiliza el radar para medir la celeridad de un automóvil, es la celeridad de éste relativa al auto de la policía y no la celeridad absoluta, la que se mide. En cada caso, la posición o celeridad observadas deberán convertirse a los valores deseados —relativos o absolutos.

La primera parte de este apartado describe el movimiento relativo en general y el movimiento relativo independiente en particular. En la segunda parte, los principios del movimiento relativo se aplican al caso del movimiento relativo dependiente.

13.4.1 Movimiento relativo independiente

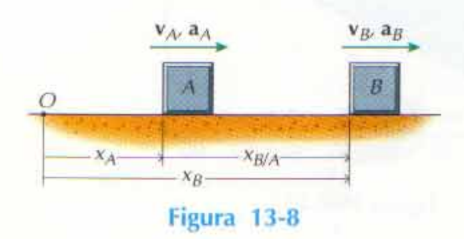


Figura 13-8

Sean A y B dos puntos que se mueven a lo largo de una misma recta, según se indica en la figura 13-8. Las posiciones x_A y x_B se miden relativas al origen fijo O y se denominan **posiciones absolutas** de los puntos. La posición del punto B medida desde el punto móvil A la representaremos por $x_{B/A}$ y se denomina **posición relativa** de B medida respecto de A o, simplemente, posición de B relativa a A. Estas posiciones guardan la relación

$$x_B = x_A + x_{B/A} \qquad (13\text{-}21)$$

(v. fig. 13-8). Derivando la ecuación 13-21 respecto al tiempo, se tiene

$$v_B = v_A + v_{B/A} \qquad (13\text{-}22)$$

$$a_B = a_A + a_{B/A} \qquad (13\text{-}23)$$

Es decir, la velocidad del punto B medida con relación al punto A es la diferencia de las velocidades absolutas (velocidades medidas respecto a un sistema de coordenadas fijo) de los puntos A y B. Análogamente, la aceleración del punto B medida con relación al punto A es la diferencia entre las aceleraciones absolutas de los puntos A y B.

13.4.2 Movimiento relativo dependiente

En muchos casos prácticos, dos puntos no pueden moverse independientemente, sino que el movimiento de uno depende, en cierto modo, del movimiento del otro. Una dependencia o ligadura corriente consiste en que los puntos estén unidos por una cuerda de longitud fija (fig. 13-9). En tal caso, la ecuación 13-21 se sustituye por otra ecuación que represente a la ligadura.

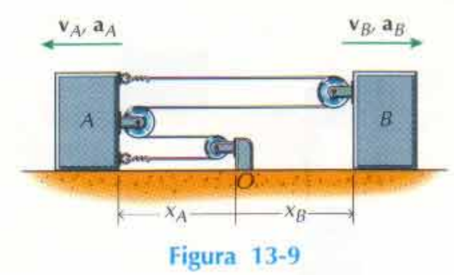


Figura 13-9

Aun cuando ambos puntos estén animados de movimiento rectilíneo, no tienen por qué moverse a lo largo de una misma recta. Ambos puntos deberán medirse respecto a un origen fijo, si bien conviene, a menudo, utilizar un origen diferente para cada punto. Sin embargo, incluso en el caso en que se muevan a lo largo de una misma recta y se midan respecto al mismo origen fijo, a menudo conviene establecer, por separado, el sentido positivo correspondiente a cada punto.

En estos casos se escribirá una ecuación de ligadura con las coordenadas de los puntos y para obtener la relación entre las velocidades y aceleraciones absolutas habrá que derivar dicha ecuación de ligadura. Hay que tener mucho cuidado en la interpretación de los sentidos positivos de velocidades y aceleraciones de acuerdo con los sentidos positivos que se hayan asignado a las coordenadas.

PROBLEMA EJEMPLO 13.4

Dos coches de carreras parten del reposo desde la misma posición. La aceleración del coche A es

$$a_A = 15e^{-t/10} \text{ m/s}^2$$

mientras que la del coche B es

$$a_B = 10e^{-t/20} \text{ m/s}^2$$

Determinar la distancia a la cual el coche B rebasa al A y su velocidad relativa en ese punto.

SOLUCIÓN

Integrando las aceleraciones dadas se tienen las velocidades de los coches

$$v_A = 150\,(1 - e^{-t/10}) \qquad \textbf{(a)}$$

$$v_B = 200\,(1 - e^{-t/20}) \qquad \textbf{(b)}$$

Volviendo a integrar se tienen las posiciones

$$x_A = 150\,[t + 10\,(e^{-t/10} - 1)\,] \qquad \textbf{(c)}$$

$$x_B = 200\,[t + 20\,(e^{-t/20} - 1)\,] \qquad \textbf{(d)}$$

El tiempo en el cual el coche B rebasa al A se obtiene igualando las ecuaciones c y d

$$150\,[t + 10\,(e^{-t/10} - 1)] = 200\,[t + 20\,(e^{-t/20} - 1)]$$

o sea

$$50t + 4000e^{-t/20} - 1500e^{-t/10} - 2500 = 0$$

Resolviendo esta ecuación (utilizando el método de Newton-Raphson; v. apéndice C) se tiene $t = 39{,}45$ s.

Aplicando este tiempo en las ecuaciones de las posiciones (ecs. c y d) se tiene la posición en la cual el coche B alcanza al A:

$$x_A = x_B = 4447 \text{ m} \cong 4450 \text{ m} \qquad \text{Resp.}$$

Las velocidades de los coches cuando B alcanza a A se hallan aplicando el valor del tiempo en las ecuaciones de las velocidades (ecs. a y b) lo cual da

$$v_A = 147{,}1 \text{ m/s} \qquad v_B = 172{,}2 \text{ m/s}$$

La velocidad relativa será pues

$$v_{B/A} = v_B - v_A = 25{,}1 \text{ m/s} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 13.5

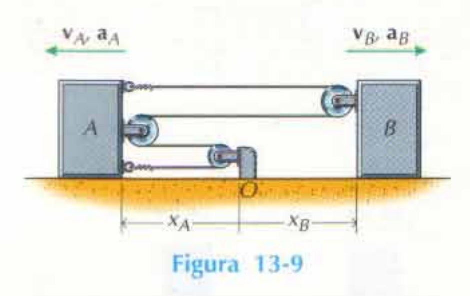


Figura 13-9

Si el cuerpo A de la figura 13-9 se mueve hacia la izquierda con una celeridad de 6 m/s, determinar la celeridad del cuerpo B. Además, si la celeridad del cuerpo A disminuye a razón de 1 m/s², determinar la aceleración del cuerpo B.

SOLUCIÓN

Las posiciones de los cuerpos están relacionadas por la longitud de la cuerda, que es constante

$$s = 4x_A + 2x_B + C \qquad (e)$$

donde C es una constante correspondiente a la longitud de cuerda que está en contacto con las gargantas de las poleas (que es constante) y las separaciones entre los centros de las poleas y los cuerpos (que también son constantes). Derivando la ecuación e respecto al tiempo, se tiene

$$0 = 4v_A + 2v_B$$

o sea

$$v_B = -2v_A$$

donde v_B será positiva dirigida hacia la derecha (el mismo sentido en que se ha medido x_B) y v_A será positiva dirigida hacia la izquierda (el mismo sentido en que se ha medido x_A). Por tanto,

$$v_B = -12 \text{ m/s} = 12 \text{ m/s} \leftarrow \qquad \text{Resp.}$$

Derivando la ecuación e una vez más se tiene

$$a_B = -2a_A = -2\,(-1) = 2 \text{ m/s}^2 \rightarrow \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 13.6

Si el cuerpo A de la figura 13-10 se mueve hacia la izquierda con una celeridad de 4 m/s, determinar el movimiento del cuerpo B.

SOLUCIÓN

Midiendo las posiciones de los cuerpos a partir del centro de la polea superior, según se indica, la longitud de la cuerda es

$$s = x_A + 2x_B + c \qquad (f)$$

Derivando respecto al tiempo la ecuación f se tiene

$$0 = v_A + 2v_B$$

o sea

$$v_B = -\frac{1}{2}v_A$$

Por tanto

$$v_B = -2 \text{ m/s} = 2 \text{ m/s} \uparrow \qquad \text{Resp.}$$

(Obsérvese que los cuerpos no tienen por qué moverse a lo largo de una misma recta en tanto que se muevan con movimiento rectilíneo a lo largo de rectas y la ligadura pueda expresarse en función de sus posiciones a lo largo de dichas rectas.)

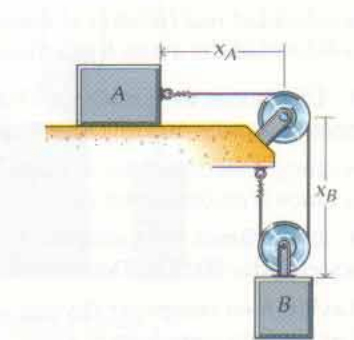


Figura 13-10

PROBLEMAS

13-49* El tren A se mueve hacia el este a 126 km/h mientras que el tren B lo hace hacia el oeste a 96 km/h. Determinar:

a. La velocidad del tren A relativa al tren B.
b. La velocidad del tren B relativa al tren A.

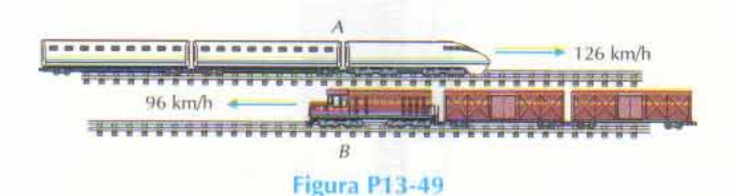


Figura P13-49

13-50* La embarcación A navega aguas abajo por un río a 20 m/s, mientras que la embarcación B lo hace aguas arriba a 15 m/s. Determinar:

a. La velocidad de A relativa a B.
b. La velocidad de B relativa a A.

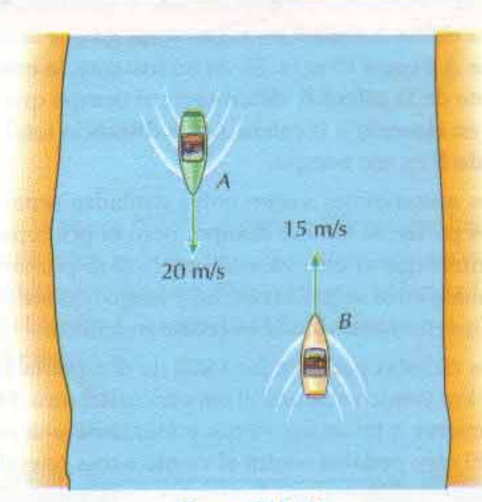


Figura P13-50

13-51 El agua de un río recto se mueve a 8 km/h. Una canoa A navega aguas abajo con una velocidad relativa a la corriente de 50 km/h, mientras que una canoa B navega aguas arriba con una velocidad relativa a la corriente de 50 km/h. Determinar:

a. La velocidad de la canoa A relativa a un observador en reposo en la orilla.
b. La velocidad de la canoa B relativa a la canoa A.

13-52* Un viento sopla de oeste a este a 50 m/s. Un avión *A* vuela de oeste a este a una velocidad en el aire indicada (relativa al viento) de 150 m/s. Un avión *B* vuela de este a oeste a una velocidad en el aire indicada de 150 m/s. Determinar:

a. La velocidad real (relativa al suelo) del avión *B*.
b. La velocidad del avión *B* relativa al avión *A*.

13-53 Las canoas del problema 13-51 navegan entre dos poblaciones separadas 50 km. Determinar cuánto tardará:

a. La canoa *A* en completar el viaje.
b. La canoa *B* en completar el viaje.

13-54 Los aviones del problema 13-52 vuelan entre dos ciudades separadas 800 km. Determinar cuánto tardará:

a. El avión *A* en completar el viaje.
b. El avión *B* en completar el viaje.

13-55* Las canoas del problema 13-53 parten ambas de sus respectivas poblaciones a las 12:00 del mediodía. Determinar cuándo y dónde se cruzarán.

13-56 Los aviones del problema 13-54 parten ambos de sus respectivos aeropuertos a las 8:00 de la mañana. Determinar cuándo y dónde se cruzarán.

13-57* Una barcaza rompe sus amarras y flota aguas abajo por un río cuya corriente es de 3 m/s. Un remolcador la persigue con una celeridad de 4,5 m/s relativa a la corriente. Si el remolcador parte a una distancia de 450 m detrás de la barcaza, determinar el tiempo que tardará en alcanzarla y la distancia total que en ese tiempo habrá recorrido el remolcador.

13-58* Dos esferas caen en agua en reposo con celeridades constantes inversamente proporcionales a sus diámetros respectivos. La esfera *A* cae a 5 m/s. La esfera *B* tiene la mitad de tamaño que *A* y cae a 10 m/s. Si, en un instante, la esfera *A* va 20 m delante de la esfera *B*, determinar el tiempo que tardará la esfera *B* en alcanzar a la esfera *A* y la distancia total que habrá recorrido *B* en ese tiempo.

13-59 Dos automóviles viajan entre ciudades separadas 80 km. Ambos parten al mismo tiempo, pero el primero va a 80 km/h mientras que el otro va a 48 km/h. Si el primero se detiene 5 minutos en la segunda ciudad y luego regresa (también a 80 km/h), determinar dónde se cruzarán ambos.

13-60* Dos ciclistas parten a las 13:00 de dos poblaciones separadas 20 km yendo cada uno al encuentro del otro. El primer ciclista se mueve a favor del viento y mantiene una celeridad de 7 m/s. El otro pedalea contra el viento a una celeridad de 5 m/s y se detiene a descansar 5 minutos cada 4 km. ¿Dónde y cuándo se encontrarán?

13-61 Dos automóviles están separados 18 m moviéndose a 80 km/h en la misma dirección y sentido cuando, de pronto, el que va delante comienza a frenar a razón de 3,6 m/s^2. Un segundo después, el conductor del otro auto empieza a frenar a razón de 4,5 m/s^2. Determinar qué separación habrá entre ambos cuando estén ambos parados.

13-62 Dos automóviles van en la misma dirección y sentido a 80 km/h cuando el auto *A* (el que va delante) empieza a frenar a razón de 4 m/s^2. Si el tiempo de reacción del conductor del auto *B* es de 1 s y éste frena también a 4 m/s^2, determinar su distancia de seguridad (distancia entre ambos coches tal que el *B* se detenga antes de chocar con *A*).

13-63* Una moto está detenida en el arcén de una carretera cuando pasa un automóvil a 80 km/h. Veinte segundos más tarde, parte la moto en persecución del auto. Supóngase que la moto acelera a razón de 2,4 m/s^2 hasta alcanzar los 96 km/h y luego sigue con celeridad constante. Hallar cuánto tiempo tardará la moto en alcanzar al auto y la distancia total que habrá recorrido la moto en ese tiempo.

13-64 Dos aviones de combate vuelan en la misma dirección y sentido a 1100 km/h y están separados 3 km cuando el avión perseguidor dispara un misil contra el avión perseguido. Determinar:

a. La aceleración constante que debe tener el misil para alcanzar al otro avión en 5 s.
b. La velocidad relativa del misil respecto al avión alcanzado en el instante del impacto.

13-65* Un vagón de ferrocarril se ha desprendido en un apartadero y rueda con una celeridad constante de 13 km/h. Se manda a recogerlo una máquina que tiene una aceleración máxima de 0,9 m/s^2, una desaceleración máxima de 1,5 m/s^2 y una celeridad máxima de 72 km/h. Determinar el mínimo recorrido necesario para alcanzar al vagón desprendido. (Supóngase que la máquina parte del reposo cuando el vagón está en la misma vía a 150 m y que la velocidad relativa al producirse el alcance ha de ser inferior a 4,8 km/h.)

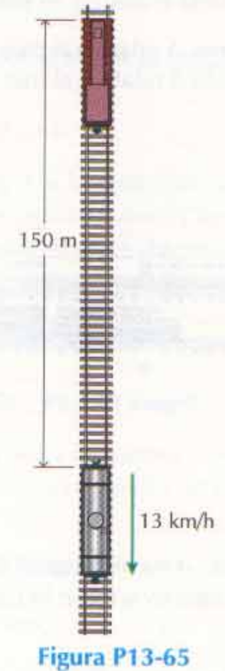


Figura P13-65

13-66* En la figura P13-66, el bloque A se mueve hacia la izquierda con una celeridad de 1 m/s, disminuyendo a razón de 0,5 m/s^2 y el bloque C está fijo. Determinar la velocidad y la aceleración del bloque B, la velocidad de B relativa a A y la aceleración de B relativa a A.

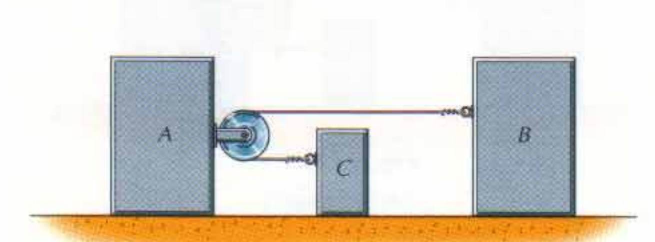


Figura P13-66

13-67 En la figura P13-67, el ascensor E baja con una celeridad de 1 m/s, aumentando a razón de 0,1 m/s^2. Determinar la velocidad y aceleración del contrapeso C, la velocidad de C relativa a E y la aceleración de C relativa a E.

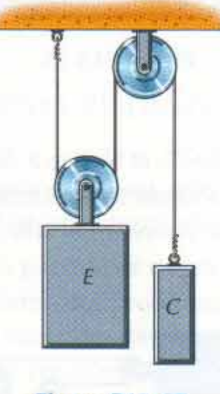


Figura P13-67

13-68* En la figura P13-68, el ascensor E sube con una celeridad de 2 m/s, la cual disminuye a razón de 0,2 m/s^2. Determinar la velocidad y la aceleración del contrapeso C, la velocidad de C relativa a E y la aceleración de C relativa a E.

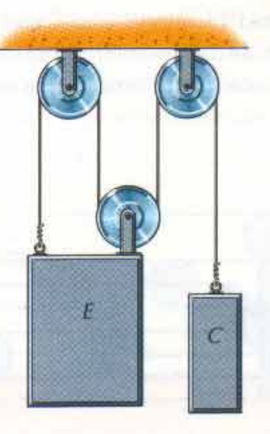


Figura P13-68

13-69 En la figura P13-69, el bloque B se mueve hacia la derecha con una celeridad de 3 m/s, la cual disminuye a razón de 0,3 m/s^2 y el bloque C está fijo. Determinar la velocidad y la aceleración del bloque A, la velocidad de A relativa a B y la aceleración de A relativa a B.

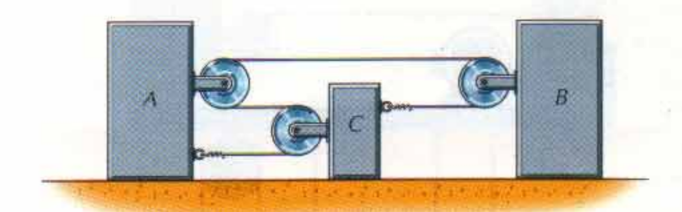


Figura P13-69

13-70 En la figura P13-70, el bloque B se mueve hacia la derecha con una celeridad de 2 m/s, la cual aumenta a razón de 0,3 m/s^2 y el bloque C está fijo. Determinar la velocidad y la aceleración del bloque A, la velocidad de B relativa a A y la aceleración de B relativa a A.

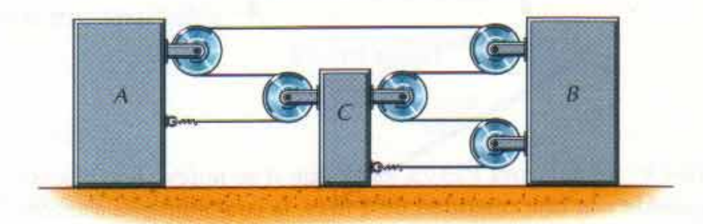


Figura P13-70

13-71* En la figura P13-71, el torno T está devanando cable a la razón constante de 1,5 m/s. Si el bloque sobre el que está montado el torno está fijo, determinar la velocidad del bloque A.

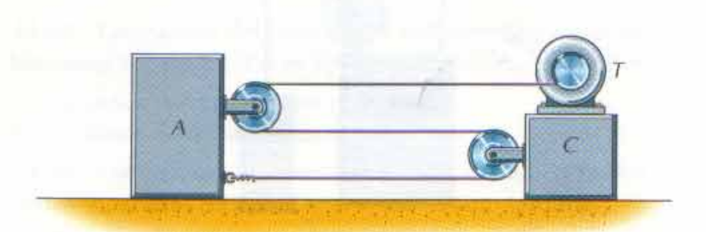


Figura P13-71

13-72 En la figura P13-72, el torno T está devanando cable a la razón constante de 2 m/s. Determinar la velocidad del contrapeso C relativa al ascensor.

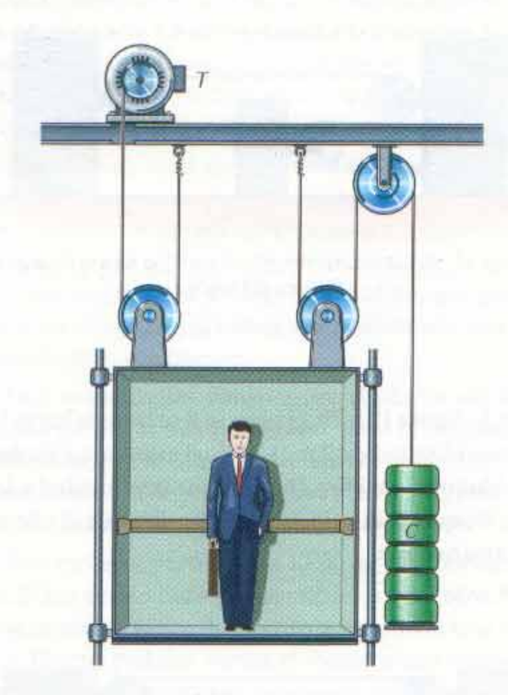


Figura P13-72

13-73* En la figura P13-73, el bloque A se mueve hacia la izquierda con una celeridad de 1 m/s, la cual aumenta a razón de 0,2 m/s^2. Determinar la velocidad y la aceleración del bloque B.

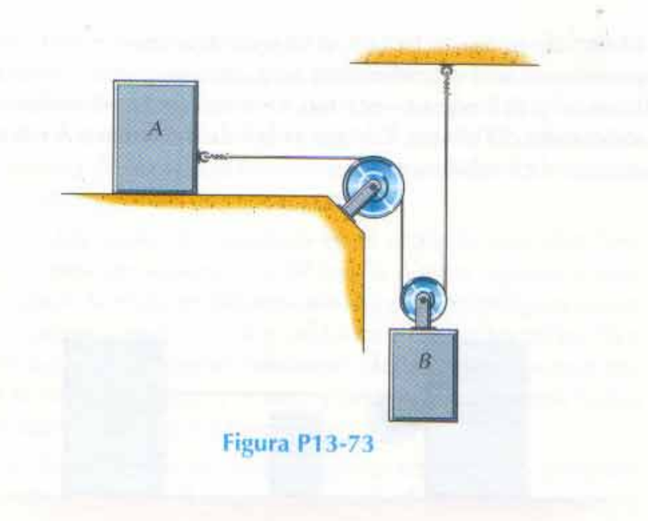


Figura P13-73

13-74* En la figura P13-74, el bloque A se mueve hacia la derecha con una celeridad de 5 m/s, la cual disminuye a razón de 0,2 m/s^2. Determinar la velocidad y la aceleración del bloque B.

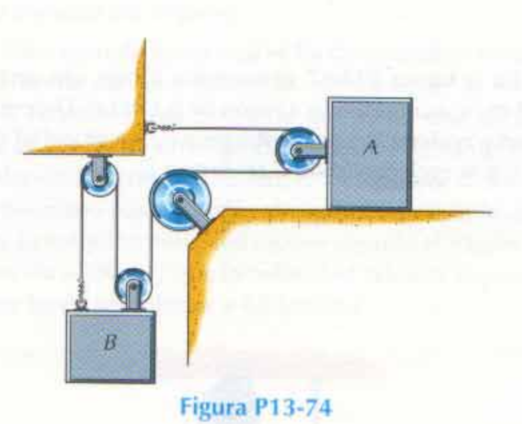


Figura P13-74

13-75 En la figura P13-75, el bloque B desciende con una celeridad de 1,5 m/s, la cual disminuye a razón de 6 cm/s^2. Determinar la velocidad y la aceleración del bloque A.

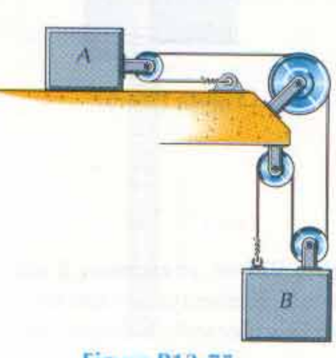


Figura P13-75

13-76* Repítase el problema 13-66 para el caso en que el bloque C se mueva hacia la derecha con una celeridad de 2 m/s, disminuyendo a razón de 0,2 m/s^2. Determinar también la velocidad de B relativa a C y la aceleración de B relativa a C.

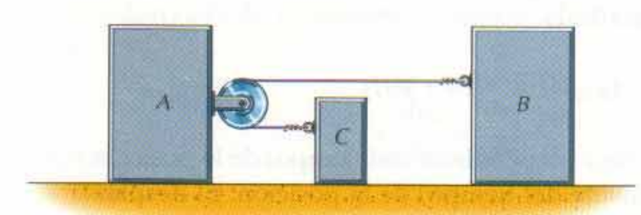


Figura P13-66

13-77 Repítase el problema 13-69 para el caso en que el bloque C se mueva hacia la derecha con una celeridad de 0,6 m/s, aumentando a razón de 15 cm/s^2. Determinar también la velocidad de A relativa a C y la aceleración de A relativa a C.

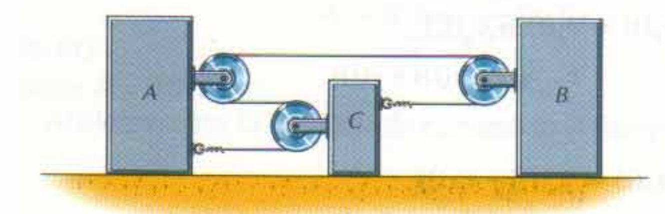


Figura P13-69

13-78 Repítase el problema 13-70 para el caso en que el bloque C se mueva hacia la izquierda con una celeridad de 1 m/s, la cual aumenta a razón de 0,5 m/s^2. Determinar también la velocidad de B relativa a C y la aceleración de B relativa a C.

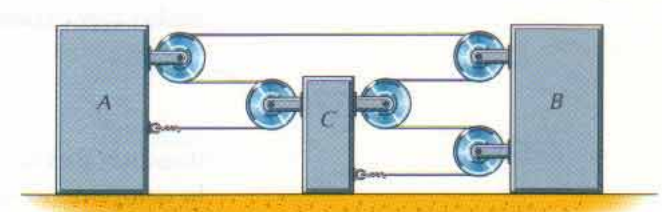


Figura P13-70

13-79* Repítase el problema 13-71 para el caso en que el bloque C se mueva hacla la izquierda con una celeridad de 0,3 m/s, la cual aumente a razón de 15 cm/s^2. Determinar también la velocidad de A relativa a C y la aceleración de A relativa a C.

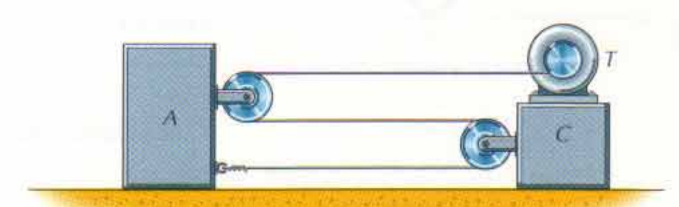


Figura P13-71

13.5 MOVIMIENTO CURVILÍNEO PLANO

Cuando el movimiento tiene lugar en un solo plano, se necesitarán dos coordenadas para describir el movimiento. La elección de las coordenadas a utilizar en un problema particular dependerá de la geometría de éste, de la forma en que se den los datos del problema y del tipo de solución que se desee. Tres de los sistemas de coordenadas utilizados corrientemente para representar el movimiento son las coordenadas cartesianas rectangulares, las coordenadas polares y las coordenadas normal/tangencial. En los próximos tres apartados procederemos a su estudio.

13.5.1 Coordenadas rectangulares

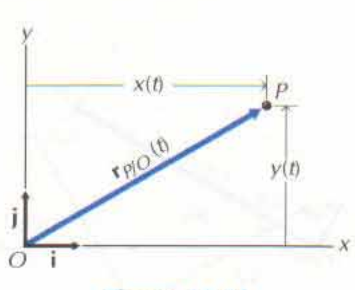


Figura 13-11

En un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares (en un plano), la posición de un punto se describe dando su distancia a dos rectas ortogonales fijas (fig. 13-11). A estas dos rectas se les da el nombre de ejes x e y y las coordenadas

se denominan componentes x e y de la posición. Los vectores unitarios asociados a los ejes x e y se representan por $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, respectivamente. Aun cuando las direcciones de los ejes de coordenadas ($\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$) no tienen por qué ser horizontal y vertical, una vez elegidos deben mantenerse fijos.

La posición de un punto P respecto al origen O del sistema fijo de coordenadas viene dada por (fig. 13-11)

$$\mathbf{r}_{P/O}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \tag{13-24}$$

donde $x(t)$ es la componente x (dependiente del tiempo) de la posición e $y(t)$ es la componente y (dependiente del tiempo) de la posición. El desplazamiento del punto entre los instantes t_1 y $t_2 > t_1$ es (fig. 13-12)

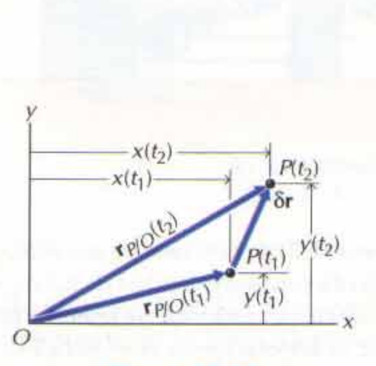


Figura 13-12

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{r} &= \mathbf{r}_{P/O}(t_2) - \mathbf{r}_{P/O}(t_1)\\ &= [x(t_2) - x(t_1)]\,\mathbf{i} + [y(t_2) - y(t_1)]\,\mathbf{j}\end{aligned}$$

Como las direcciones y sentidos, así como el módulo de los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ son constantes, sus derivadas serán nulas. Por tanto, la velocidad y la aceleración del punto serán

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_P(t) &= v_x(t)\mathbf{i} + v_y(t)\mathbf{j}\\ &= \dot{\mathbf{r}}_{P/O}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j}\end{aligned} \tag{13-25}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_P(t) &= a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j}\\ &= \dot{\mathbf{v}}(t) = \dot{v}_x(t)\mathbf{i} + \dot{v}_y(t)\mathbf{j}\\ &= \ddot{\mathbf{x}}(t) = \ddot{x}(t)\mathbf{i} + \ddot{y}(t)\mathbf{j}\end{aligned} \tag{13-26}$$

respectivamente.

El sistema de coordenadas cartesianas rectangulares suele ser el más conveniente cuando se dan las componentes x e y del movimiento por separado, cuando no dependa una de otra o ambas cosas a la vez. Como ejemplos, podemos citar los movimientos representados gráficamente sobre mapas cuadriculados (donde x puede ser la longitud e y la latitud del punto) y el movimiento a lo largo de una trayectoria (donde x puede ser la distancia medida a lo largo del suelo e y puede ser la altura sobre el suelo).

13.5.2 Coordenadas polares (coordenadas radial y transversa)

En un sistema de coordenadas polares, la posición de un punto se describe dando su distancia a un punto fijo y su desplazamiento angular relativo a una recta fija (fig. 13-13). Los sentidos de las direcciones coordenadas ($\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$) se toman radialmente en el sentido de alejamiento del punto fijo y perpendicularmente a la recta radial en el sentido de los ángulos θ crecientes.

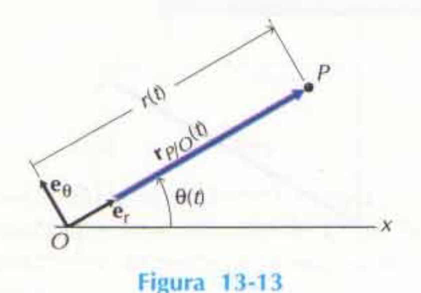


Figura 13-13

En coordenadas polares, la posición del punto P respecto al origen O viene dada por (fig. 13-13)

$$\mathbf{r}_{P/O}(t) = r(t)\mathbf{e}_r \tag{13-27}$$

donde $r(t)$ es la componente r (dependiente del tiempo) de la posición. El cómo depende de $\theta(t)$ el vector de posición está oculto en el vector unitario $\mathbf{e}_r$, el cual depende de θ (que, a su vez, puede depender del tiempo).

Como las direcciones de los vectores unitarios $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ no son necesariamente fijas, habrá que considerar sus variaciones al derivar el vector de posición (ec. 13-27). La derivada de $\mathbf{e}_r$ respecto al tiempo se calcula utilizando la regla de la cadena

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \tag{13-28a}$$

donde

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\mathbf{e}_r(\theta+\Delta\theta)-\mathbf{e}_r(\theta)}{\Delta\theta} \tag{13-28b}$$

Pero en el límite cuando $\Delta\theta \to 0$, la distancia $|\mathbf{e}_r(\theta+\Delta\theta)-\mathbf{e}_r(\theta)|$ tiende a la longitud del arco a lo largo de una circunferencia de radio unidad $\Delta s = 1\,\Delta\theta$ y el ángulo α tiende a 90° (fig. 13-14). Por tanto, el vector $\mathbf{e}_r(\theta+\Delta\theta)-\mathbf{e}_r(\theta)$ tiene por módulo $\Delta\theta$ y está dirigido en la dirección y sentido de $\mathbf{e}_\theta$ y

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\theta\mathbf{e}_\theta}{\Delta\theta} = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \tag{13-28c}$$

donde $\dot{\theta} = d\theta/dt$.

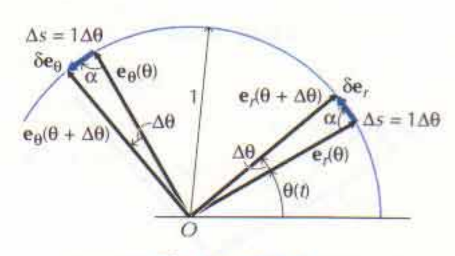


Figura 13-14

Análogamente, la derivada de $\mathbf{e}_\theta$ respecto al tiempo se puede calcular así:

$$\dot{\mathbf{e}}_\theta = \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \tag{13-29a}$$

donde

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\mathbf{e}_\theta(\theta+\Delta\theta)-\mathbf{e}_\theta(\theta)}{\Delta\theta} \tag{13-29b}$$

Pero en el límite cuando $\Delta\theta \to 0$, la distancia $|\mathbf{e}_\theta(\theta+\Delta\theta)-\mathbf{e}_\theta(\theta)|$ también tiende a la longitud del arco a lo largo de una circunferencia de radio unidad $\Delta s = 1\,\Delta\theta$ y el ángulo α tiende de nuevo a 90° (fig. 13-14). Por tanto, el vector $\mathbf{e}_\theta(\theta+\Delta\theta)-\mathbf{e}_\theta(\theta)$ tiene por módulo $\Delta\theta$ y está dirigido en la dirección de $\mathbf{e}_r$ y en sentido opuesto y es

$$\dot{\mathbf{e}}_\theta = \dot{\theta}\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{-\Delta\theta\mathbf{e}_r}{\Delta\theta} = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r \tag{13-29c}$$

Otra manera de calcular las derivadas de $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ respecto a θ, que el estudiante puede encontrar más fácil de comprender y recordar, consiste en escribir $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ en función de sus componentes cartesianas rectangulares y luego derivar. Con referencia a la figura 13-15,

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} \tag{13-30a}$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j} \tag{13-30b}$$

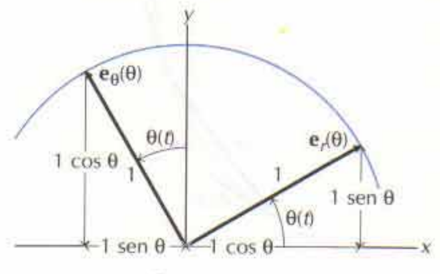


Figura 13-15

Las derivadas son entonces

$$de_r/d\theta = -\text{sen } \theta \, \mathbf{i} + \cos \theta \, \mathbf{j} = \mathbf{e}_\theta \tag{13-30c}$$

$$d\mathbf{e}_\theta/d\theta = -\cos \theta \, \mathbf{i} - \text{sen } \theta \, \mathbf{j} = -\mathbf{e}_r \tag{13-30d}$$

que es lo mismo que antes.

Podemos ahora cálcular la velocidad del punto

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P(t) &= v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta = \dot{\mathbf{r}}_{P/O}(t) \\ &= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \end{aligned} \tag{13-31}$$

Por último, calcularemos la aceleración

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P(t) &= a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta = \dot{\mathbf{v}}_P(t) \\ &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta \\ &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\,(\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta - r\dot{\theta}\,(\dot{\theta}\mathbf{e}_r) \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta \end{aligned} \tag{13-32}$$

En el caso particular de un punto animado de movimiento circular, r = constante, las ecuaciones 13-31 y 13-32 se reducen a

$$\mathbf{v}_P(t) = r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \tag{13-33}$$

$$\mathbf{a}_P(t) = -r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta \tag{13-34}$$

El sistema de coordenadas polares suele ser el más conveniente cuando la posición del punto se mide respecto a un punto fijo (comó en el caso del seguimiento de un avión por radar) o cuando el punto esté fijo en un brazo giratorio o moviéndose a lo largo de él.

13.5.3 Coordenadas normal y tangencial

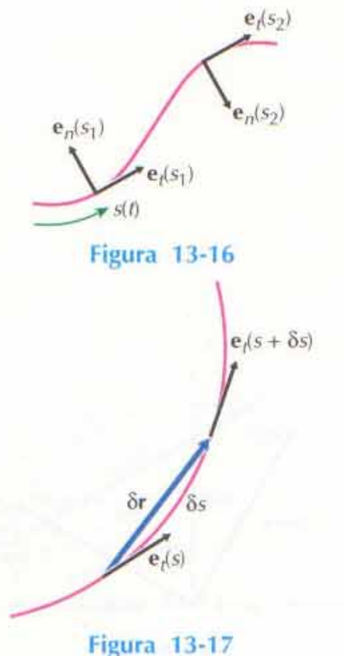


Figura 13-16

Figura 13-17

En algunos problemas, el movimiento se especifica dando el camino que sigue el punto móvil y la celeridad de éste en cada punto de dicho camino. En cada punto del camino se toman coordenadas con vectores unitarios $\mathbf{e}_t$ tangente al camino y dirigido en el sentido del movimiento y $\mathbf{e}_n$ normal al camino y dirigido hacia el centro de curvatura (fig. 13-16).

La velocidad del punto tiene la dirección y sentido de $\mathbf{e}_t$ y por módulo la longitud de camino por unidad de tiempo. Para ver esto, dibujemos la posición del punto en dos instantes (fig. 13-17). Si δt es pequeño, el módulo del desplazamiento será prácticamente igual a la longitud δs recorrida a lo largo de la curva y la dirección del desplazamiento tiende a la del vector unitario tangente $\mathbf{e}_t$. La velocidad será entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \mathbf{r}(t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta s(t)}{\delta t}\mathbf{e}_t \\ &= \dot{s}\mathbf{e}_t = v\mathbf{e}_t \end{aligned} \tag{13-35}$$

donde $v = \dot{s}$ es el módulo de la velocidad y la dirección del vector unitario tangente $\mathbf{e}_t$ varía con la posición (la cual varía con el tiempo).

Como la dirección del vector unitario $\mathbf{e}_t$ no es constante, habrá que considerar su variación al derivar la velocidad para hallar la aceleración. Utilizando la regla de la cadena, la derivada de $\mathbf{e}_t$ respecto al tiempo será

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_t}{ds}\frac{ds}{dt} \tag{13-36a}$$

Calculemos la derivada respecto a s del vector unitario tangente $\mathbf{e}_t$. Sea s la posición del punto en el instante t y sea $s + \Delta s$ su posición en el instante $t + \Delta t$ (fig. 13-18). Tracemos una circunferencia centrada en la intersección de $\mathbf{e}_n(s)$ con $\mathbf{e}_n(s + \Delta s)$ y que pase por los puntos s y $s + \Delta s$. En la figura 13-19 puede verse la relación entre los vectores unitarios tangente y normal en s y en $s + \Delta s$. Entonces

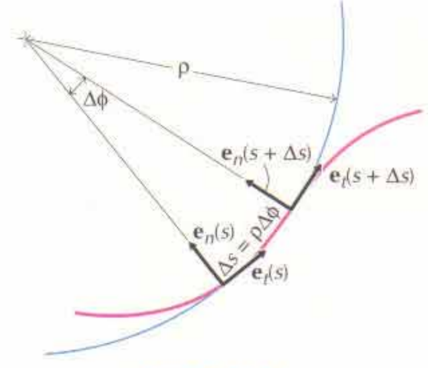


Figura 13-18

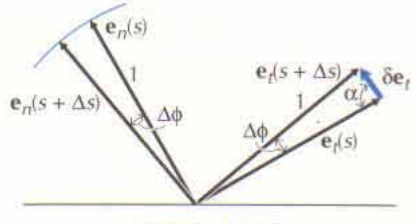


Figura 13-19

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathbf{e}_t(s + \Delta s) - \mathbf{e}_t(s)}{\Delta s} \tag{13-36b}$$

Pero en el límite, cuando $\Delta s \to 0$, la distancia $|\mathbf{e}_t(s + \Delta s) - \mathbf{e}_t(s)|$ tiende a la longitud del arco a lo largo de la circunferencia de radio unidad $1\,\Delta\phi$ y el ángulo α tiende a 90°. Por tanto, el vector $\mathbf{e}_t(s + \Delta s) - \mathbf{e}_t(s)$ tiene por módulo $\Delta\phi$ y está dirigido en la dirección y sentido de $\mathbf{e}_n$, siendo

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s}\mathbf{e}_n(s) \tag{13-36c}$$

Pero, según la figura 13-18, $\Delta s = \rho\Delta\phi$ por lo que finalmente

$$\dot{\mathbf{e}}_t = \dot{s} \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{\rho\Delta s}\mathbf{e}_n(s) = \frac{\dot{s}}{\rho}\,\mathbf{e}_n(s) \tag{13-36d}$$

donde

$$\dot{s} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\rho\Delta\phi}{\Delta t} = \rho\dot{\phi} \tag{13-36e}$$

Así pues, la aceleración de un punto, en función de sus coordenadas normal y tangencial, viene dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= a_t\mathbf{e}_t + a_n\mathbf{e}_n = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{s}\mathbf{e}_t + \dot{s}\dot{\mathbf{e}}_t \\ &= \ddot{s}\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\mathbf{e}_n \end{aligned} \tag{13-37}$$

En el caso particular de un punto en movimiento circular, $\rho = r =$ constante, $\mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_n$ (ya que $\mathbf{e}_r$ está dirigido en el sentido de alejamiento del centro de la circunferencia y $\mathbf{e}_n$ lo está hacia el centro de curvatura) y $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_\theta$. Entonces

$$\mathbf{v}(t) = v_t\mathbf{e}_t = r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \tag{13-38}$$

y

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{s}\mathbf{e}_\theta + \frac{\dot{s}^2}{\rho}(-\mathbf{e}_r) = r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - \frac{(r\dot{\theta})^2}{r}\mathbf{e}_r$$
$$= -r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta \qquad (13\text{-}39)$$

Pero las ecuaciones 13-38 y 13-39 son las mismas que las 13-33 y 13-34, deducidas para la velocidad y la aceleración en coordenadas polares para el caso en que r fuese constante.

Las coordenadas normal y tangencial son las más convenientes cuando el punto se mueve sobre una superficie de forma conocida. En tal caso, se precisa conocer la aceleración normal para determinar la fuerza de contacto entre el punto y la superficie. Cuando la fuerza de contacto se hace negativa, como en el diseño de las montañas rusas, habrá que utilizar vías especiales que obliguen al vehículo a seguir la curva. Además, la fuerza normal de contacto debe a menudo conocerse para calcular la fuerza tangencial (rozamiento) y con ello determinar la aceleración tangencial y la velocidad.

13.5.4 Resumen de ecuaciones

Resumimos a continuación las principales ecuaciones del movimiento curvilíneo plano:

Coordenadas rectangulares

$$\mathbf{r}_{P/O}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{v}_P(t) = \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j}$$
$$= v_x(t)\mathbf{i} + v_y(t)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a}_P(t) = \ddot{x}(t)\mathbf{i} + \ddot{y}(t)\mathbf{j}$$
$$= \dot{v}_x(t)i + \dot{v}_y(t)\mathbf{j}$$
$$= a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j}$$

Coordenadas polares

$$\mathbf{r}_{P/O}(t) = r(t)\mathbf{e}_r$$
$$\mathbf{v}_P(t) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$
$$= v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta$$
$$\mathbf{a}_P(t) = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_r + (r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta$$
$$= a_r\mathbf{e}_r + a_\theta\mathbf{e}_\theta$$

Coordenadas normal y tangencial

$$\mathbf{v}_P(t) = \dot{s}(t)\mathbf{e}_t = v_t\mathbf{e}_t$$
$$\mathbf{a}_P(t) = \ddot{s}\,\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\mathbf{e}_n$$
$$= a_t\mathbf{e}_t + a_n\mathbf{e}_n$$

PROBLEMA EJEMPLO 13.7

Si se desprecia la resistencia del aire, una bala disparada en la atmósfera tiene una aceleración vertical y hacia abajo de 9,81 m / s^2. Si la bala lleva una velocidad inicial de 225 m / s en una dirección que forme 30° con la horizontal y en sentido ascendente, determinar:

a. La altura máxima que alcanza la bala.
b. El alcance de la bala (es decir, dónde incide sobre el suelo).

SOLUCIÓN

a. Tómense coordenadas cartesianas rectangulares cuyo eje x sea horizontal (y su sentido positivo sea el del movimiento) y cuyo eje y sea vertical (y su sentido positivo sea hacia arriba). En tal caso, la aceleración de la bala se podrá escribir en la forma

$$\mathbf{a}(t) = -9{,}81\mathbf{j}\ \text{m/s}^2 = \dot{v}_x(t)\mathbf{i} + \dot{v}_y(t)\mathbf{j}$$

Las componentes x e y de esta ecuación son independientes una de otra y se podrán integrar por separado, dando

$$v_x(t) = C_1$$
$$vy(t) = -9{,}81t + C_2$$

Utilizando la condición inicial de que en $t = 0$, la velocidad es

$$\mathbf{v}_0 = 225\cos 30°\mathbf{i} + 225\ \text{sen}\ 30°\mathbf{j}\ \text{m/s}$$
$$= 194{,}86\mathbf{i} + 112{,}50\mathbf{j}\ \text{m/s}^2$$

se tiene

$$C_1 = 194{,}86\ \text{m/s} \qquad \text{y} \qquad C_2 = 112{,}50\ \text{m/s}$$

Entonces, integrando la velocidad

$$\mathbf{v}(t) = 194{,}86\mathbf{i} + (112{,}50 - 9{,}81t)\,\mathbf{j}\ \text{m/s}$$
$$= \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j}$$

se tiene

$$x(t) = 194{,}86t\ \text{m}$$
$$y(t) = (12{,}50 - 4{,}905t^2)\ \text{m}$$

en donde las constantes de integración son nulas porque inicialmente son nulas x e y.

La altura máxima se obtiene cuando la componente y de la velocidad pasa de positiva (hacia arriba) a negativa (hacia abajo). Ello sucede cuando

$$v_y(t) = 112{,}50 - 9{,}81t = 0$$

o sea en el instante $t = 11{,}48$ s. La altura en ese instante es

$$y(11{,}48) = y_{\text{máx}} = 645\ \text{m} \qquad \text{Resp.}$$

b. Para hallar el tiempo en el que la bala llega de nuevo al suelo, se hace la altura igual a cero

$$y(t) = 112{,}50t - 4{,}905t^2 = 0$$

lo cual da o bien $t = 0$ s o bien $t = 22{,}94$ s. La solución $t = 0$ corresponde a la posición inicial mientras que la solución $t = 22{,}94$ s corresponde a que la bala vuelve a caer al suelo. En este instante, la posición x de la bala es

$$x(22{,}94) = x_{\text{alcance}} = 4469 \text{ m} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 13.8

Despreciando la resistencia del aire, una granada disparada tiene una aceleración vertical hacia abajo g. Si la velocidad inicial tenía una celeridad v_0 y formaba un ángulo θ por encima de la horizontal, determinar el ángulo θ_r que dará el máximo alcance.

SOLUCIÓN

Tómense coordenadas cartesianas rectangulares con el eje x horizontal (sentido positivo el del movimiento) y el eje y vertical (sentido positivo hacia arriba). Integrando la aceleración

$$\mathbf{a}(t) = -g\mathbf{j} = \dot{v}_x(t)\mathbf{i} + \dot{v}_y(t)\mathbf{j}$$

y utilizando la velocidad inicial dada

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \cos\theta\mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$$

se tiene

$$\mathbf{v}(t) = v_0 \cos\theta\mathbf{i} + (v_0 \operatorname{sen}\theta - gt)\,\mathbf{j}$$
$$= \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j}$$

Integrando de nuevo se tiene

$$x(t) = v_0 t\cos\theta \qquad (a)$$

$$y(t) = v_0 t \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (b)$$

Para hallar el tiempo $\hat{t}_r$ en el cual la granada llega de nuevo al suelo, se hace la altura igual a cero

$$y(t) = \left(v_0\hat{t}_r \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}g\hat{t}_r^2 \right) = 0$$

lo cual da

$$\hat{t}_r = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

La posición x de la granada en ese instante es

$$x(\hat{t}_r) = x_{\text{alcance}} = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{g}$$
$$= \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} \qquad (c)$$

El ángulo que da la máxima $x_{alcance}$ se halla ahora derivando en la ecuación anterior respecto a θ e igualando a cero la derivada

$$\frac{dx_{alcance}}{d\theta} = \frac{2v_0^2 \cos 2\theta_r}{g} = 0$$

lo cual da

$$\theta_r = 45° \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 13.9

Un radar que sigue a un avión da las coordenadas de éste en la forma $r(t)$ y $\theta(t)$ (fig. 13-20). En un cierto instante, $\theta = 40°$ y $r = 1920$ m. De medidas sucesivas de r y θ se deduce que las derivadas en ese instante son $\dot{r} = 93{,}6$ m/s, $\dot{\theta} = -0{,}039$ rad/s, $\ddot{r} = 2{,}925$ m/s^2 y $\ddot{\theta} = 0{,}003807$ rad/s^2. Calcular la velocidad y la aceleración del avión en el instante considerado.

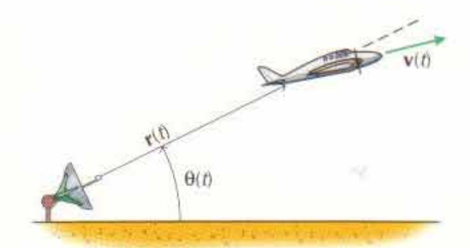


Figura 13-20

SOLUCIÓN

Tomando coordenadas polares centradas en el radar según se indica en la figura 13-20, la componente radial de la velocidad será

$$v_r = \dot{r} = 93{,}6 \text{ m/s}$$

y la componente transversa

$$v_\theta = r\dot{\theta} = (1920)\,(-0{,}039) = -74{,}9 \text{ m/s}$$

La resultante tendrá por módulo

$$v = \sqrt{93{,}6^2 + 74{,}9^2} = 119{,}88 \text{ m/s} \qquad \text{Resp.}$$

y forma un ángulo

$$\phi_v = \tan^{-1}\frac{74{,}9}{93{,}6} = 38{,}7° \qquad \text{Resp.}$$

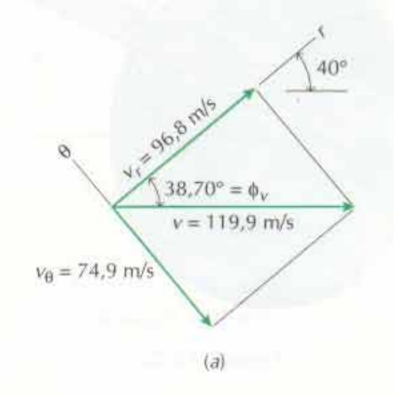
medido en sentido horario respecto a la dirección radial (fig. 13-21*a*).

La componente radial de la aceleración es

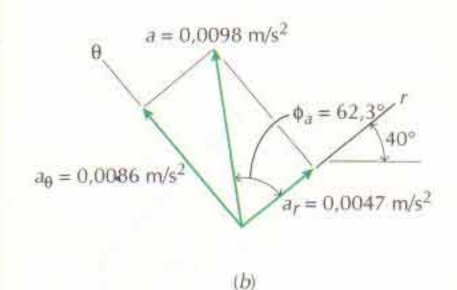
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = (2{,}925) - (1920)\,(-0{,}039)^2 = 0{,}047 \text{ m/s}^2$$

y la componente transversa es

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (1920)\,(0{,}003807) + 2\,(93{,}6)\,(-0{,}039)$$
$$= 0{,}086 \text{ m/s}^2$$



(*a*)



(*b*)

Figura 13-21

El módulo de la resultante será pues

$$a = \sqrt{0{,}0047^2 + 0{,}0086^2} = 0{,}0098 \text{ m/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

y forma un ángulo

$$\phi_a = \tan^{-1}\frac{0{,}0086}{0{,}0047} = 61{,}3° \qquad \text{Resp.}$$

medido en sentido antihorario a partir de la dirección radial (fig. 13-21*b*).

Debe advertirse que los números obtenidos para los términos de la aceleración no serán, probablemente, muy precisos. Han resultado de restar dos números que son muy precisos hasta la segunda cifra decimal, como mucho. Por tanto, la respuesta no tendrá más de una cifra significativa.

PROBLEMA EJEMPLO 13.10

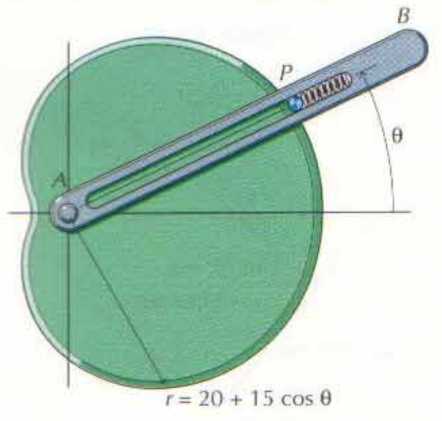


Figura 13-22

La forma de una leva viene dada por $r = 20 + 15 \cos\theta$ mm (fig. 13-22). El pasador *P* se desliza por una ranura a lo largo del brazo *AB* manteniéndose en contacto con la leva por efecto de un resorte. El brazo *AB* gira alrededor de *A* en sentido antihorario a razón de 30 rev/min. Sabiendo que $\theta = 0$ en $t = 0$:

a. Determinar la velocidad y la aceleración del pasador.

b. Evaluar las expresiones del apartado a de la velocidad y la aceleración en $t = 0{,}75$ s.

c. Representar la velocidad y la aceleración del apartado b en una gráfica apropiada.

(Supóngase que el pasador es tan pequeño que pueda suponerse que su centro sigue el contorno de la leva.)

SOLUCIÓN

a. Primeramente, integrando la velocidad angular dada

$$\dot{\theta} = \frac{(30 \text{ rev/min})}{(60 \text{ s/min})}(2\pi \text{ rad/rev}) = \pi \text{ rad/s}$$

se tiene

$$\theta = \pi t \text{ rad}$$

donde la constante de integración es nula puesto que $\theta = 0$ en $t = 0$. Además, como la velocidad de rotación es constante,

$$\ddot{\theta} = 0$$

A continuación, derivando la función radial

$$r = 20 + 15\cos\theta = 20 + 15\cos\pi t$$

se tiene

$$\dot{r} = -15\pi \text{ sen } \pi t$$

y

$$\ddot{r} = -15\pi^2 \cos \pi t$$

Ahora se pueden calcular las componentes de la velocidad

$$v_r = \dot{r} = -15\pi \operatorname{sen} \pi t \qquad \text{Resp.}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = (20 + 15\cos \pi t)(\pi)$$
$$= 20\pi + 15\pi \cos \pi t \qquad \text{Resp.}$$

Análogamente, las componentes de la aceleración son

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = (-15\pi^2 \cos \pi t) - (20 + 15\cos \pi t)(\pi)$$
$$= -\pi^2(20 + 30\cos \pi t) \qquad \text{Resp.}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (20 + 15\cos \pi t)(0) + 2(-15\pi \operatorname{sen} \pi t)(\pi)$$
$$= -30\pi^2 \operatorname{sen} \pi t \qquad \text{Resp.}$$

b. En $t = 0{,}75$ s, $\theta = 3\pi/4$ rad $= 135°$. Las componentes de la velocidad y de la aceleración son

$$v_r = -15\pi \operatorname{sen} 3\pi/4 = -33{,}3 \text{ mm/s} \qquad \text{Resp.}$$

$$v_\theta = 20\pi + 15\pi \cos 3\pi/4 = -29{,}5 \text{ mm/s} \qquad \text{Resp.}$$

$$a_r = -\pi^2(20 + 30 \cos 3\pi/4)$$
$$= 11{,}97 \text{ mm/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

$$a_\theta = -30\pi^2 \operatorname{sen} 3\pi/4 = -209{,}4 \text{ mm/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

c. El módulo de la velocidad es

$$v = \sqrt{33{,}3^2 + 29{,}5^2} = 44{,}5 \text{ mm/s}$$

y la dirección de la velocidad es

$$\phi_v = \tan^{-1} \frac{29{,}5}{33{,}3} = 41{,}5°$$

medida en sentido horario a partir de la dirección r negativa. El módulo de la aceleración es

$$a = \sqrt{11{,}97^2 + 209{,}4^2} = 209{,}7 \text{ mm/s}^2$$

y la dirección de la aceleración es

$$\phi_a = \tan^{-1} \frac{209{,}4}{11{,}97} = 86{,}7°$$

medida en sentido horario a partir de la dirección r positiva. En la figura 13-23 se han representado estos valores.

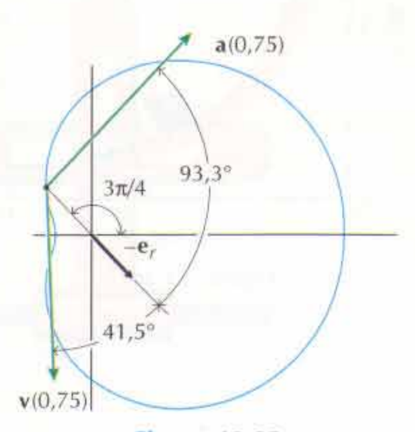


Figura 13-23

PROBLEMA EJEMPLO 13.11

Una curva de una autopista tiene un radio de curvatura que varía desde infinito al principio y al final hasta un valor $\rho_{\text{mín}}$ en su punto medio. Si los neumáticos de un automóvil que la recorre comienzan a derrapar cuando la aceleración normal alcanza los 3,6 m/s^2, determinar:

a. La celeridad constante máxima a la cual el auto puede recorrer la curva si $\rho_{\text{mín}} = 150$ m.

b. El menor $\rho_{\text{mín}}$ para el cual puede el auto recorrer la curva a 100 km/h.

SOLUCIÓN

a. La componente normal de la aceleración viene dada por

$$a_n = v^2/\rho$$

Haciendo $\rho = \rho_{\text{mín}}$ y despejando v resulta que la máxima celeridad que puede llevar el auto es

$$v = \sqrt{(\rho_{\text{mín}}\, a_n)} = \sqrt{(150)\,(3,6)}$$
$$= 23,2 \text{ m/s } (83,5 \text{ km/h}) \qquad \text{Resp.}$$

b. Despejando ρ y haciendo $v = 100$ km/h $= 27,8$ m/s se tiene el menor $\rho_{\text{mín}}$ que puede tener la curva:

$$\rho_{\text{mín}} = \frac{v^2}{a_n} = \frac{27,8^2}{3,6} = 215 \text{ m} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 13.12

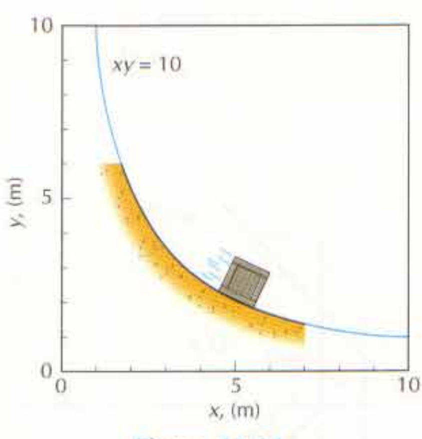


Figura 13-24

Una caja se desliza por un conducto que tiene forma de hipérbola (fig. 13-24). Cuando la caja llega al punto $x = 5$ m, lleva una celeridad de 5 m/s que disminuye a razón de 0,5 m/s^2. Determinar las componentes tangencial y normal de la aceleración de la caja.

SOLUCIÓN

La dirección tangencial se halla calculando la pendiente de la curva

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{10}{x}\right) = -\frac{10}{x^2} = \tan\phi$$

Luego, en $x = 5$ m

$$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{10}{5^2}\right) = -21,80°$$

(por debajo de la horizontal). La componente tangencial de la aceleración será, pues,

$$\mathbf{a}_t = \dot{v}\mathbf{e}_t = -0,5 \text{ m/s}^2 \;\searrow\; 21,80° \qquad \text{Resp.}$$

La componente normal de la aceleración es

$$a_n = v^2/\rho$$

donde el radio de curvatura viene dado por (v. cualquier texto elemental de Cálculo)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

y el valor absoluto se ha escrito para garantizar que ρ sea positivo. El cálculo de la segunda derivada da

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{20}{x^3}$$

luego en $x = 5$ m

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\left|\frac{20}{5^3}\right|}{\left[1+\left(-\frac{10}{5^2}\right)^2\right]^{3/2}} = 0{,}1281 \text{ m}^{-1}$$

Por último, la componente normal de la aceleración será

$$\mathbf{a}_n = (5)^2(0{,}1281)\,\mathbf{e}_n$$
$$= 3{,}20 \text{ m/s}^2 \quad \angle 68{,}2°$$ Resp.

PROBLEMAS

13-80* Un avión que vuela horizontalmente a 300 km/h suelta una bomba desde una altura de 2 km. La aceleración de la bomba es de 9,81 m/s² vertical hacia abajo. Determinar la distancia horizontal que recorre la bomba antes de llegar al suelo.

13-81* Un cañón que dispara contra un blanco situado en una cumbre comunica una velocidad inicial de 180 m/s. Si la aceleración del proyectil es de 9,81 m/s² vertical hacia abajo y las distancias horizontal y vertical al blanco son 800 m y 400 m, respectivamente, determinar el ángulo de disparo que ha de tener el cañón.

13-82 El pasador P de la figura P13-82 se desliza por ranuras (una horizontal y otra vertical) unidas a los collares A y B. El collar A corre por un plano horizontal, viniendo dada su posición por $x(t) = 10 \cos 3t$ mm mientras que el collar B lo hace por un plano vertical estando dada su posición por $y(t) = 10 \text{ sen } 4t$ mm.

a. Calcular la velocidad $\mathbf{v}_p$ del pasador.
b. Calcular la aceleración $\mathbf{a}_p$ del pasador.
c. Representar gráficamente la posición del pasador para el caso $0 < t < 2$ s.
d. Evaluar la velocidad $\mathbf{v}_p(t)$ y la aceleración $\mathbf{a}_p(t)$ en $t = 5$ s e indicarla sobre la gráfica del apartado c.

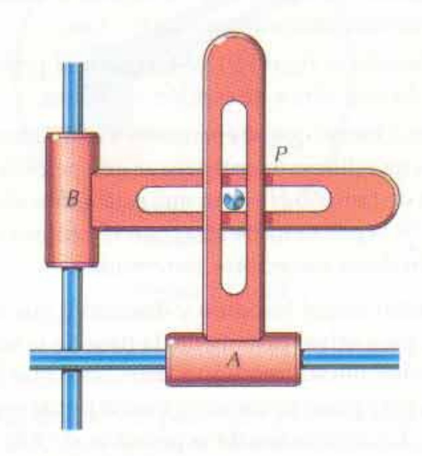


Figura P13-82

13-83 Repetir el problema P13-82 para el caso en que la posición del collar A esté dada por $x(t) = e^{-t}/17$ m y el collar B por $y(t) = 0{,}3$ sen $2t$ m.

13-84* Una bola de 10 mm de diámetro que rueda por un plano horizontal situado a una altura $h = 4$ m sale de él como se indica en la figura P13-84. Determinar las celeridades v_0 mínima y máxima que puede tener la bola si ha de caer en un agujero de diámetro $D = 200$ mm situado a una distancia horizontal $d = 2$ m del borde del escalón. (La aceleración de la bola es de 9,81 m/s² vertical hacia abajo.)

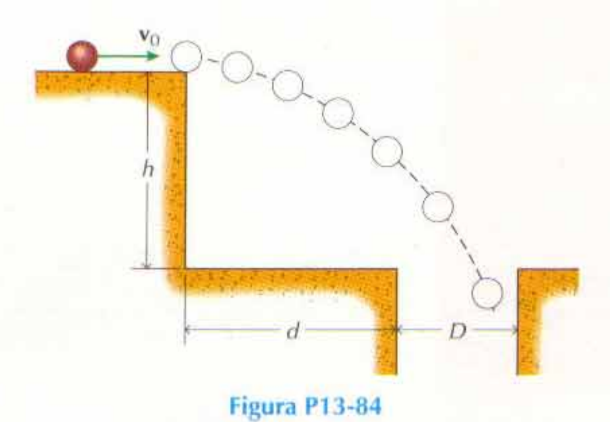


Figura P13-84

13-85 Una bola de diámetro 12,5 mm rueda por un plano horizontal situado a una altura $h = 2{,}4$ m con una celeridad inicial de $v_0 = 1{,}5 \pm 0{,}15$ m/s (fig. P13-84). Determinar el mínimo diámetro D que puede tener el agujero para que en él caiga la bola. (La aceleración de la bola es de 9,81 m/s² vertical hacia abajo.)

13-86 Utilizando la figura P13-84, repetir el problema 13-84 para el caso de una altura de escalón $h = 1$ m.

13-87* Utilizando la figura P13-84, repetir el problema 13-85 para el caso de una altura de escalón $h = 60$ cm.

13-88 Un muchacho que se encuentra a una distancia $d = 5$ m de la base de un edificio intenta lanzar una pelotita a través de una ventana de tamaño $H = 1$ m que está a una altura $h = 7$ m (fig. P13-88). Si la pelota ha de atravesar la ventana cuando esté en lo más alto de su trayectoria, determinar:

a. La velocidad inicial (módulo y dirección) que ha de llevar la pelota para salvar justamente la base de la ventana.
b. La velocidad inicial (módulo y dirección) que ha de llevar la pelota para pasar justamente bajo el borde superior de la ventana. (La aceleración de la pelota es de 9,81 m/s² vertical hacia abajo.)

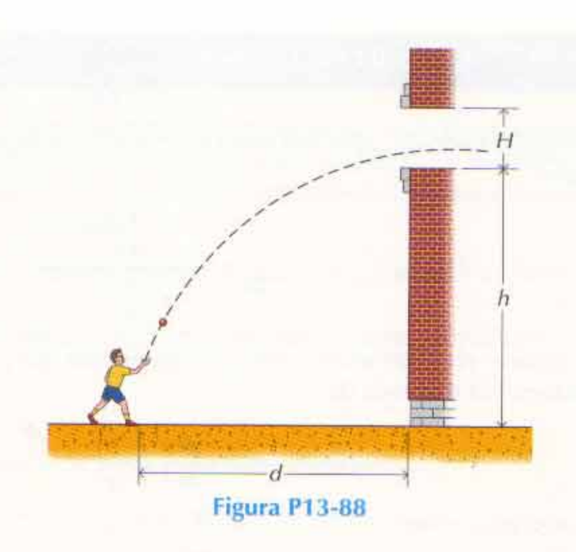


Figura P13-88

13-89* Un muchacho que se encuentra a una distancia $d = 6$ m de la base de un edificio intenta lanzar una pelotita a través de una ventana de tamaño $H = 90$ cm que está a una altura $h = 6$ m (fig. P13-88). Si la velocidad inicial de la pelota es de $v_0 = 15$ m/s, determinar el intervalo de ángulos iniciales θ_0 que permitan que la pelota atraviese la ventana. (La aceleración de la pelota es de 9,81 m/s² vertical hacia abajo.)

13-90* En una jugada de béisbol, la pelota sale del bate a 1 m sobre el suelo, formando un ángulo de 25° con el plano horizontal y con una celeridad inicial v_0 (fig. P13-90). Si la pelota salva justamente la valla del centro del campo situada a 120 m:

a. Determinar la celeridad inicial de la pelota.
b. Determinar la máxima altura alcanzada por la pelota.
c. Determinar el tiempo que tarda la pelota en ir del bate a la valla.

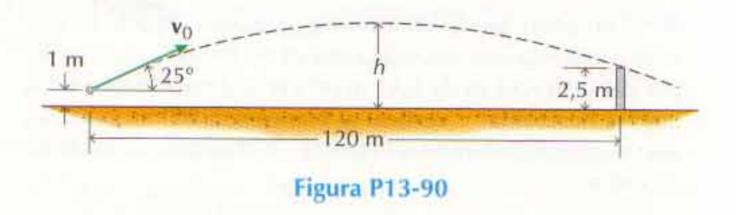


Figura P13-90

13-91 Un radar sigue a un cohete (fig. P13-91). En un instante, la distancia r y el ángulo θ que se miden son, respectivamente, 16 km y 30°. A partir de medidas sucesivas, se estima que las derivadas $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ son, respectivamente 195 m/s, 49,5 m/s², 0,031 rad/s y 0,005 rad/s². Determinar la velocidad y la aceleración del cohete.

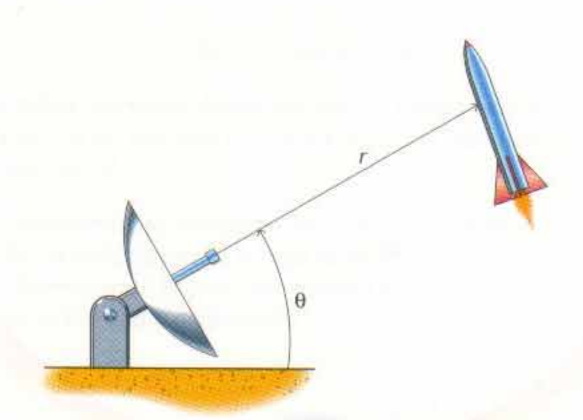


Figura P13-91

13-92* Un punto sigue una trayectoria espiral dada por $r(t) = 5\,\theta/3$ donde $\theta(t)$ se da en radianes y r en mm. Sabiendo que $\dot{\theta} = 10/t$ rad/s y que $\theta = 0$ cuando $t = 1$ s,

a. Calcular la velocidad del punto $\mathbf{v}(t)$.
b. Calcular la aceleración del punto $\mathbf{a}(t)$.
c. Representar gráficamente la posición del punto para cuando $1\text{ s} < t < 2\text{ s}$.
d. Evaluar la velocidad $\mathbf{v}(t)$ y la aceleración $\mathbf{a}(t)$ cuando $\theta = 2\pi$ rad e indicarlas en la gráfica del apartado c.

13-93 Un punto sigue una trayectoria que viene dada por $r(t) = 5$ sen $\theta \cos^2 \theta$, donde $\theta(t)$ se expresa en radianes y r en centímetros. Sabiendo que $\dot{\theta} = 2$ rad/s (constante) y que $\theta = 0$ cuando $t = 0$,

a. Calcular la velocidad del punto $\mathbf{v}(t)$.
b. Calcular la aceleración del punto $\mathbf{a}(t)$.
c. Representar gráficamente la posición del punto para el caso $0 < t < 2$ s.
d. Evaluar $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{a}(t)$ cuando $\theta = \pi$ rad e indicarlas en la gráfica del apartado c.

13-94 Un punto recorre una trayectoria dada por $r(t) = 50 \cos 3\theta$ donde $\theta(t)$ se expresa en radianes y r en milímetros. Sabiendo que $\dot{\theta} = 2{,}5$ rad/s (constante) y que $\theta = 0$ cuando $t = 0$:

a. Calcular la velocidad del punto $\mathbf{v}(t)$.
b. Calcular la aceleración del punto $\mathbf{a}(t)$.
c. Representar gráficamente la posición del punto para el caso $0 < t < 2$ s.
d. Evaluar la velocidad $\mathbf{v}(t)$ y la aceleración $\mathbf{a}(t)$ cuando $\theta = 2\pi$ rad e indicarlas en la gráfica del apartado c.

13-95* Un collar que se desliza a lo largo de una varilla horizontal tiene un pasador que está obligado a moverse por la ranura del brazo AB (fig. P13-95). El brazo oscila con una posición angular dada por $\theta(t) = 90 - 30 \cos t$ donde $\theta(t)$ se expresa en grados y t en segundos. Para $t = 5$ s:

a. Determinar la distancia radial $r(t)$.
b. Determinar las componentes de la velocidad $v_r(t)$ y $v_\theta(t)$.
c. Determinar las componentes de la aceleración $a_r\,(t)$ y $a_\theta(t)$
d. Comprobar que los vectores velocidad y aceleración están dirigidos a lo largo de la varilla horizontal.

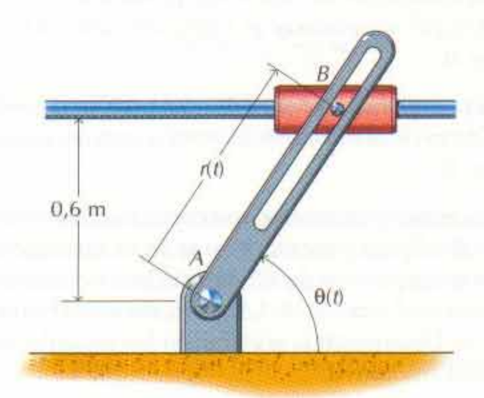


Figura P13-95

13-96 Un collar que se desliza por un alambre circular tiene un pasador que está obligado a moverse por la ranura del brazo AB (fig. P13-96). El brazo gira en sentido antihorario con una celeridad angular constante de 2 rad/s. Cuando el brazo esté 30° por encima de la horizontal:

a. Determinar la distancia radial $r(t)$.
b. Determinar las componentes de la velocidad $v_r(rt)$ y $v_\theta(t)$.
c. Determinar las componentes de la aceleración $a_r(t)$ y $a_\theta(t)$.
d. Comprobar que el vector velocidad está dirigido a lo largo del alambre.

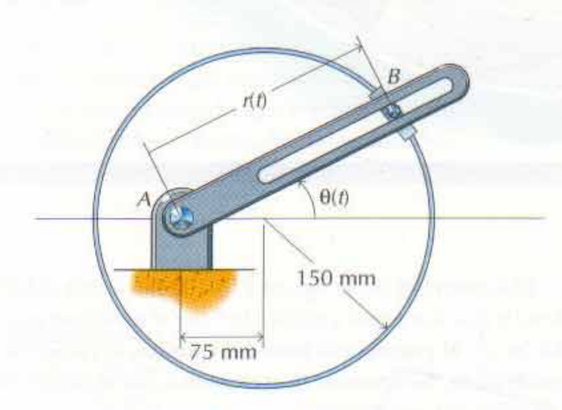


Figura P13-96

13-97* Si la celeridad del punto del problema 13-93 no ha de superar 1,2 m/s, determinar el valor constante máximo que puede tener $\dot{\theta}$.

13-98* Si la celeridad del punto del problema 13-94 no ha de superar 5 m/s, determinar el valor constante máximo que puede tener $\dot{\theta}$.

13-99 Si la aceleración del punto del problema 13-93 no ha de superar 3,6 m/s², determinar el valor constante máximo que puede tener $\dot{\theta}$.

13-100* Si la aceleración del punto del problema 13-94 no ha de superar 15 m/s², determinar el valor constante máximo que puede tener $\dot{\theta}$.

13-101 Un automóvil recorre una curva según se indica en la figura P13-101. En un instante, el auto lleva una velocidad de 72 km/h en una dirección de 30° del este hacia el norte, aumentando su celeridad a razón de 1,5 m/s², siendo el radio de curvatura 135 m. Determinar la aceleración (en módulo, dirección y sentido) del automóvil.

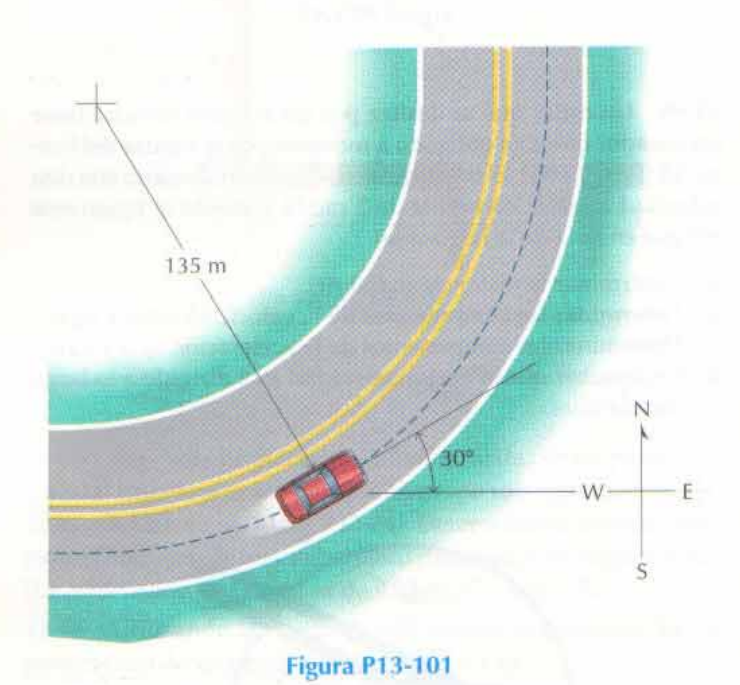


Figura P13-101

13-102 El automóvil de la figura P13-102 lleva una celeridad de 100 km/h que aumenta a razón de 5 m/s² en el instante que se indica. Si, en el punto más bajo del camino, el radio de curvatura es de 80 m, determinar la aceleración (en módulo, dirección y sentido) del automóvil.

13-103* Un automóvil pasa por lo alto de una loma en donde el radio de curvatura es de 33 m (fig. P13-103). Si la componente normal de la aceleración necesaria para mantener el auto contra la calzada se hace mayor que la que proporciona la gravedad, el auto salta. Determinar la celeridad constante máxima a la cual el automóvil puede superar normalmente la loma.

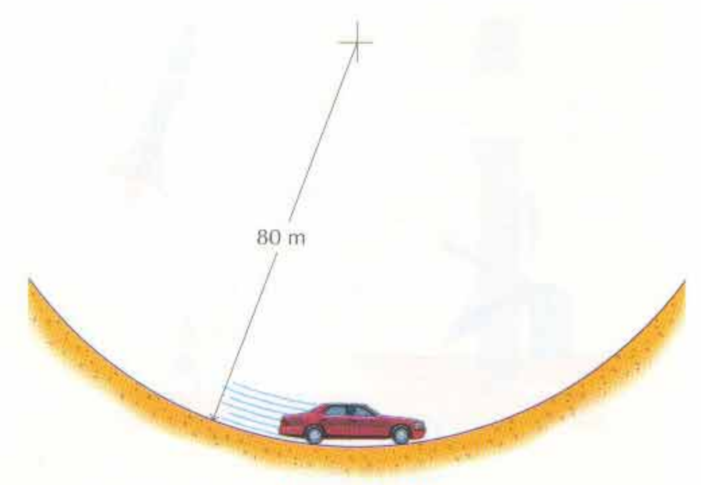


Figura P13-102

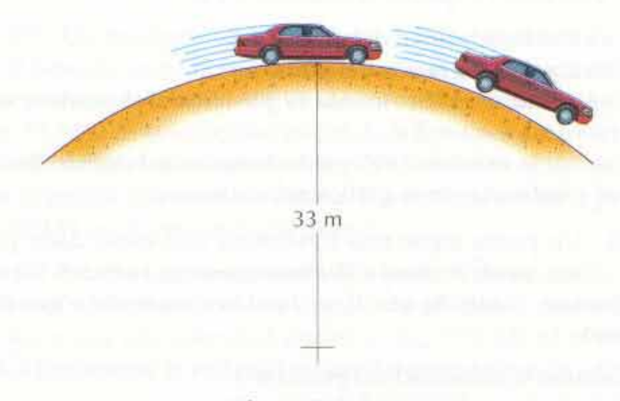


Figura P13-103

13-104 Cuando la aceleración total de un automóvil que describe una curva supera un tercio de la aceleración de la gravedad, los neumáticos empiezan a patinar. Si un automóvil aumenta su celeridad a razón de 2 m/s² al recorrer una curva de radio 60 m, determinar a qué celeridad empezarán a derrapar los neumáticos.

13-105* Repetir el problema 13-104 para el caso en que el auto aumente su celeridad a razón de 1,5 m/s² y el radio de curvatura sea de 60 m.

13-106* Si el automóvil del problema 13-104 lleva una celeridad de 100 km/h, determinar el mínimo radio de curvatura para el cual no derraparán los neumáticos.

13-107 Si el automóvil del problema 13-105 lleva una celeridad de 128 km/h, determinar el mínimo radio de curvatura para el cual no derraparán los neumáticos.

13-108* La bajada de la figura P13-108 tiene forma parabólica, es decir,

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 \text{ m}$$

Una bolita que rueda descendiendo esa bajada pasa por el punto A ($x_0 = 5$ m) con una velocidad de 3 m/s que aumenta a razón de 5 m/s².

a. Determinar las componentes normal y tangencial, a_n y a_t, de la aceleración de la bola cuando pasa por el punto A.
b. Determinar el ángulo que forman en el punto A los vectores velocidad y aceleración.

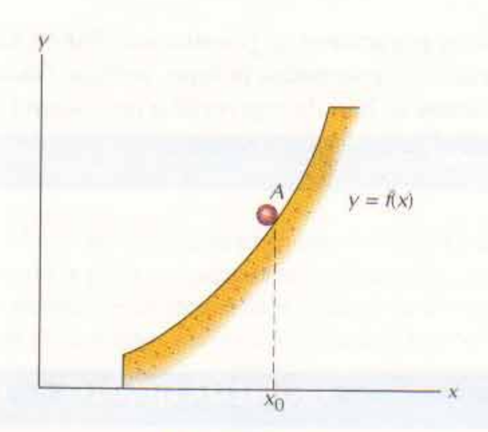


Figura P13-108

13-109 La bajada de la figura P13-108 tiene forma elíptica, es decir,

$$f(x) = 1 - 0{,}5\sqrt{4 - x^2} \text{ m}$$

Una bola que rueda descendiendo la bajada pasa por el punto $A(x_0 = 1{,}5 \text{ m})$ con una velocidad de 12 m/s que aumenta a razón de 8 m/s².

a. Determinar las componentes normal y tangencial, a_n y a_t, de la aceleración de la bola cuando pasa por el punto A.
b. Determinar el ángulo que forman en el punto A los vectores velocidad y aceleración.

13-110 La bajada de la figura 13-108 tiene forma hiperbólica, es decir,

$$f(x) = \frac{6}{(5 - x)} \text{ m}$$

Una bola que rueda descendiendo la bajada pasa por el punto $A(x_0 = 3 \text{ m})$ con una velocidad de 2 m/s que aumenta a razón de 3 m/s².

a. Determinar las componentes normal y tangencial, a_n y a_t, de la aceleración de la bola cuando pasa por el punto A.
b. Determinar el ángulo que forman en el punto A los vectores velocidad y aceleración.

13-111* Una pista de esquí tiene una forma dada por

$$y = 0{,}01\,(x - 45)^2$$

donde x e y se expresan en metros. Cuando un esquiador pasa por $x = 30$ m, lleva una celeridad de 9 m/s que aumenta a razón de 1,2 m/s².

a. Determinar las componentes normal y tangencial, a_n y a_t, de la aceleración del esquiador en este punto.
b. Determinar el ángulo que forman en este punto los vectores velocidad y aceleración del esquiador.

13-112 Una pista de esquí tiene una forma dada por

$$y = \frac{400}{x + 15}$$

donde x e y se expresan en metros. Cuando un esquiador pasa por $x = 20$ m, lleva una celeridad de 15 m/s que aumenta a razón de 2 m/s².

a. Determinar las componentes normal y tangencial, a_n y a_t, de la aceleración del esquiador en este punto.
b. Determinar el ángulo que forman en este punto los vectores velocidad y aceleración del esquiador.

13.6 MOVIMIENTO RELATIVO EN UN PLANO

Dos puntos separados que se muevan con movimiento curvilíneo plano tienen movimientos que pueden relacionarse de igual manera que se hizo en el apartado 13.4 en el caso de dos puntos con movimiento rectilíneo. La diferencia estriba en que ahora, evidentemente, el movimiento relativo, al igual que los movimientos individuales, deberán describirse mediante vectores.

La relación entre las posiciones de los puntos y su posición relativa se obtendrá a partir de la regla de adición de vectores (fig. 13-25)

$$\mathbf{r}_{Q/O} = \mathbf{r}_{P/O} + \mathbf{r}_{Q/P} \qquad (13\text{-}40)$$

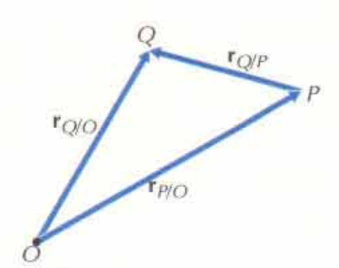


Figura 13-25

donde $\mathbf{r}_{Q/P}$ es la posición del punto Q relativa a la posición del punto P. Derivando la ecuación 13-40 respecto al tiempo tenemos

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{Q/P} \tag{13-41}$$

$$\mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_P + \mathbf{a}_{Q/P} \tag{13-42}$$

Es decir, la velocidad del punto Q medida con relación al punto P es la diferencia entre las velocidades absolutas (velocidades medidas respecto a un sistema fijo de coordenadas) de los puntos Q y P. Análogamente, la aceleración del punto Q medida con relación al punto P es la diferencia entre las aceleraciones absolutas de los puntos Q y P.

Los distintos términos de estas ecuaciones se pueden escribir en cualquier sistema de coordenadas conveniente: cartesianas, polares, normal / tangencial. No obstante, todas las componentes se han de convertir a un sistema de coordenadas común (corrientemente el cartesiano rectangular) antes de sumarlas.

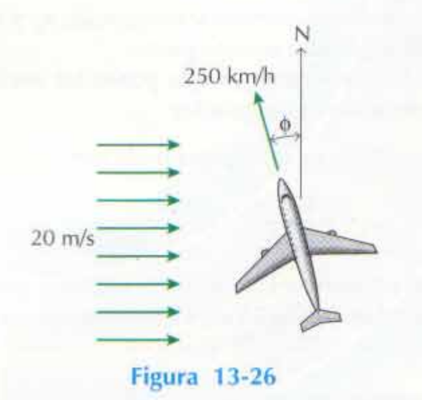


Figura 13-26

PROBLEMA EJEMPLO 13.13

Un avión intenta volar en línea recta hacia el norte (fig. 13-26). Sin embargo, un viento del oeste lo desviaría a menos que el avión se dirigiera en una dirección que forme cierto ángulo con la dirección deseada. Si la celeridad del avión es de 250 km / h, determinar:

a. El rumbo que ha de poner para que su derrota sea hacia el norte.
b. El tiempo necesario para que el avión recorra 250 km en la dirección norte.

SOLUCIÓN

a. En un sistema de coordenadas en el cual el este señale el sentido positivo del eje x y el norte el del eje y, la velocidad del viento es

$$\mathbf{v}_w = 20\mathbf{i} \text{ m/s}$$

y la velocidad deseada del avión es

$$\mathbf{v}_a = V\mathbf{j} \text{ m/s}$$

La velocidad del avión relativa al viento es

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{a/w} &= -250 \text{ sen } \phi\mathbf{i} + 250 \cos \phi\mathbf{j} \text{ km/h} \\ &= -69{,}44 \text{ sen } \phi\mathbf{i} + 69{,}44 \cos \phi\mathbf{j} \text{ m/s}\end{aligned}$$

donde el ángulo de deriva ϕ indica la dirección hacia la que ha de apuntar el avión (del norte hacia el oeste) para que su velocidad absoluta esté dirigida hacia el norte.

Reuniendo lo anterior, se tiene

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_w + \mathbf{v}_{a/w}$$

o sea

$$V\mathbf{j} = 20\mathbf{i} + (-69{,}44 \text{ sen } \phi\mathbf{i} + 69{,}44 \cos \phi\mathbf{j})$$

Ahora, la componente x de esta ecuación da el ángulo de deriva

$$\phi = \text{sen}^{-1} \frac{20}{69{,}44}$$
$$= 16{,}74° \text{ (del norte hacia el oeste)} \qquad \text{Resp.}$$

y la componente y da la celeridad absoluta del avión en la dirección norte

$$V = 69{,}44 \cos 16{,}74° = 66{,}50 \text{ m/s} = 239{,}4 \text{ km/h}$$

b. El tiempo que emplea en volar 250 km hacia el norte será pues

$$t = \frac{250}{239{,}4} = 1{,}044 \text{ h} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 13.14

Dos ciclistas recorren una pista circular (fig. 13-27). El ciclista 1 va por la parte interna de la pista en la que el radio es de 60 m, mientras que el ciclista 2 lo hace por la parte exterior en donde el radio es de 63 m. Ambos parten desde $\theta = 0$, con $v = 0$ en $t = 0$. Ambos aceleran a razón de 0,6 m/s^2 (constante) hasta alcanzar una celeridad de 6 m/s y a continuación mantienen constante la celeridad. Cuando el primer ciclista alcanza el punto B, determinar:

a. La posición angular θ_2 del ciclista 2.
b. La posición relativa $\mathbf{r}_{2/1}$.
c. La velocidad relativa $\mathbf{v}_{2/1}$.
d. La aceleración relativa $\mathbf{a}_{2/1}$.

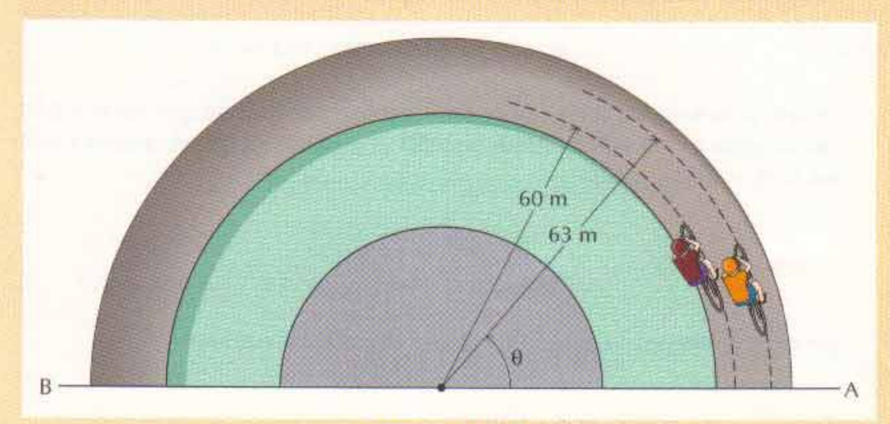


Figura 13-27

SOLUCIÓN

a. Para el ciclista 1, $r_1 = 60$ m = constante, $\dot{r}_1 = 0$, $\ddot{r}_1 = 0$. Por tanto, la velocidad y aceleración vienen dadas por

$$\mathbf{v}_1 = \dot{r}_1 \mathbf{e}_r + r_1 \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_\theta = r_1 \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_\theta$$
$$\mathbf{a}_1 = (\ddot{r}_1 - r_1 \dot{\theta}_1^2)\, \mathbf{e}_r + (r_1 \ddot{\theta}_1 + 2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1)\, \mathbf{e}_\theta$$
$$= -r_1 \dot{\theta}_1^2\, \mathbf{e}_r + r_1 \ddot{\theta}_1 \mathbf{e}_\theta$$

Inicialmente, la aceleración a lo largo de la pista (componente θ) es de 0,6 m/s^2 = constante, luego

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{0,6}{60} = 0,010 \text{ rad/s}^2 \qquad (a)$$

Integrando la ecuación (a) se tiene

$$\dot{\theta}_1 = 0,010t \text{ rad/s}$$

y

$$\theta_1 = 0,005t^2 \text{ rad}$$

El ciclista 1 acelera hasta alcanzar una celeridad de 6 m/s, o sea, hasta que

$$6 = (60)(0,010t)$$

lo cual da $t = 10$ s. La celeridad angular y la posición en este instante son

$$\dot{\theta}_1 = 0,10 \text{ rad/s}$$
$$\theta_1 = 0,50 \text{ rad} = 28,6°$$

Después de $t = 10$ s, la celeridad (y por tanto la celeridad angular) del ciclista 1 se mantiene constante

$$\dot{\theta}_1 = 0,10 \text{ rad/s} = \text{ constante}$$

Integrando para obtener la posición angular en función del tiempo, se tiene

$$\theta_1 = 0,10t - 0,50 \text{ rad}$$

donde se ha tomado la constante de integración de manera que sea $\theta_1 = 0,50$ rad cuando $t = 10$ s. Por último, se halla el instante en que el ciclista 1 esté en B ($\theta_1 = 180° = \pi$ rad)

$$t = \frac{\pi + 0,50}{0,10} = 36,42 \text{ s}$$

en cuyo momento su posición, velocidad y aceleración son

$$\mathbf{r}_1 = 60\mathbf{e}_r \text{ m} = -60 \mathbf{i} \text{ m}$$
$$\mathbf{v}_1 = (60)(0,10)\,\mathbf{e}_\theta = 6\mathbf{e}_\theta \text{ m/s} = -6 \mathbf{j} \text{ m/s}$$
$$\mathbf{a}_1 = -(60)(0,10)^2\,\mathbf{e}_r = -0,6\,\mathbf{e}_r \text{ m/s}^2 = 0,6 \mathbf{i} \text{ m/s}^2$$

Análogamente, para el ciclista 2, $r_2 = 63$ m = constante, $\dot{r}_2 = 0$ y $\ddot{r}_2 = 0$. Inicialmente,

$$\ddot{\theta} = 0,6/63 = 0,00952 \text{ rad/s}^2$$
$$\dot{\theta}_2 = 0,00952 \text{ rad/s}$$
$$\theta_2 = 0,00476t^2 \text{ rad}$$

El ciclista 2 también alcanza una celeridad de 6 m / s en

$$t = (6)/(63)\,(0{,}00952) = 10 \text{ s}$$

en cuyo instante, su celeridad y posición angulares son

$$\dot{\theta}_2 = 0{,}0952 \text{ rad/s}$$
$$\theta_2 = 0{,}476 \text{ rad} = 27{,}3°$$

Después de $t = 10$ s, la celeridad (y por tanto la celeridad angular) del ciclista 2 se mantiene constante por lo que

$$\dot{\theta}_2 = 0{,}0952 \text{ rad/s}$$

e integrando respecto al tiempo se tiene

$$\theta_2 = 0{,}0952t - 0{,}476 \text{ rad}$$

donde se ha tomado la constante de integración de manera que $\theta_2 = 0{,}476$ rad cuando $t = 10$ s. Por tanto, la posición, velocidad y aceleración del ciclista 2 en $t = 36{,}42$ s (instante en el que el ciclista 1 pasa por B) serán

$$\theta_2 = 2{,}991 \text{ rad} = 171{,}4° \qquad \text{Resp.}$$
$$\mathbf{r}_2 = 63\mathbf{e}_r \text{ m} = -62{,}28\mathbf{i} + 9{,}465\mathbf{j} \text{ m}$$
$$\mathbf{v}_2 = 6\mathbf{e}_\theta \text{ m/s} = -0{,}9015\mathbf{i} - 5{,}931\mathbf{j} \text{ m/s}$$
$$\mathbf{a}_2 = -0{,}5709\mathbf{e}_r \text{ m/s}^2 = 0{,}5643\mathbf{i} - 0{,}0858\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

b. Ahora se puede calcular la posición relativa

$$\mathbf{r}_{2/1} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = -2{,}28\mathbf{i} + 9{,}465\mathbf{j} \text{ m} \qquad \text{Resp.}$$

c. Análogamente, la velocidad relativa es

$$\mathbf{v}_{2/1} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = 5{,}1\mathbf{i} - 5{,}931\mathbf{j} \text{ m/s} \qquad \text{Resp.}$$

d. Por último, la aceleración relativa es

$$\mathbf{a}_{2/1} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$$
$$= -0{,}036\mathbf{i} - 0{,}086\mathbf{j} \text{ m/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

13-113* Una embarcación intenta cruzar un río según se indica en la figura P13-113. La anchura del río es de 600 m y la corriente es de 8 km/h. Si la embarcación navega a 24 km/h, determinar

a. El tiempo T que tardará en ir de A a B.
b. El ángulo de deriva ϕ que ha de poner la embarcación para ir directamente de A a B.

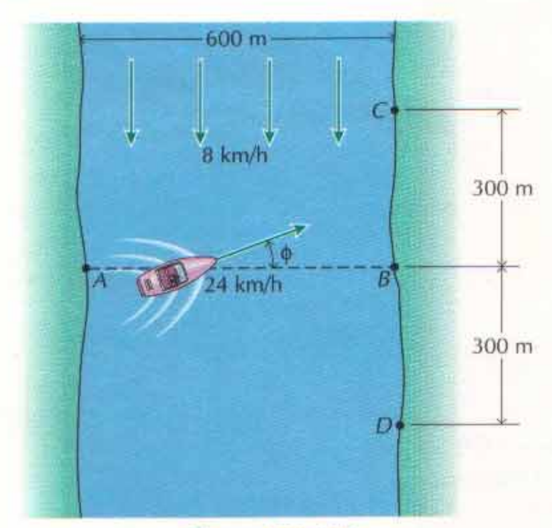


Figura P13-113

13-114* Un repartidor de periódicos en automóvil tira un fardo de periódicos desde el coche en la forma que se indica en la figura P13-114. Si el coche va a 15 km/h y los periódicos se lanzan con una velocidad de 5 m/s relativa a él y perpendicularmente al movimiento del coche, determinar

a. La velocidad $\mathbf{v}_p$ de los periódicos relativa a la acera.
b. El ángulo ϕ que forman las velocidades $\mathbf{v}_p$ y $\mathbf{v}_c$.

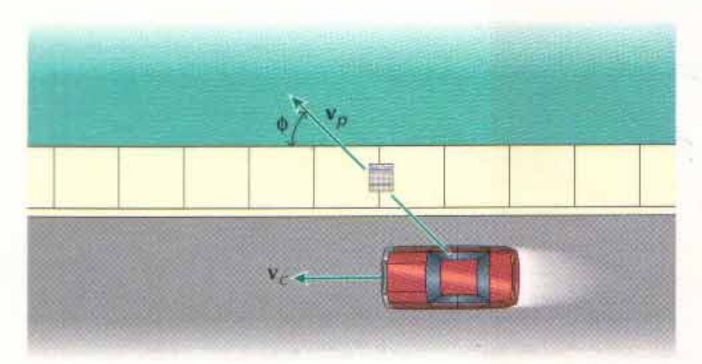


Figura P13-114

13-115 Para la embarcación del problema 13-113, determinar el tiempo T y el ángulo ϕ necesarios para ir directamente de

a. A a C.
b. A a D.

13-116* Cae lluvia con una velocidad de 30 m/s que forma un ángulo de 20° con la vertical (fig. P13-116). Para un automóvil que se mueve bajo la lluvia y contra ella, determinar

a. El ángulo ϕ al cual parece incidir la lluvia en el parabrisas si el auto va a 60 km/h.
b. La celeridad del auto para la cual $\phi = 90°$.

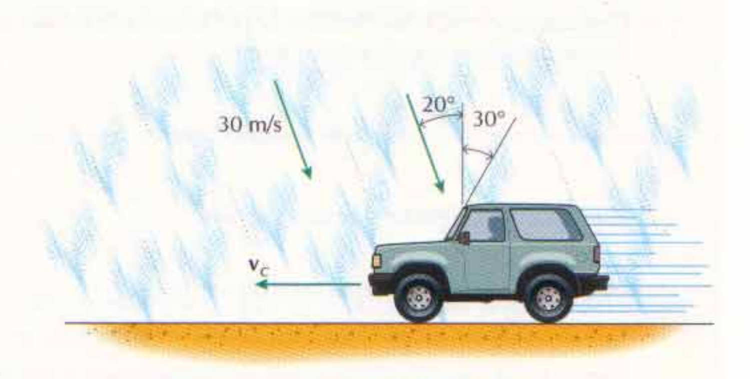


Figura P13-116

13-117 Cae lluvia (componente vertical de la velocidad) a 27 m/s y lateralmente (componente horizontal de la velocidad) sopla un viento de 4,5 m/s (fig. P13-117). Para un hombre que anda a 1,8 m/s, determinar el ángulo ϕ al cual debe colocar el paraguas (ángulo de la velocidad relativa) si el hombre camina

a. A favor del viento.
b. Contra el viento.

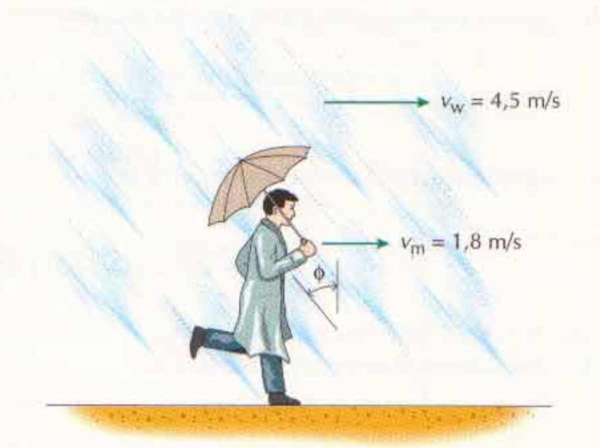


Figura P13-117

13-118 Utilizando la figura P13-116, repetir el problema 13-116 para el caso en que el auto se mueva a favor de la lluvia.

13-119* Dos lanchas parten de un amarre al mismo tiempo ($t = 0$) según se indica en la figura P13-119. La lancha A navega con una celeridad constante de 24 km/h, mientras que la lancha B lo hace a 32 km/h. Para $t = 30$ s, determinar

a. La distancia d entre las lanchas.
b. La velocidad $\dot{d}$ de separación de las lanchas.

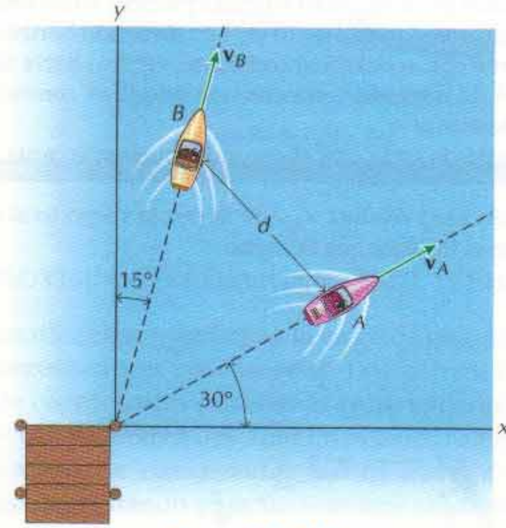


Figura P13-119

13-120 Dos aviones vuelan en línea recta horizontalmente a la misma altitud, según se indica en la figura P13-120. En $t = 0$ s, las distancias AC y BC son 20 km y 30 km, respectivamente. Los aviones llevan celeridades constantes; $v_A = 300$ km/h y $v_B = 400$ km/h. Determinar

a. La posición relativa $\mathbf{r}_{B/A}$ de los aviones en $t = 3$ min.
b. La velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ de los aviones en $t = 3$ min.
c. La distancia d que separa los aviones en $t = 3$ min.
d. El tiempo T en que será mínima esta separación.

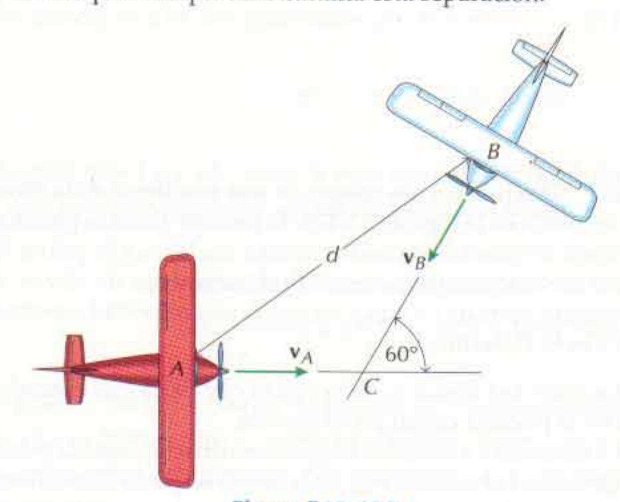


Figura P13-120

13-121* Los rodillos A y B están unidos a los extremos de una barra rígida de 1,5 m de longitud (fig. P13-121). El rodillo B se mueve por una guía horizontal con una celeridad constante de 0,3 m/s y hacia la derecha, mientras que el rodillo A se mueve por una guía vertical.

a. Determinar la posición $\mathbf{r}_A$, la velocidad $\mathbf{v}_A$ y la aceleración $\mathbf{a}_A$ del rodillo A en función de s; $0 \le s \le 1,5$ m.
b. Para $s = 0,9$ m, determinar la posición relativa $\mathbf{r}_{A/B}$, la velocidad relativa $\mathbf{v}_{A/B}$ y la aceleración relativa $\mathbf{a}_{A/B}$.
c. Demostrar que la posición relativa y la velocidad relativa del apartado b son perpendiculares.

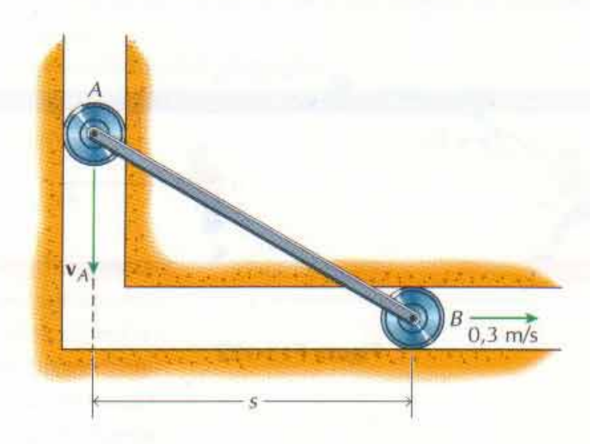


Figura P13-121

13-122* Un muchacho lanza una pelota desde una ventana situada a 10 m por encima de la calle, según se indica en la figura P13-122. La celeridad inicial de la pelota es de 10 m/s y tiene una aceleración constante, vertical hacia abajo, de 9,81 m/s^2. Otro muchacho corre por la calle a 5 m/s y capta la pelota en su carrera. Determinar

a. La distancia x a la cual capta la pelota.
b. La velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ de la pelota respecto al muchacho en el instante en que éste la capta.

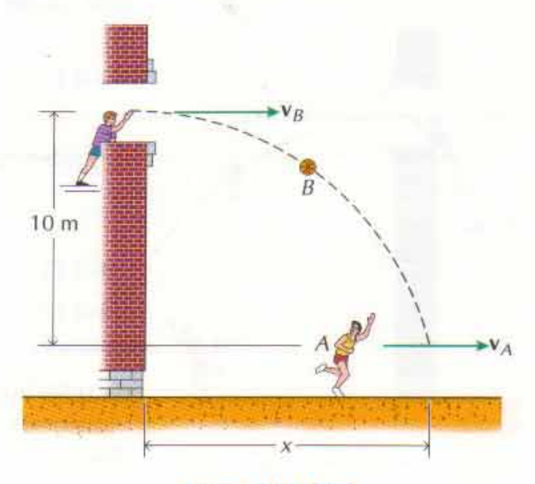


Figura P13-122

13-123 Un jugador de fútbol americano lanza un pase a un receptor en la forma que se indica en la figura P13-123. La velocidad inicial del balón es de 10,5 m/s, dirigida 30° por encima de la horizontal y tiene una aceleración constante, vertical hacia abajo, de 9,81 m/s^2. Si el receptor corre con una celeridad constante de 4,5 m/s, determinar

a. La distancia x a la cual el receptor capta el balón.
b. La velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ del balón respecto al receptor cuando lo capta.

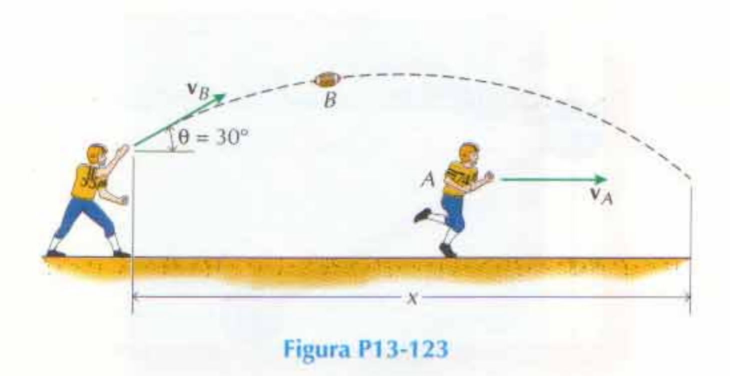


Figura P13-123

13-124* En el problema 13-122, el segundo muchacho se halla en $x = 2$ m cuando se lanza la pelota. Determinar

a. La celeridad inicial v_B de la pelota que permitiría que el muchacho la captara en su carrera.
b. La distancia x a la cual se produciría la captura.
c. La velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ de la pelota respecto al captor en el instante que la capta.

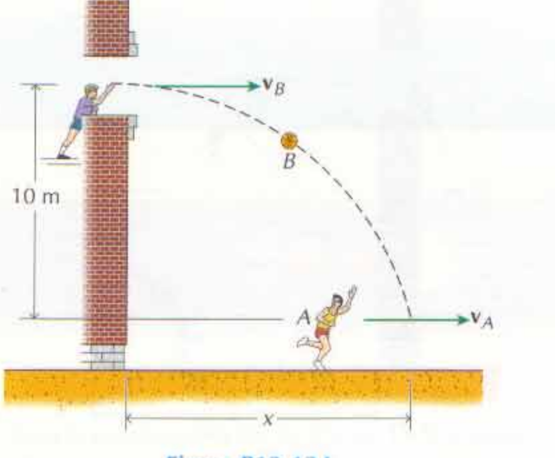


Figura P13-124

13-125 En el problema 13-123, el receptor se halla en $x = 10$ m cuando se lanza el balón. Determinar

a. La celeridad inicial v_B del balón que permita ser captado por el receptor en su carrera.
b. La distancia x a la cual captará el balón el receptor.
c. La velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ del balón respecto al receptor cuando lo capta.

13-126* Dos muchachos juegan en una pendiente en la forma que se indica en la figura P13-126. El primero lanza una pelota con una celeridad inicial de 10 m/s en dirección horizontal y la pelota lleva una aceleración constante, vertical hacia abajo, de 9,81 m/s^2. El segundo corre con una celeridad constante de 5 m/s. Determinar

a. La distancia s a la cual el segundo muchacho capta la pelota.
b. La velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ de la pelota respecto al muchacho en el instante que la capta.

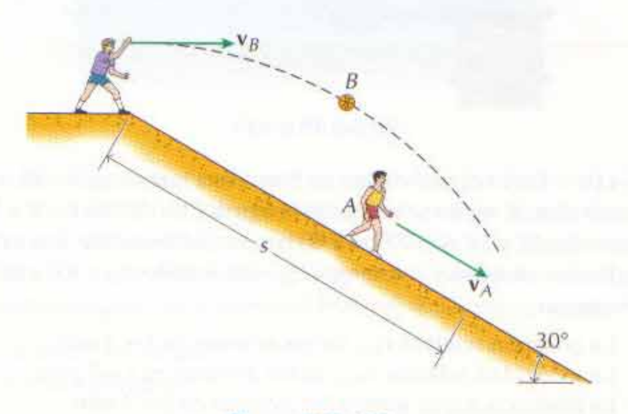


Figura P13-126

13-127 Dos muchachos juegan en una pendiente en la forma que se indica en la figura P13-126. El primero lanza la pelota en dirección horizontal con una celeridad inicial v_B y la pelota lleva una aceleración constante, vertical hacia abajo, de 9,81 m/s^2. El segundo parte de $s = 6$ m y corre con una celeridad constante de 4,5 m/s. Determinar

a. La celeridad inicial v_B de la pelota que haría que el muchacho la pudiera captar en su carrera.
b. La distancia s a la cual el segundo muchacho capta la pelota.
c. La velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ de la pelota respecto al muchacho cuando éste la capta.

13-128* Un avión que remolca a un planeador (fig. P13-128) vuela en línea recta horizontalmente con una celeridad constante de 70 m/s. La cuerda de remolque tiene una longitud de 50 m y forma un ángulo $\theta = 10°$ con la horizontal. Si $\dot{\theta}$ = 0,40 rad/s y $\ddot{\theta}$ = 0,25 rad/s^2, determinar

a. La celeridad de ascenso v_{By} del planeador.
b. La aceleración $\mathbf{a}_B$ del planeador

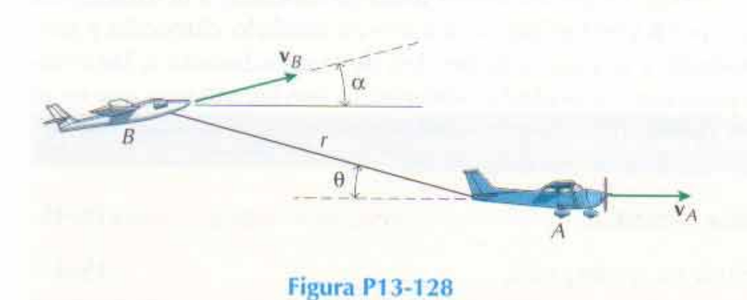


Figura P13-128

13-129 Un avión que remolca a un planeador (fig. P13-128) vuela en línea recta horizontalmente con una celeridad constante de 240 km/h. La cuerda de remolque tiene una longitud de 60 m y forma un ángulo $\theta = 10°$ con la horizontal. Si el planeador asciende según un ángulo α de 15°, determinar

a. La velocidad de variación $d\theta/dt$ del ángulo de la cuerda de remolque.
b. La velocidad $\mathbf{v}_B$ del planeador.

13.7 MOVIMIENTO CURVILÍNEO EN EL ESPACIO

Para describir el movimiento a lo largo de una curva en el espacio tridimensional se necesitan tres coordenadas. Los sistemas más comúnmente utilizados son el de coordenadas cartesianas rectangulares y el de coordenadas cilíndricas, los cuales vamos a describir en detalle. También describiremos brevemente un sistema de coordenadas menos corriente: el sistema de coordenadas esféricas. Aun cuando para un movimiento tridimensional cualquiera puede utilizarse una versión modificada del sistema de coordenadas normal y tangencial, éste no tiene gran interés porque el plano del movimiento (llamado plano osculador, definido por la tangente y la normal principal) varía de un punto a otro a lo largo de la curva y de un instante a otro en el tiempo.

13.7.1 Coordenadas rectangulares

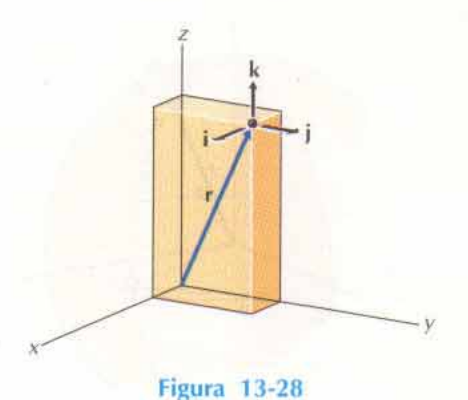


Figura 13-28

El sistema tridimensional de coordenadas cartesianas rectangulares parte de las coordenadas rectangulares x e y (apartado 13.5.1) y luego se le añade una coordenada z: la distancia al plano x-y (fig. 13-28). El vector unitario asociado a la dirección z lo designaremos por $\mathbf{k}$ y el vector de posición de un punto será

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (13\text{-}43)$$

Al igual que **i** y **j**, el vector **k** es constante en módulo, dirección y sentido, por lo que las derivadas del vector de posición serán

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j} + \dot{z}(t)\mathbf{k} \quad (13\text{-}44)$$

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = (\ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{x}(t)\mathbf{i} + \ddot{y}(t)\mathbf{j}) + \ddot{z}\,(t)\,\mathbf{k} \quad (13\text{-}45)$$

De nuevo, las direcciones de los ejes de coordenadas no tienen por qué estar en un plano horizontal o vertical. Dichas direcciones pueden ser cualesquiera mientras sean ortogonales. Sin embargo, una vez elegidas deberán mantenerse inalteradas.

13.7.2 Coordenadas cilíndricas

El sistema de coordenadas cilíndricas parte del sistema bidimensional de coordenadas polares del apartado 13.5.2 al que se añade una coordenada z que es la distancia al plano r-θ (fig. 13-29). El vector unitario asociado a la dirección z se representa también por $\mathbf{k}$ y es también constante en módulo, dirección y sentido. Como $\mathbf{k}$ es constante y $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ no dependen de la coordenada z, las componentes r y θ de la posición, velocidad y aceleración son las mismas que en el caso de coordenadas polares planas y las componentes z son las mismas que para las coordenadas cartesianas rectangulares:

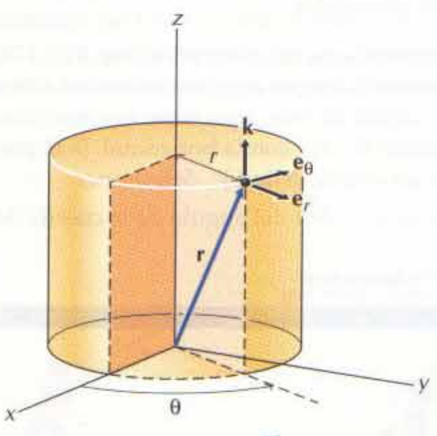


Figura 13-29

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\mathbf{e}_r + z(t)\mathbf{k} \tag{13-46}$$

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{k} \tag{13-47}$$

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k} \tag{13-48}$$

Al igual que en el caso de las coordenadas cartesianas, las direcciones de las coordenadas (r, θ) no tienen por qué estar en un plano horizontal o vertical. El sistema de coordenadas cilíndricas suele utilizarse cuando un cuerpo gira alrededor de un eje. Entonces, el eje z suele hacerse coincidir con el eje de rotación.

13.7.3 Coordenadas esféricas

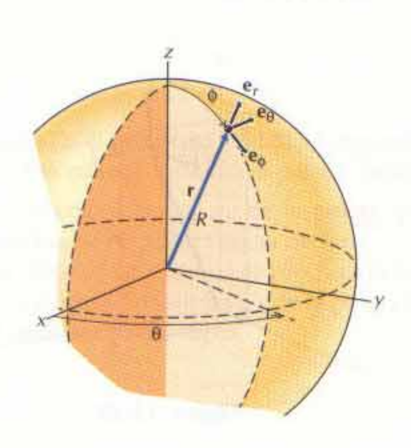


Figura 13-30

El sistema de coordenadas esféricas describe la posición de un punto mediante una distancia radial y dos ángulos, como se indica en la figura 13-30. La coordenada θ se mide en un plano, como en las coordenadas polares y cilíndricas. En cambio, la distancia al plano θ viene dada por ϕ que es el ángulo que forma el vector de posición con la normal al plano θ. Los tres vectores unitarios $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_\phi$ son perpendiculares entre sí y están dirigidos en el sentido de aumentar las coordenadas respectivas. Está claro que las direcciones de estos tres vectores unitarios dependen de los dos ángulos θ y ϕ los cuales, a su vez, dependen del tiempo y en todas las derivaciones respecto al tiempo deberá tenerse en consideración las variaciones de los tres vectores unitarios respecto a las dos coordenadas mencionadas.

Por tanto, aun cuando la expresión de la posición en coordenadas esféricas es muy sencilla

$$\mathbf{r}(t) = R(t)\,\mathbf{e}_R \tag{13-49}$$

su derivación para obtener la velocidad y la aceleración, en coordenadas esféricas, no lo es tanto. No daremos dicha derivación porque no es fundamental para la comprensión de la Cinemática. No obstante, damos a continuación los resultados:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{R}\mathbf{e}_R + R\dot{\theta}\,\text{sen}\,\phi\mathbf{e}_\theta + R\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \tag{13-50}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t) &= \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)\\ &= (\ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\dot{\theta}^2\text{sen}^2\,\phi)\,\mathbf{e}_R\\ &+ (R\ddot{\theta}\,\text{sen}\,\phi + 2\dot{R}\dot{\theta}\,\text{sen}\,\phi + 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi)\,\mathbf{e}_\theta\\ &+ (R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi} - R\dot{\theta}^2\text{sen}\,\phi\cos\phi)\,\mathbf{e}_\phi\end{aligned} \tag{13-51}$$

El sistema de coordenadas esféricas se utiliza mucho en las observaciones con radar de aeronaves y naves espaciales y para describir la posición y movimiento de brazos de robot.

PROBLEMA EJEMPLO 13.15

Un punto que sigue una curva en el espacio tiene una velocidad dada por

$$\mathbf{v}(t) = 12t^2\mathbf{i} + 16t^3\mathbf{j} + \text{sen}\ \pi t\ \mathbf{k}\ \text{m/s}$$

Si en $t = 0$ su posición es $\mathbf{r}_0 = 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ m, hallar

a. La aceleración $\mathbf{a}(t)$ del punto.
b. La posición $\mathbf{r}(t)$ del punto.

SOLUCIÓN

a. La aceleración se obtiene sin más que derivar la velocidad y se tiene

$$\mathbf{a}(t) = 24t\ \mathbf{i} + 48t^2\ \mathbf{j} + \pi\ \cos\ \pi t\mathbf{k}\ \text{m/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

b. La posición del punto se obtiene integrando la velocidad, con lo cual

$$\mathbf{r}(t) = 4t^3\ \mathbf{i} + 4t^4\mathbf{j} - (1/\pi)\cos\ \pi t\ \mathbf{k} + \mathbf{C}$$

donde **C** es una constante de integración que se determina a partir de la condición inicial. En $t = 0$

$$\mathbf{r}(0) = -(1/\pi)\,\mathbf{k} + \mathbf{C} = \mathbf{r}_0 = 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\ \text{m}$$

Por tanto,

$$\mathbf{C} = 4\mathbf{j} + (3 + 1/\pi)\,\mathbf{k}\ \text{m}$$

y

$$\mathbf{r}(t) = 4t^3\mathbf{i} + 4(1 + t^4)\,\mathbf{j} + [3 + 1/\pi - (1/\pi)\cos\ \pi t]\,\mathbf{k}\ \text{m} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 13.16

La rampa de salida de un aparcamiento tiene forma de hélice:

$$r(\theta) = 15 + 3\ \text{sen}\ \theta\ \text{m}$$

que baja 6 m en cada revolución completa. Para un automóvil que baje por la rampa de manera que $\dot{\theta} = 0{,}3\ \text{rad/s} = \text{const.}$:

a. Determinar su velocidad y su aceleración cuando $\theta = 0°$.
b. Determinar su velocidad y su aceleración cuando $\theta = 90°$.
c. Demostrar que velocidad y aceleración son perpendiculares cuando $\theta = 90°$.

SOLUCIÓN

a. El vector de posición, en coordenadas cilíndricas es

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\mathbf{e}_r + z(t)\mathbf{k}$$

donde

$$r(t) = 15 + 3 \text{ sen } \theta \text{ m}$$
$$z(t) = A - (6\theta/2\pi) \text{ m}$$
$$\theta(t) = B + 0{,}3t \text{ rad}$$

y A y B son constantes. La velocidad y aceleración vienen dadas por

$$\mathbf{v}(t) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}$$

donde

$$\dot{r} = 3\dot{\theta} \cos \theta \text{ m/s} \qquad \ddot{r} = 3\ddot{\theta} \cos \theta - 3\dot{\theta}^2 \text{ sen } \theta \text{ m/s}^2$$
$$\dot{\theta} = 0{,}3 \text{ rad/s} \qquad \ddot{\theta} = 0 \text{ rad/s}^2$$
$$\dot{z} = -\frac{6\dot{\theta}}{2\pi} \text{ m/s} = -0{,}286 \text{ m/s} \qquad \ddot{z} = 0 \text{ m/s}^2$$

Luego, cuando $\theta = 0°$

$$r = 15 \text{ m} \qquad \dot{r} = 0{,}9 \text{ m/s} \qquad r = 0 \text{ m/s}^2$$

y

$$\mathbf{v} = 0{,}900\mathbf{e}_r + 4{,}500\mathbf{e}_\theta - 0{,}286\mathbf{k} \text{ m/s}$$ Resp.

$$\mathbf{a} = -1{,}350\mathbf{e}_r + 0{,}540\mathbf{e}_\theta \text{ m/s}^2$$ Resp.

b. Cuando $\theta = 90°$

$$r = 18 \text{ m} \qquad \dot{r} = 0 \text{ m/s} \qquad \ddot{r} = -0{,}270 \text{ m/s}$$

y

$$\mathbf{v} = 5{,}400\mathbf{e}_\theta - 0{,}286\mathbf{k} \text{ m/s}$$
$$\mathbf{a} = -1{,}890\mathbf{e}_r \text{ m/s}^2$$ Resp.

c. Buscando el producto escalar de los vectores velocidad y aceleración del apartado b, se tiene

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$$

lo que demuestra que los vectores velocidad y aceleración son, efectivamente, perpendiculares. Resp.

PROBLEMA EJEMPLO 13.17

El radar de la figura 13-31 está siguiendo a un avión. En el instante representado, la posición de éste viene dada por $R = 19\,500$ m, $\theta = 110°$ y $\phi = 60°$. Comparando ésta con posiciones anteriores se estiman las derivadas $\dot{R} = -85{,}5$ m/s, $\ddot{R} = 4{,}5$ m/s^2, $\dot{\theta} = 9{,}0\,(10^{-3})$ rad/s, $\ddot{\theta} = 20\,(10^{-6})$ rad/s^2, $\dot{\phi} = 2{,}5\,(10^{-3})$ rad/s y $\ddot{\phi} = 80\,(10^{-6})$ rad/s^2. Para este instante, determinar:

a. La velocidad y aceleración del avión en coordenadas esféricas (R, ϕ, θ).
b. La velocidad y aceleración del avión en coordenadas rectangulares tales que el eje z corresponda al eje $\phi = 0°$ y el eje x corresponda al eje $\phi = 90°$ y $\theta = 0°$.
c. Los módulos de la velocidad y la aceleración del avión.

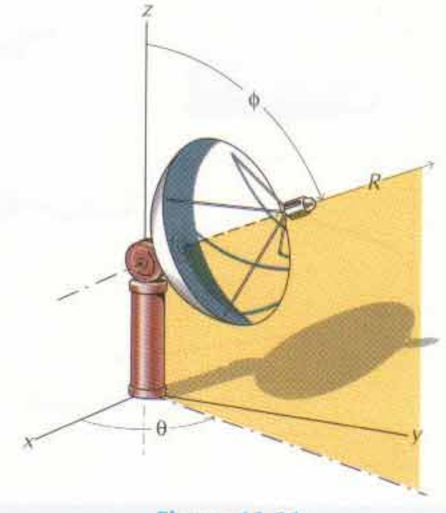


Figura 13-31

SOLUCIÓN

a. La velocidad del avión, en coordenadas esféricas, viene dada por la ecuación 13-50

$$\mathbf{v}(t) = \dot{R}\,\mathbf{e}_R + R\dot{\theta}\,\text{sen}\,\phi\mathbf{e}_\theta + R\,\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi$$
$$= -85{,}5\mathbf{e}_R + 151{,}99\mathbf{e}_\theta + 48{,}75\mathbf{e}_\phi \text{ m/s} \qquad \text{Resp.}$$

y la aceleración, en coordenadas esféricas, viene dada por la ecuación 13-51

$$\mathbf{a}(t) = (\ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\dot{\theta}\,\text{sen}^2\,\phi)\,\mathbf{e}_R$$
$$+ (R\ddot{\theta}\,\text{sen}\,\phi + 2\dot{R}\dot{\theta}\,\text{sen}\,\phi + 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi)\,\mathbf{e}_\theta$$
$$+ (R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi} - R\dot{\theta}^2\,\text{sen}\,\phi\cos\phi)\,\mathbf{e}_\phi$$
$$= 3{,}19\mathbf{e}_R - 0{,}556\mathbf{e}_\theta + 0{,}449\mathbf{e}_\phi \text{ m/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

b. Con referencia a la figura 13-30, los vectores unitarios del sistema de coordenadas esféricas $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_\phi$ se pueden relacionar con los vectores unitarios de las coordenadas rectangulares **i**, **j** y **k** de la manera siguiente:

$$\mathbf{e}_R = \text{sen}\,\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{e}_\theta = -\text{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}$$

y como R-ϕ-θ constituyen un sistema de coordenadas ortogonal directo

$$\mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_R$$

Luego, cuando $\theta = 110°$ y $\phi = 60°$

$$\mathbf{e}_R = -0{,}2962\mathbf{i} + 0{,}8138\mathbf{j} + 0{,}5000\mathbf{k}$$
$$\mathbf{e}_\theta = -0{,}9397\mathbf{i} - 0{,}3420\mathbf{j}$$
$$\mathbf{e}_\phi = -0{,}1710\mathbf{i} + 0{,}4699\mathbf{j} - 0{,}8660\mathbf{k}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= -85{,}5\,(-0{,}2962\mathbf{i} + 0{,}8138\mathbf{j} + 0{,}5000\mathbf{k})\\ &\quad + 151{,}99\,(-0{,}9397\mathbf{i} - 0{,}3420\mathbf{j})\\ &\quad + 48{,}75\,(-0{,}1710\mathbf{i} + 0{,}4699\mathbf{j} - 0{,}8660\mathbf{k})\\ &= -125{,}8\mathbf{i} - 98{,}7\mathbf{j} - 84{,}97\mathbf{k} \text{ m/s}\end{aligned}$$ Resp.

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t) &= 3{,}19\,(-0{,}2962\mathbf{i} + 0{,}8138\mathbf{j} + 0{,}5000\mathbf{k})\\ &\quad -0{,}556\,(-0{,}9397\mathbf{i} - 0{,}3420\mathbf{j})\\ &\quad +0{,}449\,(-0{,}1710\mathbf{i} + 0{,}4699\mathbf{j} - 0{,}8660\mathbf{k})\\ &= -0{,}50\mathbf{i} + 3{,}00\mathbf{j} + 1{,}21\mathbf{k} \text{ m/s}^2\end{aligned}$$ Resp.

c. Los módulos de la velocidad y la aceleración se pueden calcular a partir de las componentes en el sistema de coordenadas esférico o en el rectangular. Utilizando el primero

$$v = \sqrt{85{,}5^2 + 151{,}99^2 + 48{,}75^2} = 181{,}1 \text{ m/s}$$ Resp.

$$a = \sqrt{3{,}19^2 + 0{,}556^2 + 0{,}449^2} = 3{,}27 \text{ m/s}^2$$ Resp.

PROBLEMAS

13-130* El movimiento tridimensional de un punto está descrito por las relaciones

$$x = 6 \text{ sen } 6t \text{ m} \qquad y = 3\sqrt{3}\cos 6t \text{ m}$$
$$z = 3\cos 6t \text{ m}$$

Calcular la aceleración del punto y demostrar que tiene módulo constante.

13-131* El movimiento tridimensional de un punto está descrito por la relación

$$\mathbf{r} = 5t^2\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} + 15t^3 k \text{ m}$$

Calcular la velocidad y la aceleración del punto.

13-132 Un águila que cabalga sobre una corriente convectiva sigue una trayectoria helicoidal elíptica descrita por las relaciones

$$x = 15\cos 0{,}2t \text{ m} \qquad y = 10 \text{ sen } 0{,}2t \text{ m}$$
$$z = 0{,}8t \text{ m}$$

Calcular la velocidad y la aceleración del águila en $t = 80$ s.

13-133* El movimiento tridimensional de un punto está descrito por las relaciones

$$x = 2 \text{ sen } 3t \text{ m} \qquad y = 1{,}5t \text{ m}$$
$$z = 2 \cos 3t \text{ m}$$

a. Calcular la velocidad y la aceleración del punto en el instante $t = 25$ s.
b. Demostrar que la velocidad y la aceleración son perpendiculares para cualquier valor de t.

13-134 El movimiento tridimensional de un punto está descrito por las relaciones

$$r = 5(1 - e^{-t}) \text{ m} \qquad \theta = 2\pi t \text{ rad}$$
$$z = 3 \text{ sen } 3\theta \text{ m}$$

Calcular la velocidad y la aceleración del punto para

a. $t = 0$ s
b. $t = 3$ s
c. $t = 100$ s

13-135 El movimiento tridimensional de un punto situado en la superficie de un cilindro de revolución está descrito por las relaciones

$$r = 2 \text{ m} \qquad \theta = \pi t \text{ rad} \qquad z = \text{sen } 6\theta \text{ m}$$

Calcular la velocidad y la aceleración del punto en $t = 3$ s.

13-136* El movimiento tridimensional de un punto situado en la superficie de un cilindro de revolución está descrito por las relaciones

$$r = 2 \text{ m} \qquad \theta = \pi t \text{ rad} \qquad z = \text{sen}^2\, 4\theta \text{ m}$$

Calcular la velocidad y la aceleración del punto en $t = 5$ s.

13-137 El movimiento tridimensional de un punto está descrito por las relaciones

$$r = 5 \text{ sen } 3\theta \text{ m} \qquad \theta = 2\pi t \text{ rad} \qquad z = \theta/4 \text{ m}$$

Calcular la velocidad y la aceleración del punto en $t = 2$ s.

13-138* El movimiento tridimensional de un punto situado en la superficie de un cono de revolución está descrito por las relaciones

$$r = z \tan \beta \text{ m} \qquad \theta = 2\pi t \text{ rad} \qquad z = \frac{h\theta}{2\pi} \text{ m}$$

donde $\beta = 30°$ es el ángulo del vértice del cono y $h = 0{,}25$ m es la distancia que sube el punto al dar una vuelta alrededor del cono. Calcular la velocidad y la aceleración del punto para:

a. $t = 0$ s
b. $z = 1$ m

13-139* El movimiento tridimensional de un punto situado en la superficie de un cono de revolución de 3 m de altura está descrito por las relaciones

$$r = z \tan \beta \text{ m} \qquad \theta = 2\pi t \text{ rad} \qquad z = \frac{h\theta}{2\pi} \text{ m}$$

donde $\beta = 20°$ es el ángulo del vértice del cono y $h = 0{,}5$ m es la distancia que sube el punto al dar una vuelta alrededor del cono. Calcular la velocidad y la aceleración del punto en

a. El vértice del cono.
b. La parte más alta del cono.

13-140 Un avión desciende dando vueltas de radio constante e igual a 250 m. Si lleva una celeridad horizontal de 75 m/s (constante) y una celeridad hacia abajo de 5 m/s (que aumenta a razón de 2 m/s²), determinar la aceleración del avión.

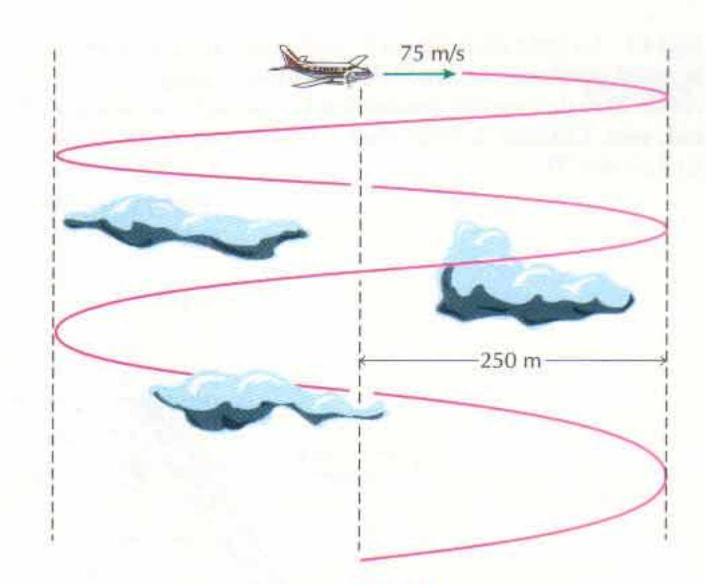


Figura P13-140

13-141* Un automóvil recorre la rampa de salida de un aparcamiento con una celeridad constante de 16 km/h. La rampa es una hélice de diámetro 36 m y paso de rosca 6 m (lo que desciende cada vuelta completa). Determinar el módulo de la aceleración del automóvil cuando desciende por la rampa.

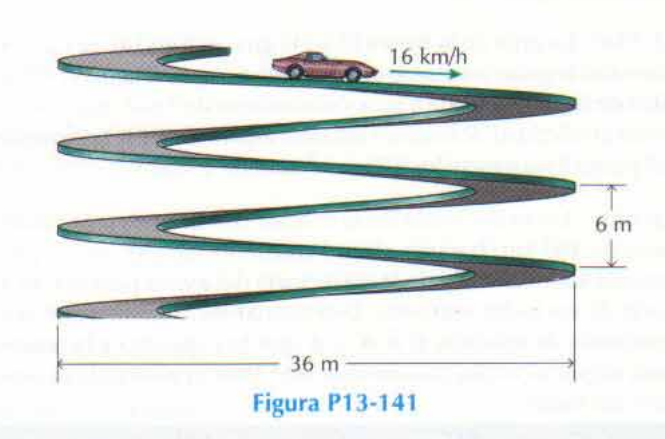


Figura P13-141

13-142 La grúa de la figura P13-142 gira en torno al eje *CD* a la razón constante de 3 rad / min. Al mismo tiempo, el aguilón *AB* de 20 m de largo va descendiendo a la razón constante de 5 rad / min. Calcular la velocidad y la aceleración del punto *B* cuando $\phi = 30°$.

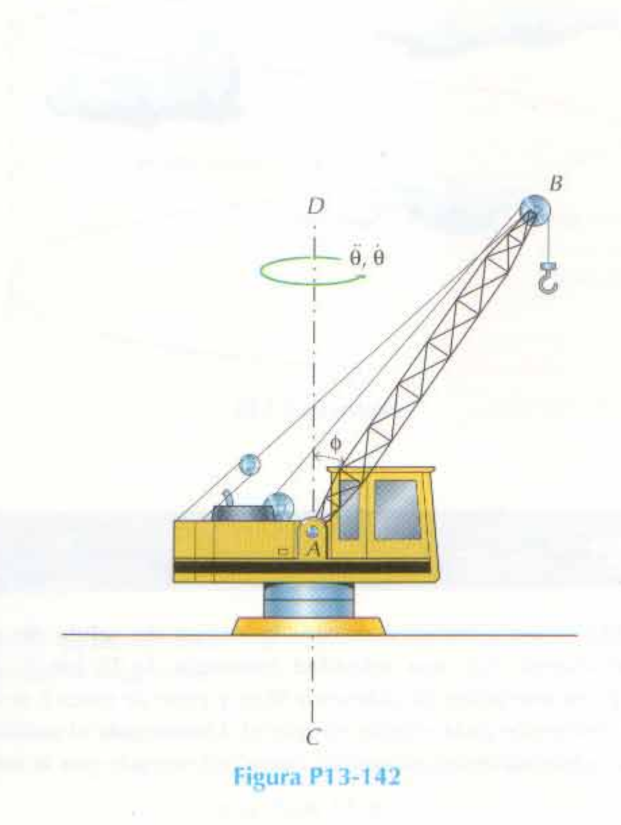


Figura P13-142

13-143 El aguilón *AB* de la grúa representada en la figura P13-142 tiene una longitud de 22,5 m. Cuando $\phi = 30°$, la grúa está girando en torno al eje *CD* con $\dot{\theta}$ = 3 rad / min, $\ddot{\theta}$ = −1 rad / min^2, $\dot{\phi}$ = −5 rad / min y $\ddot{\phi}$ = 2 rad / min^2. Calcular la aceleración del punto *B*.

13-144* La grúa de la figura P13-142 gira en torno al eje *CD* con celeridad angular constante ω. Al mismo tiempo, el aguilón *AB* de 20 m de largo desciende a la razón constante de 3 rad / min. Determinar la celeridad de rotación máxima ω para la cual la aceleración del punto *B* no supere los 0,25 m / s^2 cuando $\phi = 30°$.

13-145 Un avión vuela hacia el oeste con una celeridad constante de 480 km / h a una altitud constante de 1500 m. La proyección sobre el suelo de la trayectoria del avión pasa 900 m al norte de un radar seguidor. Determinar las celeridades y aceleraciones de rotación $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, $\dot{\phi}$, y $\ddot{\phi}$ que hay que dar a la antena para seguir al avión cuando éste esté 1800 m al este de la estación del radar.

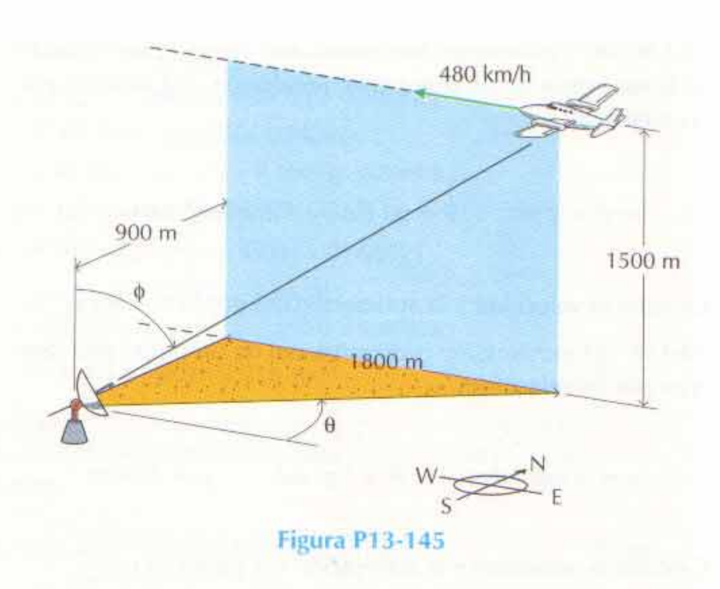


Figura P13-145

13-146* Un avión vuela hacia el oeste con una celeridad constante de 100 m / s a una altitud constante de 1500 m. La proyección sobre el suelo de la trayectoria del avión pasa 2 km al norte de una estación de radar. Determinar las celeridades y aceleraciones de rotación $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, $\dot{\phi}$, y $\ddot{\phi}$ que hay que dar a la antena para seguir al avión cuando éste esté en el mismo meridiano que la estación del radar.

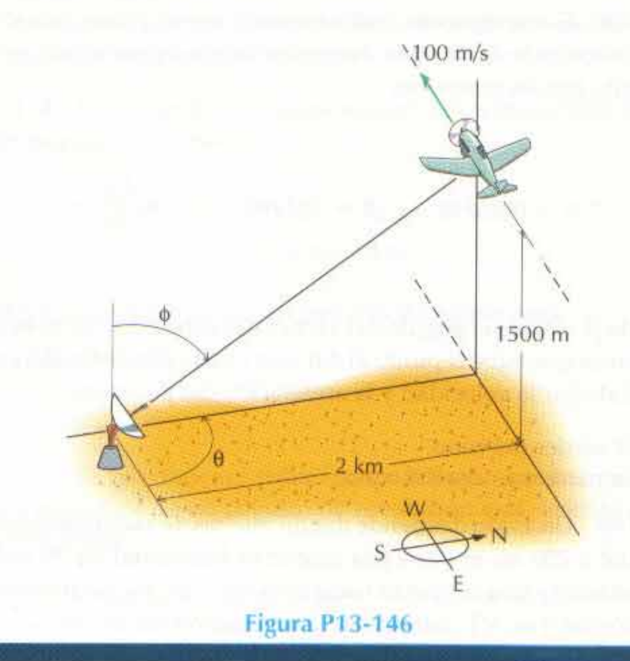


Figura P13-146

RESUMEN

La Cinemática estudia cómo se mueven las partículas. Describe cómo varían la velocidad y la aceleración de un cuerpo con el tiempo y con sus cambios de posición. El estudio de la Cinética, que relaciona el movimiento con las fuerzas que lo originan, requiere una sólida base de Cinemática.

Una partícula o punto es un cuerpo de cuyo tamaño se puede prescindir al estudiar su movimiento. Tan sólo hay que considerar la posición del centro de masa de dicho cuerpo. La orientación de éste o su rotación no influyen en la descripción de su movimiento. Un punto o partícula puede ser muy pequeño o muy grande. El que sea pequeño no siempre garantiza que el cuerpo pueda modelarse por un punto; el que sea grande no siempre impide que dicho cuerpo se pueda modelar por un punto. Que un cuerpo sea grande o pequeño está relacionado con la longitud del camino que sigue, con la separación entre cuerpos o con ambas cosas.

Las magnitudes cinéticas que se utilizan en la descripción del movimiento de un punto son el tiempo, la posición (incluidos el desplazamiento y la distancia total recorrida), la velocidad y la aceleración. Las diversas magnitudes cinemáticas están relacionadas a través de ecuaciones diferenciales. Los problemas de Cinemática consisten en determinar una o más de las magnitudes anteriores a partir de las que se dan como datos del problema.

La velocidad de un punto es la variación por unidad de tiempo de su posición

$$\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{r}_{P/O}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_{P/O} \tag{13-5}$$

A diferencia del vector de posición $\mathbf{r}_{P/O}$, la velocidad es independiente de la situación del origen del sistema de coordenadas. La dirección de la velocidad $\mathbf{v}_P$ es tangente a la trayectoria del punto. En función de coordenadas cartesianas fijas, la velocidad es

$$\mathbf{v}_P = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \tag{13-6}$$

La aceleración del punto P es la variación por unidad de tiempo de su velocidad

$$\mathbf{a}_P = \frac{d\mathbf{v}_P}{dt} = \dot{\mathbf{v}}_P = \frac{d^2\mathbf{r}_{P/O}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}_{P/O} \tag{13-7}$$

También la aceleración es independiente de la situación del origen del sistema de coordenadas. En función de coordenadas cartesianas fijas, la aceleración del punto P es

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_P &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = \dot{v}_x\mathbf{i} + \dot{v}_y\mathbf{j} + \dot{v}_z\mathbf{k} \\ &= \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}\end{aligned} \tag{13-8}$$

El movimiento rectilíneo es el que tiene lugar a lo largo de una recta. Si el sistema de coordenadas se orienta de manera que el eje x coincida con la recta del movimiento, entonces la posición, la velocidad y la aceleración quedarán definidas al dar solamente sus componentes x. Es decir, el vector de posición,

el vector velocidad y el vector aceleración quedarán determinados dando sus "módulos afectados de signo" x, $v = \dot{x}$ y $a = \ddot{x}$ respectivamente. Los valores positivos de x, v y a indican que los *vectores* tienen el sentido de las coordenadas positivas, mientras que los valores negativos indican que los *vectores* tienen el sentido de las coordenadas negativas.

Cuando dos o más puntos están animados de movimiento rectilíneo, pueden escribirse ecuaciones separadas para describir sus movimientos. Los puntos pueden moverse a lo largo de una misma recta o a lo largo de rectas distintas. Si la posición de un punto depende de la posición de otro u otros puntos, podrá escribirse una ecuación de ligadura que relacione las posiciones de ambos puntos. Derivando la ecuación de ligadura se obtendrán las ecuaciones de la velocidad y la aceleración relativas.

En la mayoría de los problemas, la aceleración de un punto se deduce de las fuerzas que actúan sobre él. Según sea la naturaleza de las fuerzas, la aceleración puede ser función del tiempo, función de la velocidad o función de la posición del punto. La velocidad y la posición del punto se obtienen integrando las definiciones de aceleración y velocidad, respectivamente.

La elección del sistema de coordenadas a utilizar en un problema particular dependerá de la geometría del problema, de cómo se den sus datos y del tipo de solución que se desee. Tres de los sistemas de coordenadas más corrientemente utilizados para representar el movimiento son: coordenadas cartesianas rectangulares, que es el más conveniente cuando las componentes x e y del movimiento se dan independientemente una de otra y no dependen entre sí; coordenadas polares, que es el más conveniente cuando la posición del punto se mide relativa a un punto fijo o se mueve dicho punto a lo largo de un brazo giratorio; y las coordenadas normal/tangencial, que es el más conveniente cuando el punto se mueve sobre una superficie de forma conocida.

PROBLEMAS DE REPASO

13-147* Hallar la aceleración media de

a. Un cohete disparado por un avión cuando pase de 0 a 192 km/h en 4 s

b. Un bólido que utiliza un paracaídas para pasar de 160 km/h a 32 km/h en 5 s.

13-148* Un camión remolcador tira de un automóvil que se halla en un plano inclinado 25° utilizando poleas en la forma que se indica en la figura P13-148. Si el camión acelera a razón de 0,8 m/s^2, determinar la celeridad y aceleración del automóvil 5 s después de que el camión parta del reposo.

13-149 En el béisbol, la distancia entre el lanzador y la placa es de 18 m (fig. P13-149). Si el lanzador lanza una bola rápida con una celeridad inicial de 42 m/s, determinar

a. El descenso a de la pelota si se lanza horizontalmente ($\theta_0 = 0$).

b. El ángulo inicial θ_0 para el cual la pelota alcanzará al captor a su nivel inicial ($a = 0$).

c. La altura máxima que alcanzará la pelota si se lanza según el ángulo θ_0 del apartado b.

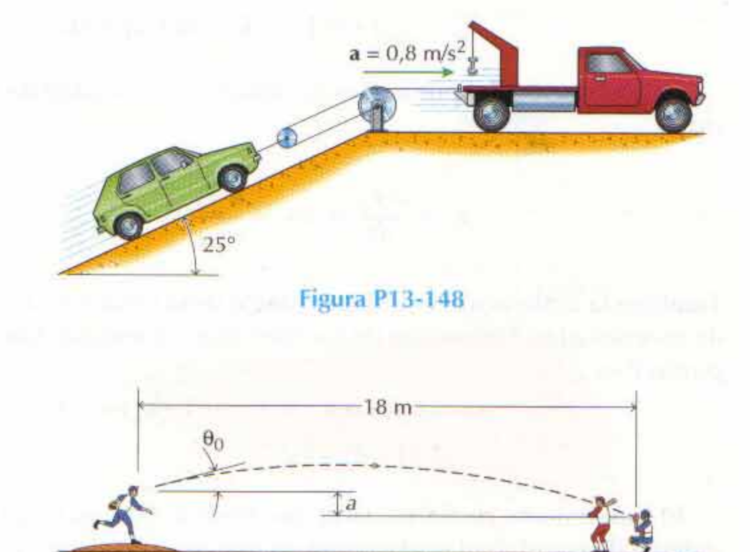


Figura P13-148

Figura P13-149

13-150* Un automóvil de la policía está estacionado en una zona escolar cuando por allá pasa otro auto con velocidad excesiva. El auto de la policía parte del reposo en el instante en que el otro pasa ante él, acelera a 2 m/s^2 hasta alcanzar una celeridad de 80 km/h y luego la mantiene constante. Si la celeridad del otro es constante e igual a 50 km/h, determinar qué distancia deberá recorrer el auto de la policía para dar caza al infractor.

13-151 Un radar que sigue a un avión da las coordenadas del plano en la forma de $r(t)$ y $\theta(t)$ (fig. P13-151). En un instante, $\theta = 60°$ y $r = 3000$ m. Medidas sucesivas de r y θ permiten estimar que las derivadas son $\dot{r} = 75$ m/s, $\dot{\theta} = -0{,}0433$ rad/s, $\ddot{r} = 3{,}225$ m/s^2 y $\ddot{\theta} = -7{,}8(10^{-4})$ rad/s^2. Determinar, para este instante,

a. La velocidad y aceleración del avión.
b. El radio de curvatura de la trayectoria del avión.

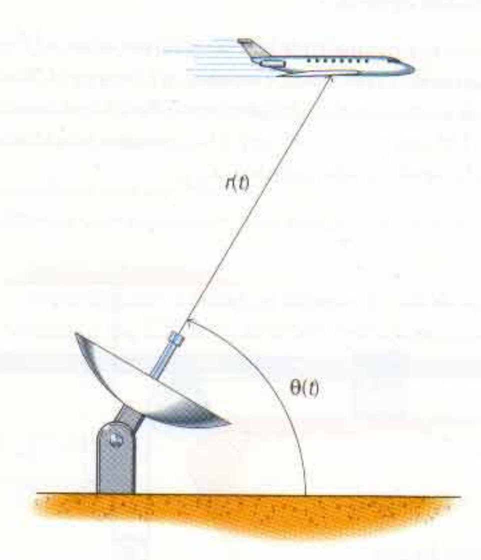


Figura P13-151

13-152 Dos automóviles se van aproximando por una carretera recta y estrecha. El auto A tiene una celeridad inicial de 60 km/h y el B de 30 km/h. Si ambos conductores aplican sus frenos cuando están separados 45 m y ambos automóviles disminuyen la velocidad a razón de 3 m/s^2, determinar:

a. Si chocarán.
b. En caso de hacerlo, la velocidad relativa de choque.

13-153* Un lanzador de peso lo lanza según un ángulo de 40° sobre la horizontal desde una altura de 1,8 m (fig. P13-153). Si el peso llega al suelo a una distancia de 15 m, determinar

a. La celeridad inicial v_0 del peso.
b. La altura máxima h alcanzada por el peso.
c. La distancia d a la cual se alcanza la altura máxima.

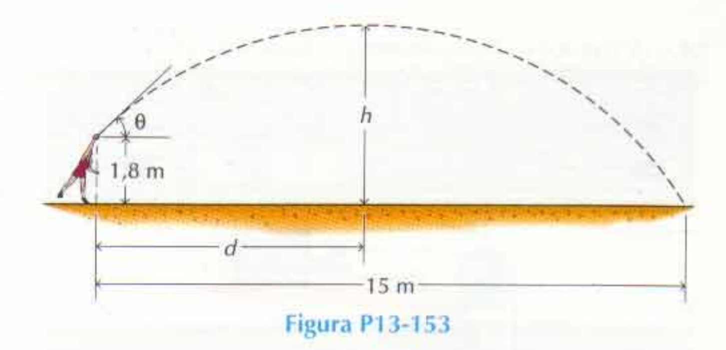


Figura P13-153

13-154 Una leva tiene una forma dada por $r = 20 + 15 \cos \theta$ mm (fig. P13-154). El pasador P corre por una guía dirigida a lo largo del brazo AB estando siempre en contacto con la leva por acción de un resorte. El brazo AB gira en sentido antihorario alrededor de A con velocidad angular constante de 30 rev/min. Sabiendo que $\theta = 0$ en $t = 0$, determinar:

a. La velocidad **v** y la aceleración **a** del pasador en $t = 0{,}6$ s
b. El radio de curvatura de su trayectoria en $t = 0{,}6$ s

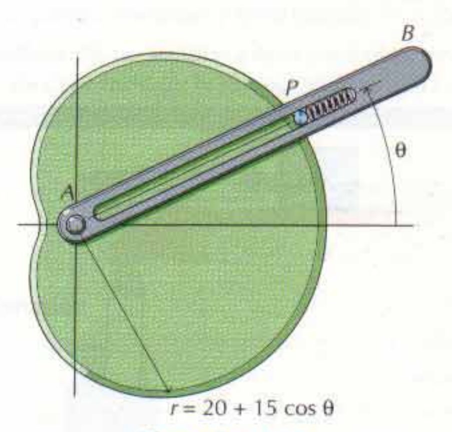
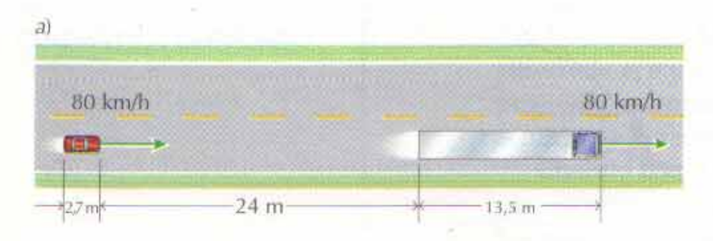


Figura P13-154

13-155* El coche y el camión representados en la figura P13-155*a* van ambos a 80 km/h cuando el coche decide adelantar al camión. Si el coche acelera a $1{,}2 \text{ m/s}^2$ y vuelve al carril de la derecha cuando se halla 10,5 m delante del camión (fig. P13-155*b*), determinar:

a. La distancia que recorre el coche durante el adelantamiento.
b. La celeridad del coche cuando vuelve al carril de la derecha.

a)



b)

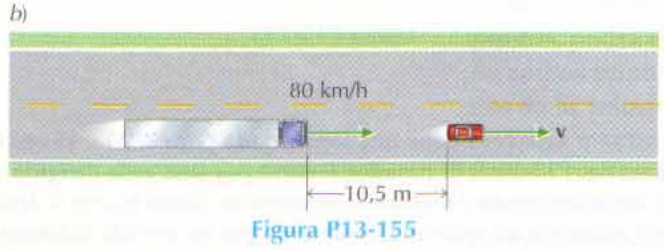




Figura P13-155

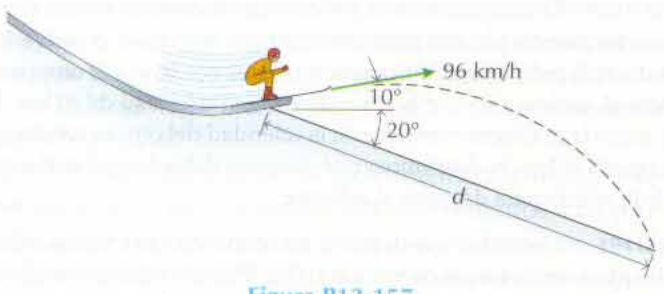


Figura P13-157

13-156* En la figura P13-156, el bloque A se está moviendo hacia la derecha con celeridad de 4 m/s; la celeridad disminuye a razón de 0,15 m/s^2. En el instante representado $d_A = 8$ m y $d_B = 6$ m. Determinar la velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ y la aceleración relativa $\mathbf{a}_{B/A}$.

Figura P13-156

13-157 Un esquiador sale del extremo de un trampolín a 96 km/h en una dirección que forma 10° por encima de la horizontal (fig. P13-157). Determinar:

a. La altura máxima que alcanzará por encima del extremo del trampolín.
b. El tiempo de vuelo del salto.
c. La distancia del salto (distancia d medida a lo largo de la pendiente).

13-158* Un automóvil va a 90 km/h por una carretera paralela a la vía del ferrocarril cuando alcanza a un tren. Si éste tiene una longitud de 800 m y va a 65 km/h, determinar el tiempo que tardará en recorrerlo si se mueven:

a. En el mismo sentido.
b. En sentidos opuestos.

13-159 En la figura P13-159, el bloque A se está moviendo hacia la izquierda con una celeridad de 90 cm/s; la celeridad está aumentando a razón de 24 cm/s^2. En el instante representado, $d_A = 180$ cm y $d_B = 240$ cm. Determinar la velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ y la aceleración relativa $\mathbf{a}_{B/A}$.

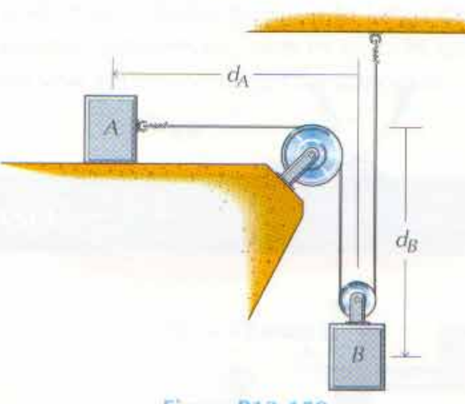


Figura P13-159

13-160 Una partícula recorre una trayectoria dada por $r(t) = 50 \cos 3\theta$ donde $\theta(t)$ se expresa en radianes y r en milímetros. Si $\dot{\theta} = 3$ rad/s (constante) y $\theta = 0$ cuando $t = 0$, determinar:

a. La velocidad **v** y la aceleración **a** de la partícula cuando $t = 0,8$ s
b. El radio de curvatura de la trayectoria cuando $t = 0,8$ s

13-161* Un baloncestista lanza la pelota a una canasta situada a 7,5 m, según se indica en la figura P13-161. Determinar:

a. La celeridad inicial v_0 necesaria para el enceste.
b. El ángulo ϕ de la trayectoria del balón cuando penetre en la canasta.

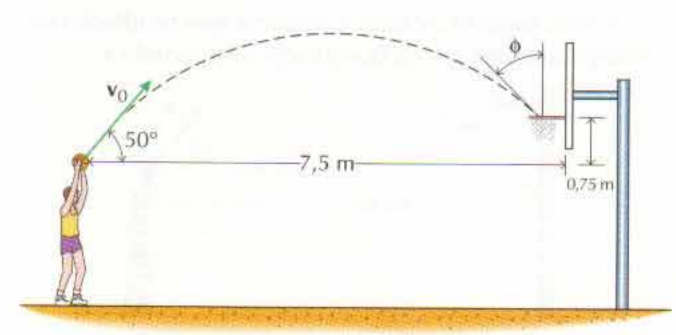


Figura P13-161

13-162* Un tren rápido va de Washington a Philadelphia (distancia 80 km) en 35 minutos. La celeridad máxima del tren es de 225 km/h. Si la desaceleración del tren es el doble de su aceleración, determinar:

a. La desaceleración del tren.
b. La distancia que recorre el tren yendo a su velocidad máxima.

13-163 En la figura P13-163, el bloque B está descendiendo con una celeridad de 1,5 m/s; la celeridad disminuye a razón de 7,5 cm/s^2. En el instante representado, d_A = 3,6 m y d_B = 2,7 m. Determinar la velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ y la aceleración relativa $\mathbf{a}_{B/A}$.

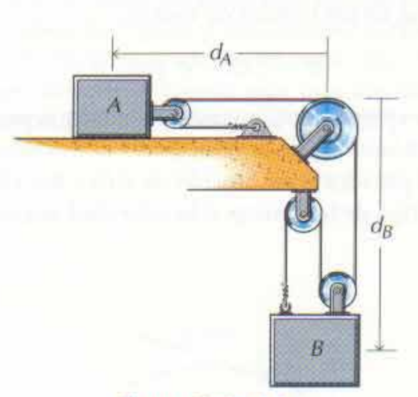


Figura P13-163

13-164 Una partícula sigue una trayectoria dada por $r(t)$ = 125 sin $\theta \cos^2\theta$ donde $\theta(t)$ se expresa en radianes y r en milímetros. Si $\dot{\theta}$ = 2 rad/s (constante) y θ = 0 cuando t = 0, determinar:

a. La velocidad **v** y la aceleración **a** de la partícula cuando t = 0,6 s.
b. El radio de curvatura de la trayectoria cuando t = 0,6 s.

Problemas para resolver con ordenador

C13-165 La lluvia cae con una celeridad de 27 m/s formando un ángulo de 20° con la vertical (fig. P13-165). Representar gráficamente el ángulo ϕ de incidencia aparente de la lluvia sobre el parabrisas en función de la celeridad del coche v_c ($0 \le v_c \le 130$ km/h),

a. Si el coche se mueve contra la lluvia.
b. Si el coche se mueve a favor de la lluvia.

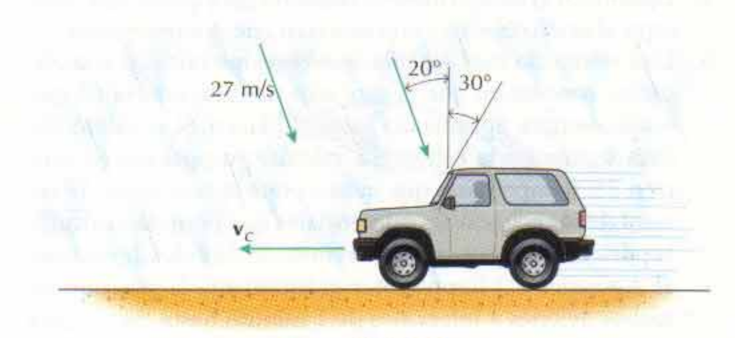


Figura P13-165

C13-166 El brazo AC del mecanismo seguidor de la leva representado en la figura P13-166 gira con celeridad angular constante $\omega = 150$ rev/min. Un resorte mantiene al pasador B apretado contra el contorno de la leva. Si la ecuación que describe la forma de los lóbulos de ésta es

$$R = 125 + 50 \cos 3\theta$$

donde R se expresa en milímetros, calcular y representar gráficamente el módulo v_B de la velocidad y el módulo a_B de la aceleración del pasador B en función de θ ($0 \le \theta \le 180°$). ¿Sería la misma la forma de las curvas si la celeridad angular ω fuese el doble?

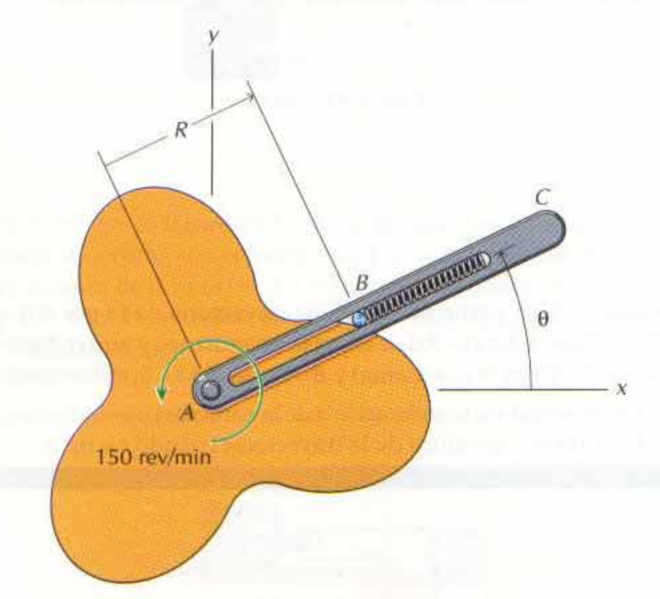


Figura P13-166

C13-167 Un avión A vuela hacia el norte con una celeridad constante de 768 km/h cuando va a interceptarlo un avión de caza J, según se indica en la figura P13-167. (Los dos aviones vuelan a la misma altitud). Si el caza lleva una celeridad constante de 960 km/h,

a. Determinar el tiempo mínimo necesario para que el caza intercepte al avión objetivo y la posición en que es interceptado.
b. Una estrategia más sencilla, que no exige cálculos complicados, consiste en que el caza siga una trayectoria tal que vuele siempre apuntando hacia el blanco. Si el piloto del caza siguiera esta estrategia, calcular su posición en función del tiempo hasta que interceptara al otro avión. (Para resolver las ecuaciones diferenciales que permitan calcular la posición del caza, utilícese el método de Euler descrito en el Apéndice C.) Representar gráficamente la posición de ambos aviones a intervalos de 1 minuto hasta que el caza intercepte al otro. Determinar el tiempo y la posición en que tiene lugar el alcance. Comparar este resultado con el tiempo mínimo que da la solución del apartado a.

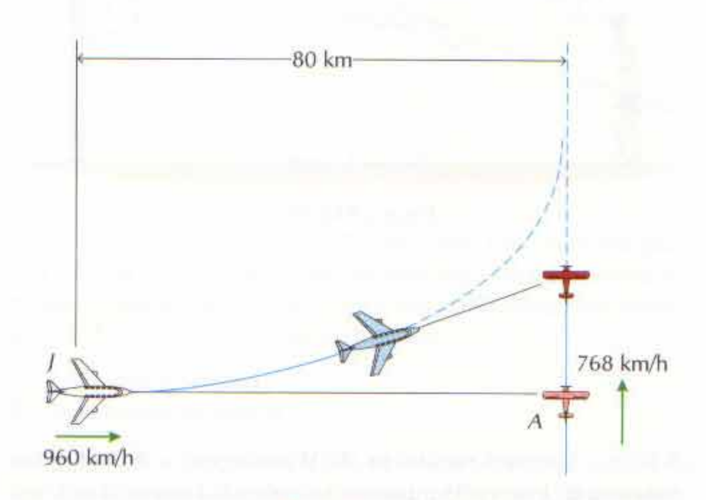


Figura P13-167

C13-168 Un baloncestista lanza el balón a canasta con una celeridad inicial v_0 bajo un ángulo θ_0, según se indica en la figura P13-168. Para que el balón atraviese el aro, debe incidir según un ángulo ϕ inferior a 70°. Otra restricción es que la máxima altura que alcance el balón no debe ser mayor que $h = 3$ m.

a. Calcular y representar gráficamente la celeridad inicial v_0 en función del ángulo inicial θ_0 ($30 \le \theta_0 \le 70°$) para lograr el enceste. (No tener en cuenta los tiros que se apoyen en el tablero y entren.)
b. Como el aro es algo mayor que el balón, para lograr el enceste no es necesario que el centro de éste pase exactamente por el centro de aquél. Ahora bien, los tiros que penetren en la canasta bajo un ángulo ϕ pequeño deben ser más precisos que los que lo hagan bajo un ángulo mayor. Supóngase que el balón pueda quedar corto o largo en

10 mm	para	$65° \le \phi \le 70°$
25 mm	para	$60° \le \phi \le 65°$
50 mm	para	$50° \le \phi \le 60°$
100 mm	para	$40° \le \phi \le 50°$
125 mm	para	$30° \le \phi \le 40°$
150 mm	para	$15° \le \phi \le 30°$
175 mm	para	$0° \le \phi \le 15°$

y representar gráficamente la gama de velocidades iniciales aceptables para cada ángulo θ_0 ($30° \le \theta_0 \le 70°$).

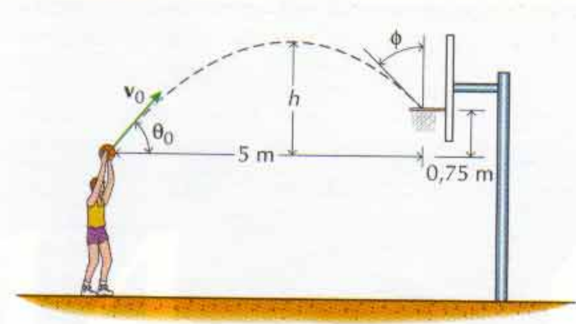


Figura P13-168

C13-169 Mediante un torno, se tira hacia la izquierda del carro C representado en la figura P13-169. El gancho de la parte superior del carro está curvado de tal forma que se desenganche el cable cuando $x = 5$ cm. Si el torno está devanando el cable a la razón constante de 60 cm/s:

a. Calcular y representar gráficamente la celeridad v_C y la aceleración a_C del carro en función de su posición x $(-60 \le x \le 180$ cm).
b. Representar gráficamente la posición x, la celeridad v_0 y la aceleración a_C del carro en función del tiempo t $(0 \le t \le 3$ s).

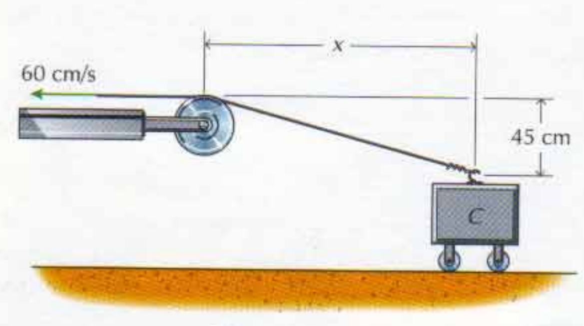


Figura P13-169

C13-170 Un zorro inicia la persecución de un conejo según se indica en la figura P13-170*a*. El conejo corre con celeridad constante de 6 m/s siguiendo una trayectoria circular de 12 m de radio y el zorro corre con celeridad constante de 7 m/s. El camino que sigue está siempre dirigido hacia la posición del conejo en cada instante.

a. Utilícese el método de Euler de resolución de ecuaciones diferenciales (v. Apéndice C) para calcular la posición del zorro en función del tiempo hasta que atrapa al conejo (supóngase que el zorro atrapa al conejo cuando la separación entre ellos es inferior a 0,1 m). Representar gráficamente las posiciones de ambos animales a intervalos de 0,5 s hasta que el zorro cace al conejo. En vez de corriendo siempre hacia el conejo ¿cuál debería ser el camino que siguiera el zorro para cazar al conejo en el mínimo tiempo posible?
b. Repetir el apartado a para el caso en que el conejo recorra una circunferencia alejándose del zorro (fig. P13-170*b*) y para el caso en que el conejo siga una trayectoria zigzagueante alejándose del zorro (fig. P13-170*c*).

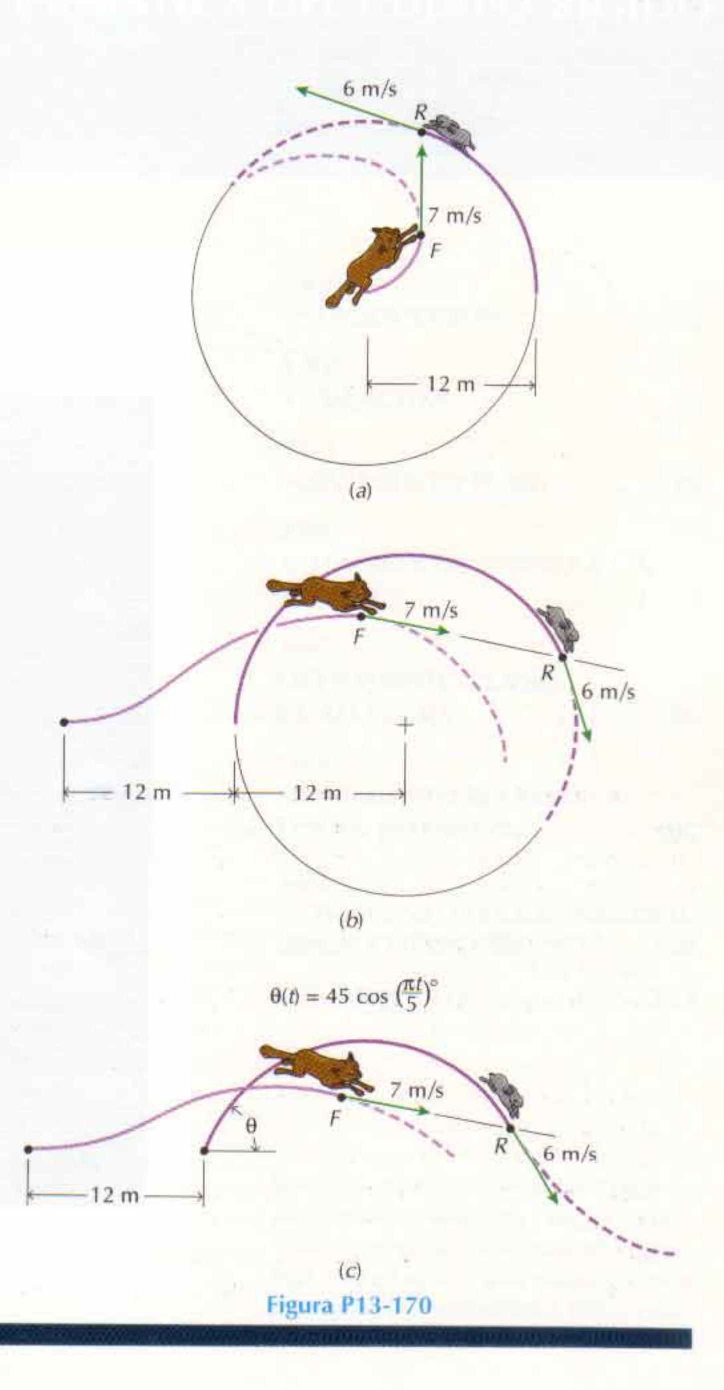
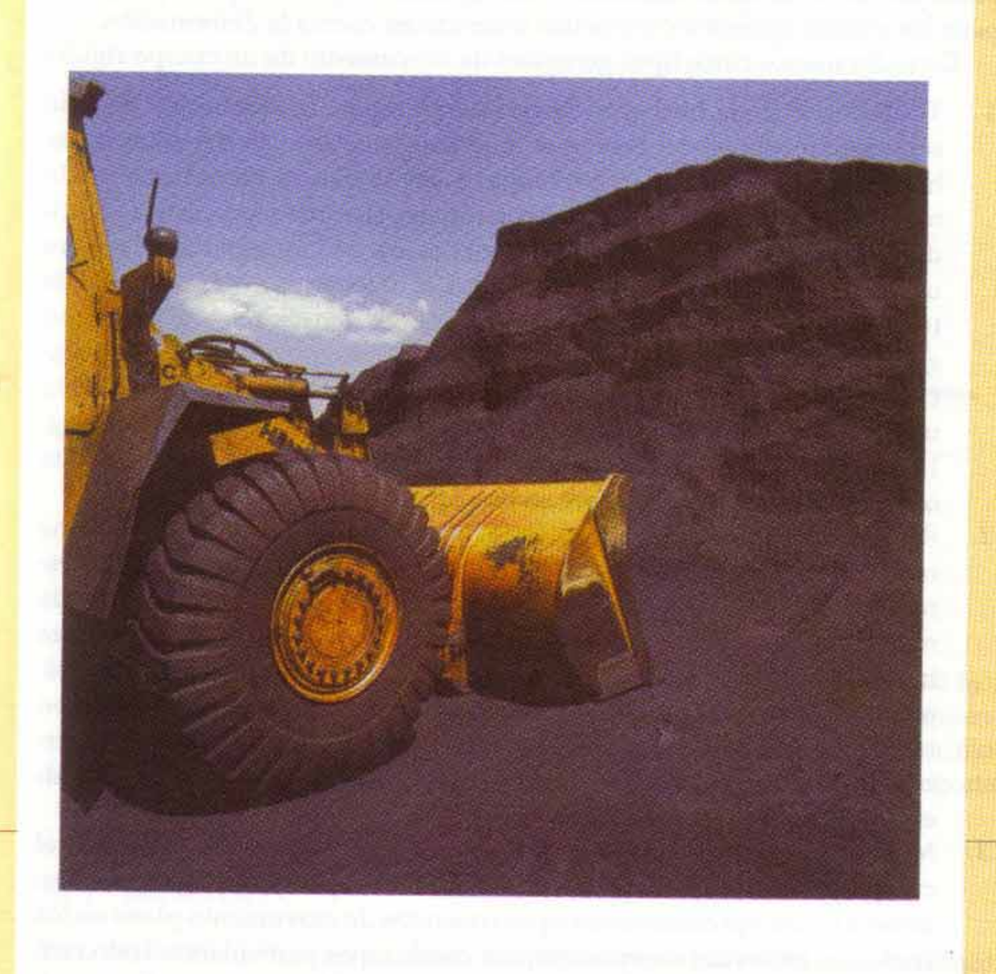


Figura P13-170

14 CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO



Una pala mecánica presenta varios tipos de movimiento de cuerpo rígido. Cuando el vehículo avanza, el cuerpo está en traslación y las ruedas y la pala presentan un movimiento plano cualquiera.

14.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior hemos analizado la Cinemática del punto. Veíamos que para describir perfectamente el movimiento de un punto bastaba con conocer en todo instante su situación. Sin embargo, en el caso del movimiento de un sólido la descripción completa de su movimiento exige que se den la situación y la orientación del cuerpo. En la Cinemática del cuerpo rígido intervienen magnitudes tanto lineales como angulares.

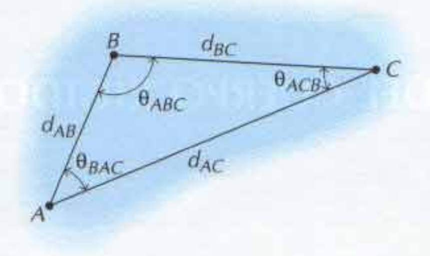


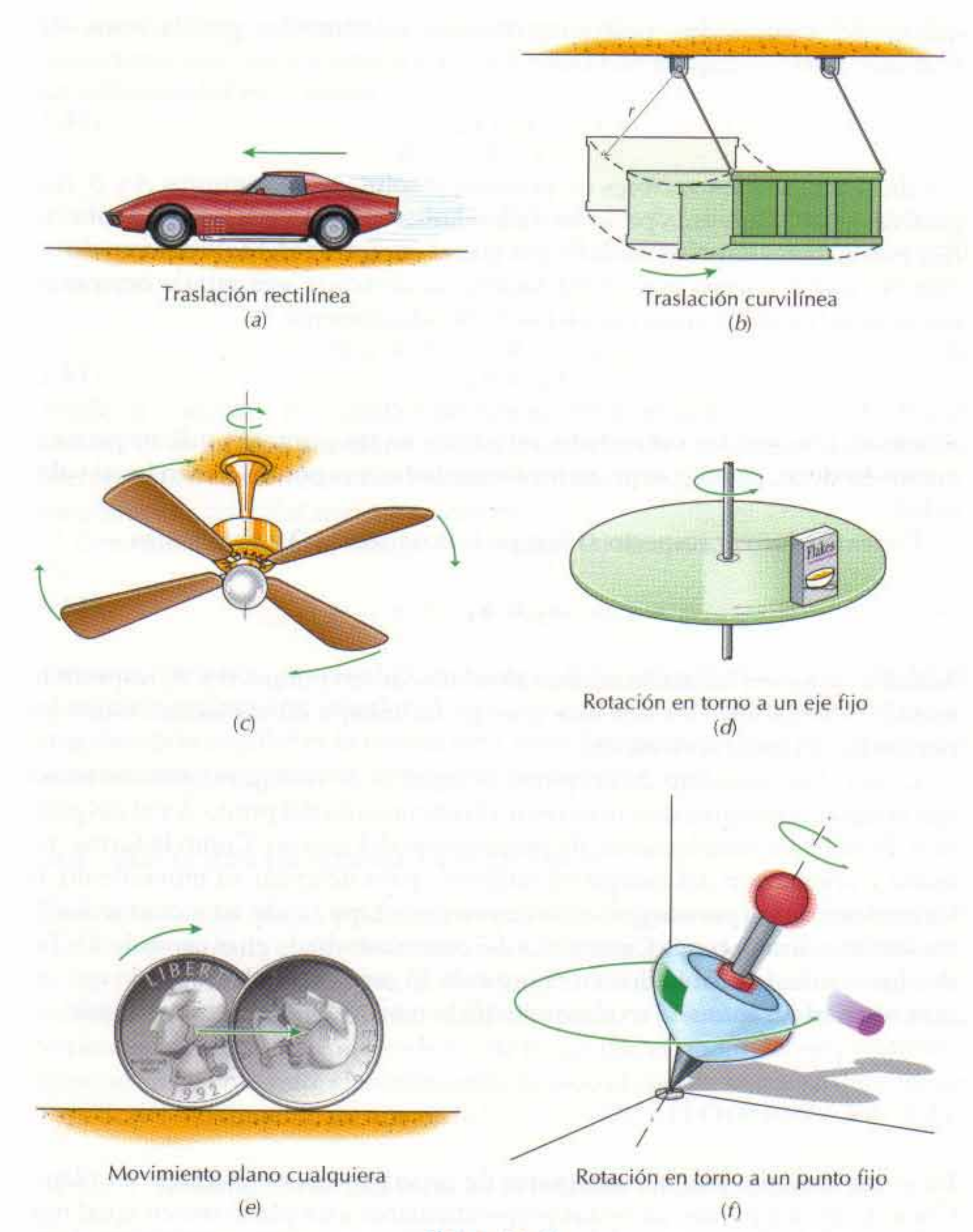
Figura 14-1

Los sólidos que consideraremos en este capítulo y en los restantes se supondrá que son rígidos. En un cuerpo rígido, la separación entre dos puntos cualesquiera es fija e independiente del tiempo (fig. 14-1). Evidentemente, si las distancias entre dos puntos cualesquiera son fijas, también lo serán los ángulos determinados por toda tripleta de puntos (fig. 14-1).

Desde luego, los cuerpos reales nunca son rígidos. No obstante, en la mayoría de las aplicaciones técnicas, las deformaciones debidas a las fuerzas aplicadas suelen ser relativamente pequeñas y las variaciones de forma del cuerpo debidas a las fuerzas aplicadas tendrán un efecto despreciable sobre la aceleración producida por un sistema de fuerzas o sobre las fuerzas que se precisan para producir un movimiento dado. Una vez terminado el análisis cinético, deberán calcularse las deformaciones. Si son grandes, es posible que haya que repetir los análisis cinemático y cinético teniendo en cuenta la deformación.

Consideraremos cinco tipos generales de movimiento de un cuerpo rígido:

1. **Traslación** En la traslación de un cuerpo rígido, la orientación de todo segmento rectilíneo del cuerpo se mantiene constante. Es decir, las rectas horizontales se mantienen horizontales, las verticales verticales, etc. Un movimiento en el cual una recta se mantenga siempre paralela a la velocidad, como sucede con rectas horizontales de un automóvil que recorra una carretera horizontal recta (fig. 14-2*a*), se dice que es un movimiento de **traslación rectilínea**. En la traslación rectilínea, todo punto del cuerpo sigue una trayectoria rectilínea en el sentido del movimiento. En una **traslación curvilínea**, la orientación de todo segmento rectilíneo sigue siendo invariable pero los distintos puntos no siguen trayectorias rectilíneas (fig. 14-2*b*). En la **traslación coplanaria**, la trayectoria de cada punto —sea recta o curva— se mantiene siempre en un plano.
2. **Rotación en torno a un eje fijo** En la rotación alrededor de un eje fijo, una recta del cuerpo, el eje de rotación, está fija. Los puntos que no son del eje recorren trayectorias circulares centradas en el eje (fig. 14-2*c*). Si el eje de rotación no corta al cuerpo, podemos imaginar que éste se extiende hasta incluir el eje de rotación (fig. 14-2*d*). Es decir, a fines cinemáticos, el movimiento del cuerpo es el mismo que tendría si formara parte de un cuerpo rígido mayor que incluyera al eje de rotación. Como cada trayectoria circular está contenida en un plano, la rotación de un cuerpo en torno a un eje fijo es un movimiento plano.
3. **Movimiento plano cualquiera** En un movimiento plano, cada punto del cuerpo permanece en un plano. La traslación coplanaria y la rotación en torno a un eje fijo constituyen tipos concretos de movimiento plano en los cuales las rectas del cuerpo cumplen condiciones particulares. Todo otro tipo de movimiento plano entra en la categoría de movimiento plano cualquiera (fig. 14-2*e*).



Traslación rectilínea
(*a*)

Traslación curvilínea
(*b*)

(*c*)

Rotación en torno a un eje fijo
(*d*)

Movimiento plano cualquiera
(*e*)

Rotación en torno a un punto fijo
(*f*)

Figura 14-2

4. **Rotación en torno a un punto fijo** En la rotación en torno a un punto fijo, uno de los puntos del cuerpo está fijo (fig. 14-2*f*). Cada punto se mueve siguiendo una trayectoria situada en la superficie de una esfera centrada en el punto fijo.
5. **Movimiento cualquiera** Los demás movimientos entran en la categoría de movimiento cualquiera.

14.2 TRASLACIÓN

En la traslación de un cuerpo rígido, la orientación de todo segmento rectilíneo se mantiene constante. Es decir, las rectas horizontales se mantienen horizontales, las verticales se mantienen verticales, etc. Si A y B son dos puntos cuales-

quiera del cuerpo, sus posiciones estarán relacionadas por la regla del triángulo para la suma de vectores:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \tag{14-1}$$

donde $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ son los vectores de posición absolutos de los puntos A y B, respectivamente, y $\mathbf{r}_{B/A}$ es la posición de B relativa a A. Como la posición relativa $\mathbf{r}_{B/A}$ es constante tanto en módulo (ya que el cuerpo es rígido) como en dirección (ya que el cuerpo está en traslación), su derivada será nula y derivando respecto al tiempo la ecuación 14-1 se tiene simplemente

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A \tag{14-2}$$

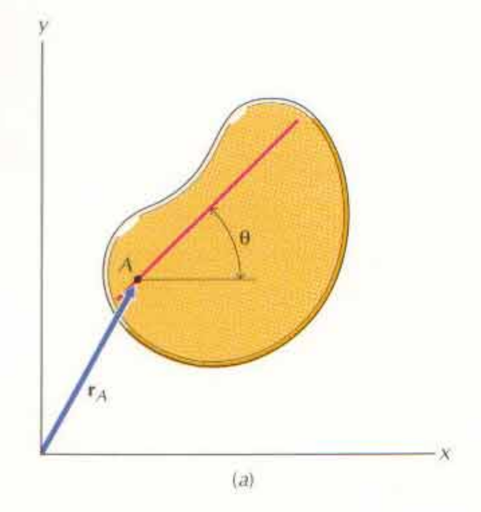
donde $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ son las velocidades absolutas de los puntos A y B, respectivamente. Es decir, en un cuerpo en traslación todos sus puntos tienen igual velocidad.

Podemos derivar respecto al tiempo la ecuación 14-2 y obtenemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A \tag{14-3}$$

donde $\mathbf{a}_A$ y $\mathbf{a}_B$ son las aceleraciones absolutas de los puntos A y B, respectivamente. La ecuación 14-3 nos dice que, en un cuerpo en traslación, todos los puntos tienen igual aceleración.

Como el movimiento de un punto es igual al de cualquier otro, no habrá que establecer ninguna distinción ente el movimiento del punto A y el del punto B. Se hablará, simplemente, de movimiento del cuerpo. Como la forma, tamaño y orientación del cuerpo no importan para describir su movimiento, la Cinemática de los puntos que constituyen un cuerpo rígido en movimiento de traslación coincide con la Cinemática del punto estudiada en el capítulo 13. Todos los resultados obtenidos en el capítulo 13 serán aplicables, por lo que no será necesario ir más allá en el estudio de la traslación de un cuerpo rígido.



(a)

(b)

Figura 14-3

14.3 MOVIMIENTO PLANO

En el movimiento plano, cada punto de un cuerpo permanece en un plano. Como todos los puntos de rectas perpendiculares a un plano tienen igual movimiento, bastará considerar el movimiento en un solo plano. En lo que sigue, utilizaremos el plano que contiene al centro de masa, al que llamaremos plano del movimiento.

Como los puntos no pueden salir del plano del movimiento, la posición de un cuerpo rígido en movimiento plano quedará determinada al dar la situación de un punto y la orientación de una recta del plano del movimiento (fig. 14-3). La orientación de la recta se puede determinar o bien dando el ángulo que forma con una dirección fija (fig. 14-3*a*) o dando la situación de dos puntos cualesquiera de la recta (fig. 14-3*b*). El movimiento de todo el cuerpo podrá determinarse a partir del movimiento de dicho punto y el movimiento de la recta.

Importa observar que el movimiento angular de rectas del plano del movimiento es el mismo para toda recta de un cuerpo rígido. Por ejemplo, consideremos el cuerpo de la figura 14-4 en el que hemos dibujado dos segmentos rectilíneos separados un ángulo fijo β. Ambos están en el plano del movimien-

to y los ángulos que forman con una dirección fija de referencia son θ_{AB} y θ_{CD}, respectivamente, según se indica. En la figura 14-4 vemos que estos ángulos están relacionados en la forma

$$\theta_{CD} = \theta_{AB} + \beta \qquad (a)$$

Al moverse el cuerpo, variarán los ángulos θ_{AB} y θ_{CD}. Sin embargo, como el cuerpo es rígido, el ángulo β es constante y al derivar la ecuación (a) respecto al tiempo, tendremos

$$\omega_{CD} = \dot{\theta}_{CD} = \dot{\theta}_{AB} = \omega_{AB} \qquad (b)$$

donde ω, variación por unidad de tiempo de la posición angular, recibe el nombre de **velocidad angular**. La ecuación (b) nos dice que todas las rectas del cuerpo tienen igual velocidad angular. Por tanto, $\omega_{AB} = \omega_{CD}$ se denominará, simplemente, *velocidad angular del cuerpo*.

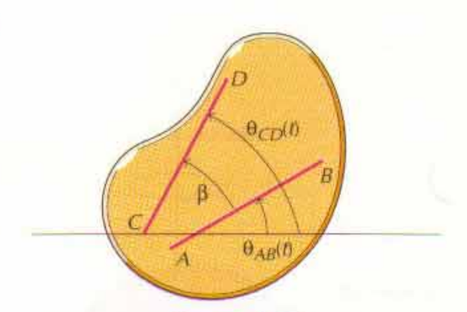


Figura 14-4

Derivando respecto al tiempo la ecuación (b) tenemos

$$\alpha_{CD} = \dot{\omega}_{CD} = \ddot{\theta}_{CD} = \ddot{\theta}_{AB} = \dot{\omega}_{AB} = \alpha_{AB} \qquad (c)$$

donde α, variación por unidad de tiempo de la velocidad angular, recibe el nombre de **aceleración angular**. Al igual que sucede con la velocidad angular, la aceleración angular es la misma para todas las rectas del cuerpo y $\alpha_{AB} = \alpha_{CD}$ se denomina, simplemente, *aceleración angular del cuerpo*.

14.4 ROTACIÓN EN TORNO A UN EJE FIJO

Hemos indicado que la posición de un cuerpo rígido en movimiento plano queda determinada al dar la situación de un punto y la orientación de una recta en el plano del movimiento. El movimiento de todo el cuerpo se puede determinar a partir del movimiento de dicho punto y el movimiento de la recta. Sin embargo, en la rotación alrededor de un eje fijo, el punto del eje permanece siempre en él. Por tanto, el movimiento de todo el cuerpo se podrá determinar a partir del movimiento de una recta.

14.4.1 Movimiento de una recta en la rotación en torno a un eje fijo

En la rotación en torno a un eje fijo, la posición del cuerpo queda determinada al dar la posición angular θ de una recta cualquiera del plano del movimiento. La derivada respecto al tiempo de la posición angular da la velocidad angular $\omega(t)$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(t) \qquad (14\text{-}4)$$

y la segunda derivada da la aceleración angular $\alpha(t)$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \alpha(t) \qquad (14\text{-}5)$$

del cuerpo rígido.

Las ecuaciones 14-4 y 14-5 que relacionan posición angular, velocidad angular y aceleración angular de un cuerpo rígido son formalmente iguales a las que relacionan posición, velocidad y aceleración de un punto en movimiento

rectilíneo y que se dedujeron en el apartado 13.3. Al igual que las ecuaciones del apartado 13.3 se integraban para obtener relaciones generales entre posición, velocidad y aceleración de un punto en movimiento rectilíneo, se podrán integrar las ecuaciones actuales para obtener relaciones generales entre posición angular, velocidad angular y aceleración angular de un cuerpo rígido.

En particular, si conocemos la aceleración angular en función del tiempo, se podrá integrar para obtener la velocidad angular

$$\omega(\tau) - \omega_0 = \int_0^t \alpha(\tau)\ \delta\tau \tag{14-6}$$

y la posición angular

$$\theta(t) - \theta_0 = \int_0^t \omega(\tau)\ d\tau \tag{14-7}$$

en función del tiempo. En el caso particular en que la aceleración angular sea constante, dichas integrales son inmediatas y dan

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \tag{14-8}$$

y

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{14-9}$$

Cuando se conozca la aceleración angular en función de la posición angular y no del tiempo, la regla de la cadena para la derivación da

$$\alpha(\theta) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

que se puede integrar para obtener la velocidad angular en función de la posición angular

$$\frac{\omega_2^2}{2} - \frac{\omega_1^2}{2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \alpha(\phi)\ d\phi \tag{14-10}$$

Las ecuaciones 14-6 a 14-10 son formalmente iguales a las que se desarrollaron en el apartado 13.3 para un punto en movimiento rectilíneo. Todos los resultados que se obtuvieron allí son también aplicables a la rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo, sin más que cambiar x por θ, v por ω y a por α.

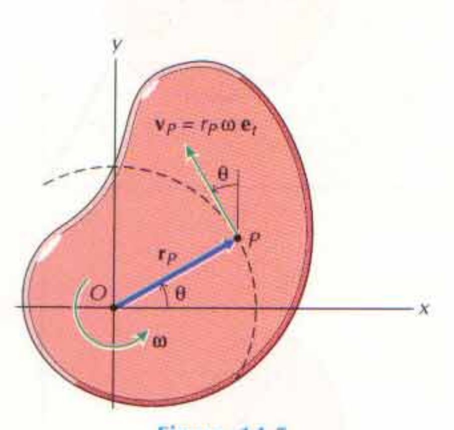


Figura 14-5

14.4.2 Movimiento de un punto en la rotación en torno a un eje fijo

En la rotación en torno a un eje fijo, los puntos que no estén en el eje recorren trayectorias circulares centradas en dicho eje. Si es $\mathbf{r}_P$ el vector de posición del punto P medido relativo al eje de rotación (fig. 14-5), la velocidad del punto P expresada mediante las coordenadas n-t[1] (ec. 13-38) será

$$\mathbf{v}_P = r_P\omega\mathbf{e}_t \tag{14-11a}$$

---

[1] Las ecuaciones 14-11a y 14-12a se habrían podido escribir en función de las coordenadas r-θ. En el apartado 13.5 se vio que cuando un punto recorre un camino circular de radio constante, las expresiones de la velocidad en el sistema de coordenadas n-t (ec. 13-38) y en el sistema de coordenadas r-θ (ec. 13-33) son iguales. Análogamente, cuando un punto recorre un camino circular de radio constante, las expresiones de la aceleración en el sistema de coordenadas n-t (ec. 13-38) y en el sistema de coordenadas r-θ (ec. 13-33) son iguales.

donde $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_\theta$ es un vector unitario tangente en P a su trayectoria circular (será, pues, perpendicular a $\mathbf{r}_P$). Las componentes x e y de esta velocidad se ve fácilmente que dan

$$\mathbf{v}_P = -r_P\omega \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + r_P\omega\cos\theta\,\mathbf{j} \qquad (14\text{-}11b)$$

donde θ es el ángulo que $\mathbf{r}_P$ forma con el eje x.

La velocidad de P puede también escribirse en función de un vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ definido por

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$$

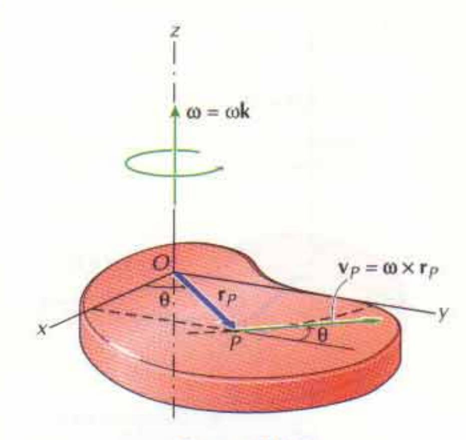


Figura 14-6

(fig. 14-6). La dirección de este vector es la del eje en torno al cual gira el cuerpo. El sentido de rotación obedece a la *regla de la mano derecha*. Es decir, colocando la mano derecha con el pulgar apuntando en el sentido del vector, los otros dedos se curvarán en el sentido de la rotación (en este caso, antihorario cuando se mira el plano del movimiento desde encima a lo largo del eje z). Entonces, el producto vectorial

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$$

nos da un vector $\mathbf{b}$, el cual es perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$ y a $\mathbf{r}_P$. Por tanto, el vector $\mathbf{b}$ está contenido en el plano del movimiento y tiene la dirección y sentido del vector $\mathbf{v}_P$. Además, como $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{r}_P$ son perpendiculares, el módulo del vector $\mathbf{b}$ será $r_P\omega \operatorname{sen} 90° = r_P\omega$. Así pues, el vector $\mathbf{b}$ coincide con la velocidad del punto P,

$$\mathbf{v}_P = \omega \times \mathbf{r}_P = r_P\omega\mathbf{e}_t \qquad (14\text{-}11c)$$

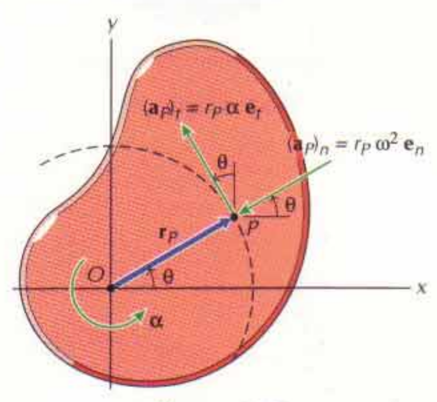


Figura 14-7

Expresando el producto vectorial de la ecuación 14-11c en función de las coordenadas x-y, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_P &= (\omega\mathbf{k}) \times (r_P\cos\theta\,\mathbf{i} + r_P \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}) \\ &= -r_P\omega \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + r_P\omega\cos\theta\,\mathbf{j}\end{aligned} \qquad (14\text{-}11d)$$

exactamente igual que la ecuación 14-11b.

La aceleración del punto P que recorre su trayectoria circular alrededor del eje de rotación, tendrá componentes tangencial y normal (fig. 14-7)

$$\mathbf{a}_P = (\mathbf{a}_P)_t + (\mathbf{a}_P)_n = r_P\alpha\mathbf{e}_t + r_P\omega^2\mathbf{e}_n \qquad (14\text{-}12a)$$

Las componentes x e y de la aceleración se obtienen de

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_P = &-r_P\alpha \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + r_P\alpha\cos\theta\,\mathbf{j} \\ &-r_P\omega^2\cos\theta\,\mathbf{i} - r_P\omega^2 \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}\end{aligned} \qquad (14\text{-}12b)$$

Por analogía con la velocidad de P, la componente tangencial de la aceleración se podrá escribir en la forma

$$(\mathbf{a}_P)_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P \qquad (14\text{-}12c)$$

donde $\boldsymbol{\alpha}$ es el vector aceleración angular definido por

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k}$$

(fig. 14-8). La dirección y sentido del vector $\boldsymbol{\alpha}$ es, de acuerdo con la regla de la mano derecha, como para $\boldsymbol{\omega}$. También, como $\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_t$ y $\mathbf{e}_n$ son vectores unitarios perpendiculares,

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_P = (\omega \mathbf{k}) \times (r_P \omega \mathbf{e}_t) = r_P \omega^2 \mathbf{e}_n = (\mathbf{a}_P)_n \qquad (14\text{-}12d)$$

y en consecuencia, la aceleración de P será

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P &= (\mathbf{a}_P)_t + (\mathbf{a}_P)_n = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_P \\ &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) \end{aligned} \qquad (14\text{-}12e)$$

(Nótese que en el último término es necesario el uso de paréntesis ya que

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) \neq (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r}_P = \mathbf{0}$$

y el orden en que se efectúen los productos vectoriales es importante.)

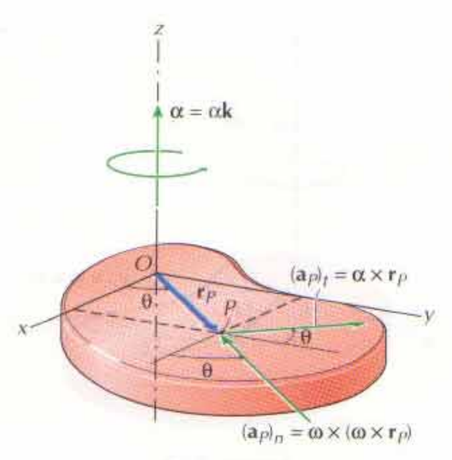


Figura 14-8

PROBLEMA EJEMPLO 14.1

El plato de un tocadiscos alcanza su celeridad de funcionamiento de $33\frac{1}{3}$ rpm al cabo de 5 revoluciones a partir del momento de ponerlo en marcha. Determinar la aceleración angular inicial α_0 del plato si:

a. La aceleración angular es constante, $\alpha = \alpha_0$ = constante.

b. La aceleración angular disminuye linealmente con la velocidad angular desde α_0 cuando $\omega = 0$ hasta $\alpha_0/4$ cuando $\omega = 33\frac{1}{3}$ rpm.

SOLUCIÓN

a. Primero hay que expresar la velocidad angular en rad/s

$$\frac{(33\frac{1}{3}\text{ rpm})\ (2\pi\text{ rad/rev})}{60\text{ s/min}} = 3{,}491\text{ rad/s}$$

y el desplazamiento angular en radianes

$$(5\text{ rev})(2\pi\text{ rad/rev}) = 10\pi\text{ rad}$$

Ahora, como se busca una relación entre desplazamiento angular y velocidad angular, se integrará

$$\alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta} = \alpha_0$$

y se obtendrá

$$\frac{3{,}491^2}{2} = \alpha_0\,(10\pi)$$

o sea

$$\alpha_0 = 0{,}1939\text{ rad/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

b. En este caso, la aceleración angular ha de disminuir linealmente con la velocidad angular de manera que

$$\alpha(\omega) = \alpha_0(1 - 0,2148\,\omega)$$

y

$$\int_0^{3,491} \frac{\omega\, d\omega}{1-0,2148\,\omega} = \alpha_0 \int_0^{10\pi} d\theta$$

lo cual da

$$\alpha_0 = 0,4390 \text{ rad/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 14.2

Una rueda dentada de 80 mm de diámetro gira en torno a un eje que pasa por su centro O (fig. 14-9). En cierto instante, la velocidad angular de la rueda es de 2 rad/s en sentido antihorario, aumentando a razón de 1 rad/s^2. Determinar la aceleración (en módulo, dirección y sentido) del diente A en dicho instante.

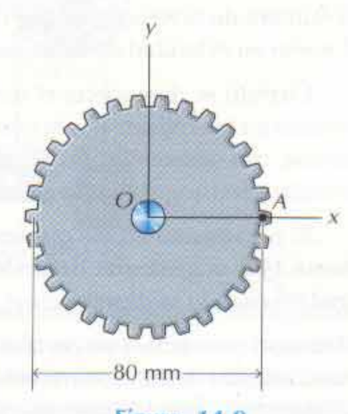


Figura 14-9

SOLUCIÓN

La aceleración de un punto de un cuerpo rígido en rotación en torno a un eje fijo es

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_A &= r\alpha\mathbf{e}_t + r\omega^2\mathbf{e}_n = (40)(1)\mathbf{j} + (40)(2)^2(-\mathbf{i})\\ &= -160\mathbf{i} + 40\mathbf{j} \text{ mm/s}^2\\ &= 164{,}9 \text{ mm/s}^2 \ \angle\ 14{,}04° \qquad \text{Resp.}\end{aligned}$$

De otra manera, expresando la aceleración mediante productos vectoriales

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_A &= \boldsymbol{\alpha} \times (\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}))\\ &= (1\mathbf{k}) \times (40\mathbf{i}) + (2\mathbf{k}) \times [(2\mathbf{k}) \times (40\mathbf{i})]\\ &= 40\mathbf{j} + (2\mathbf{k}) \times (80\mathbf{j}) = 40\mathbf{j} + 160(-\mathbf{i})\\ &= -160\mathbf{i} + 40\mathbf{j} \text{ mm/s}^2\\ &= 164{,}9 \text{ mm/s}^2 \ \angle\ 14{,}04° \qquad \text{Resp.}\end{aligned}$$

como antes.

PROBLEMAS

14-1* La posición angular de una rueda dentada viene dada por

$$\theta = 5e^{-t} \text{ sen } 2t \text{ rad}$$

expresando t en segundos. Determinar la velocidad angular y la aceleración angular de la rueda en el instante $t = 2$ s.

14-2* La velocidad angular de una rueda dentada viene dada por

$$4\omega^2 + 9\theta^2 = 25$$

donde $\omega = \dot{\theta}$ y $\theta = \theta(t)$. Determinar

a. La aceleración angular de la rueda en función de la posición angular.
b. La posición angular de la rueda en función del tiempo.

14-3. El motor eléctrico representado en la figura P14-3 da a la muela una aceleración angular constante cuando se pone en marcha. Si el motor alcanza su celeridad de funcionamiento de 3600 rpm en 3 s a partir de su puesta en marcha, determinar la aceleración angular de la muela.



Figura P14-3

14-4* El motor eléctrico del problema 14-3 da a la muela una aceleración angular constante de 150 rad / s^2 cuando se pone en marcha. Determinar

a. El tiempo que tarda el motor en alcanzar su celeridad de funcionamiento de 3600 rpm a partir de su puesta en marcha.
b. El número de revoluciones que da la muela hasta alcanzar el motor su celeridad de funcionamiento.

14-5 Cuando se desconecta el motor del problema 14-3, el rozamiento en los cojinetes hace que la muela tarde 2 minutos en pararse, con desaceleración angular constante. Determinar la desaceleración angular de la muela debida al rozamiento.

14-6 El rozamiento en los cojinetes del motor eléctrico del problema 14-3 origina una desaceleración angular constante de 3 rad / s^2 cuando se desconecta el motor. Determinar

a. El tiempo que tardará en pararse la muela si tenía una celeridad angular de funcionamiento igual a 3600 rpm.
b. El número de revoluciones que dará la muela antes de pararse.

14-7* Un motor de par variable da a un disco una aceleración angular que varía linealmente con la posición angular en la forma indicada en la figura P14-7. Si la velocidad angular del disco es de 10 rad / s cuando $\theta = 0$, determinar la velocidad angular del disco al cabo de 50 revoluciones.

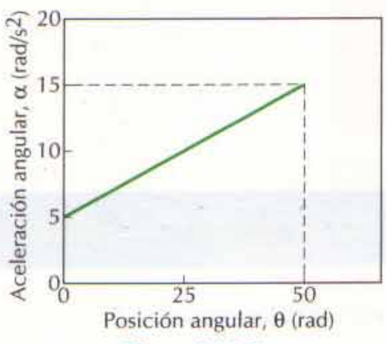


Figura P14-7

14-8 Un motor de par variable da a un disco una aceleración angular inversamente proporcional a su velocidad angular

$$\alpha = \frac{k}{\omega} \text{ rad/s}^2$$

donde ω se expresa en rad / s, k es una constante y $\omega = 0$ cuando $\theta = 0$. Si la velocidad angular del disco es de 40 rad / s al cabo de 25 revoluciones, determinar cuál será su valor al cabo de 50 revoluciones.

14-9* Un motor de par variable da a un disco una aceleración angular de

$$\alpha = \left(\frac{\omega}{16} - 8\right)^2 \text{ rad/s}^2$$

donde ω se expresa en rad / s y $\omega = \theta = 0$ en $t = 0$. Determinar

a. El tiempo que tarda el motor en hacer dar 50 revoluciones al disco.
b. La velocidad angular del disco al cabo de 50 revoluciones.

14-10* Un motor de par variable da a un disco una aceleración angular de

$$\alpha = 8 - 0{,}5\,\omega$$

donde ω se expresa en rad / s y $\omega = \theta = 0$ en $t = 0$. Determinar

a. El tiempo que tarda el motor en hacer dar 50 revoluciones al disco.
b. La velocidad angular del disco al cabo de 50 revoluciones.

14-11 Un pequeño bloque B gira con el plato horizontal A de la figura P14-11. La distancia entre el bloque y el eje de rotación es $r = 75$ mm, la aceleración angular del plato es $\alpha = 5$ rad / s^2 = constante y la velocidad angular inicial es nula. Determinar

a. El instante t_1 en el que las componentes normal y tangencial de la aceleración son iguales.
b. El número N de revoluciones que da el plato entre los instantes $t = 0$ y $t = t_1$.
c. La velocidad angular del plato en $t = t_1$.

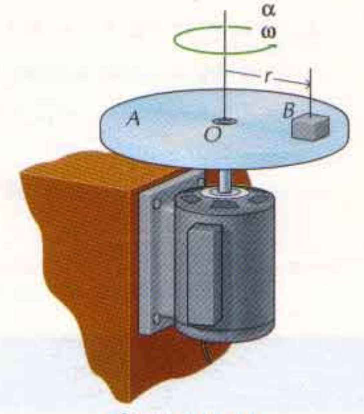


Figura P14-11

14-12* Un pequeño bloque B gira con el plato horizontal A de la figura P14-11. La distancia entre el bloque y el eje de rotación es $r = 50$ mm, la aceleración angular del plato es $\alpha = 5$ rad / s^2 = constante y la velocidad angular inicial es nula. Determinar

a. El instante t_1 en el que el módulo de la aceleración del bloque vale 4 m / s^2.
b. El número N de revoluciones que da el plato entre los instantes $t = 0$ y $t = t_1$.
c. La velocidad angular del plato en $t = t_1$.

14-13 Un pequeño bloque B gira con el plato horizontal A de la figura P14-11. La distancia entre el bloque y el eje de rotación es $r = 125$ mm, la aceleración angular del plato es $\alpha = -2$ rad/s^2 = const. y la velocidad angular inicial es $\omega = 15$ rad/s. Determinar el ángulo ϕ que forma la aceleración $\mathbf{a}_B$ del bloque con el radio OB en $t = 5$ s.

14-14 Un pequeño bloque B gira con el plato horizontal A de la figura P14-11. La distancia entre el bloque y el eje de rotación es $r = 80$ mm, la aceleración angular del plato es $\alpha = -3$ rad/s^2 = constante y la velocidad angular inicial es $\omega = 15$ rad/s. Determinar el instante t_1 en que el ángulo ϕ que forma la aceleración $\mathbf{a}_B$ del bloque con el radio OB es de 30°.

14-15* Un pequeño bloque B gira con el plato horizontal A de la figura P14-11. La distancia entre el bloque y el eje de rotación es $r = 100$ mm, la aceleración angular del plato es $\alpha = 2$ rad/s^2 = constante y la velocidad angular inicial es nula. Calcular y representar gráficamente

a. El módulo de la aceleración $\mathbf{a}_B$ del bloque en función del ángulo de rotación θ para las dos primeras revoluciones del plato.
b. El ángulo ϕ que forma la aceleración $\mathbf{a}_B$ del bloque con el radio OB en función del ángulo de rotación θ para las dos primeras revoluciones del plato.

14-16* El plato de bicicleta representado en la figura P14-16, tiene un diámetro de 200 mm. En un cierto instante, un eslabón de la cadena tiene una velocidad $v_A = 0{,}4$ m/s y una aceleración $a_A = 0{,}1$ m/s^2. Para este instante, determinar

a. La velocidad angular ω del plato.
b. Su aceleración angular α.
c. La aceleración $\mathbf{a}_B$ del diente B de dicho plato.

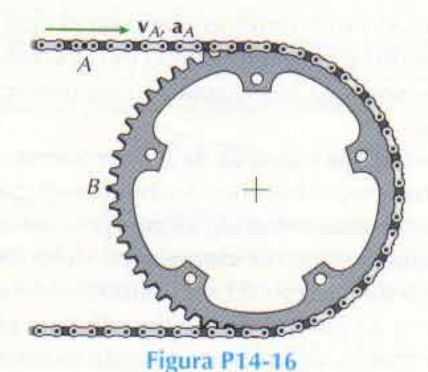


Figura P14-16

14-17 El plato de bicicleta representado en la figura P14-16, cuyo diámetro es de 15 cm, está accionado por un motor eléctrico que le comunica una aceleración angular constante α. El eslabón A de la cadena tiene una velocidad de 6 m/s, 5 s después de que el motor arranque. Determinar

a. La aceleración angular α del plato.
b. La velocidad angular ω del plato en el instante en que v_A = 6 m/s.
c. La aceleración $\mathbf{a}_B$ del diente B del plato en el instante en que $v_A = 6$ m/s.

14-18* Dos pesos A y B están sostenidos por hilos arrollados a un tambor escalonado según se indica en la figura P14-18. En el instante representado, el peso A lleva una velocidad vertical hacia abajo de 2 m/s, disminuyendo su celeridad a razón de 1,5 m/s^2. Determinar para este instante,

a. La aceleración del peso B.
b. La aceleración del punto D del borde del tambor.

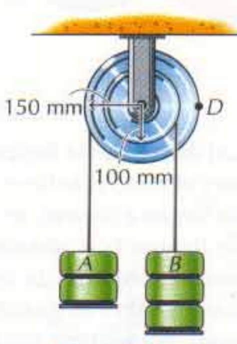


Figura P14-18

14-19 El tambor C representado en la figura P14-19 gira sobre dos ruedecitas A y B. Cuando arranca el motor, hace girar la rueda A con una aceleración angular constante α_A. Si el tambor alcanza su celeridad de funcionamiento de 20 rpm al cabo de 3 s del arranque, determinar

a. La aceleración angular de la rueda A.
b. El número de revoluciones que habrá girado el tambor en los tres primeros segundos.

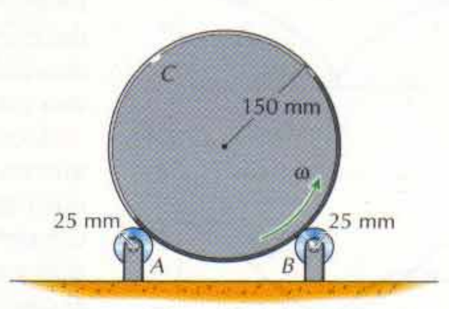


Figura P14-19

14-20* Inicialmente, el disco B de la figura P14-20 está en reposo y el disco A gira a 600 rpm. Cuando llegan a tocarse, deslizan durante 10 s y en este intervalo de tiempo la aceleración angular de cada disco se mantiene constante. Al final de los 10 s, los discos ruedan sin deslizar uno sobre otro y el disco A habrá alcanzado una velocidad angular final de 250 rpm. Determinar la aceleración angular de cada disco y la velocidad angular final del disco B.

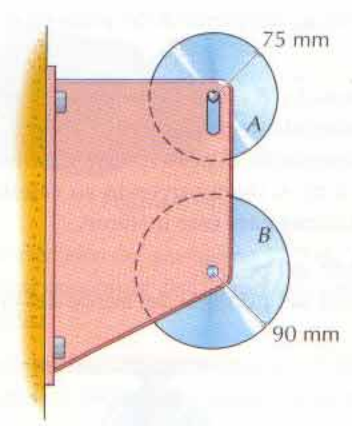


Figura P14-20

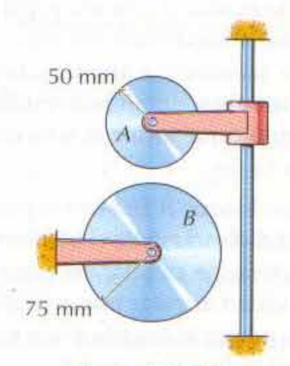


Figura P14-21

14-21 Inicialmente, el disco *B* de la figura P14-21 gira en sentido horario a 200 rpm y el disco *A* lo hace en sentido antihorario a 500 rpm. Cuando llegan a tocarse, se deslizan durante 5 s y en este intervalo de tiempo la aceleración angular de cada disco se mantiene constante. Al final de los 5 s, los discos ruedan sin tocarse y el disco *B* habrá alcanzado una velocidad angular final de 250 rpm en sentido horario. Determinar la aceleración angular de cada disco y la velocidad angular final del disco *A*.

14-22 Se quiere llevar los dos discos de la figura P14-20 a contacto sin deslizamiento. Inicialmente, el disco *B* está en reposo y el disco *A* gira a 600 rpm. Si al disco *A* se le comunica una desaceleración angular constante de 3 rad/s^2 y al disco *B* se le da una aceleración angular constante de 5 rad/s^2, determinar el tiempo que tardarán los discos en contacto en girar sin deslizamiento y la velocidad angular de cada disco en ese instante.

14-23* Se quiere llevar los dos discos de la figura P14-21 a contacto sin deslizamiento. Inicialmente, el disco *B* está en reposo y el disco *A* gira a 750 rpm. Si al disco *A* se le comunica una desaceleración angular constante de 5 rad/s^2 y al disco *B* se le da una aceleración angular constante de 8 rad/s^2, determinar el tiempo que tardarán los discos en contacto en girar sin deslizamiento y la velocidad angular de cada disco en ese instante.

14.5 MOVIMIENTO PLANO CUALQUIERA

En este apartado nos referimos a todo movimiento plano en el cual las rectas del cuerpo giren sin que haya ningún punto del cuerpo fijo. Veremos que los movimientos planos cualesquiera son una superposición de una traslación y una rotación en torno a un eje fijo.

Existen dos métodos generales para la solución de los problemas del movimiento plano cualquiera. En el primero, se escriben las relaciones geométricas que describen las ligaduras a las que está sometido el cuerpo y su interacción con otros cuerpos. Después se utilizan estas relaciones para describir la situación y movimiento de otros puntos del cuerpo. El segundo método aprovecha el concepto de movimiento relativo de puntos que se describió en el apartado 13.6. Como la distancia entre dos puntos de un cuerpo rígido es invariable, las expresiones de la velocidad y aceleración relativas adoptan formas particularmente sencillas que sólo dependen de la velocidad angular y de la aceleración angular del cuerpo.

Para resolver un problema particular puede utilizarse uno u otro método. Algunos problemas tienen una descripción geométrica sencilla y pueden tratarse fácilmente con el método del movimiento absoluto. Los problemas que no puedan describirse geométricamente con facilidad, suelen resolverse utilizando el método del movimiento relativo. Para muchos problemas, la elección del método es cuestión de gusto.

14.5.1 Análisis del movimiento absoluto

Las ecuaciones relativas al movimiento angular del cuerpo rígido y al movimiento de alguno de sus puntos se pueden obtener efectuando un análisis minucioso de la relación entre puntos y rectas del cuerpo rígido. Primero se obtiene la situación de un cierto punto del cuerpo en función de la orientación angular de éste. A continuación, las derivadas respecto al tiempo de esta relación dan la velocidad y la aceleración del punto en función de la orientación angular, la velocidad angular y la aceleración angular del cuerpo.

Como el método del movimiento absoluto se apoya totalmente en la descripción geométrica del cuerpo o cuerpos del problema, no se pueden deducir fórmulas generales. Habrá que deducir fórmulas específicas para cada problema concreto, tal como se ilustra en el ejemplo 14-3.

PROBLEMA EJEMPLO 14.3

Deducir una expresión que relacione la posición de un punto del borde de una rueda con la rotación de la rueda cuando ruede sin deslizamiento sobre una superficie horizontal en reposo. Utilizar dicha expresión para:

a. Dar la velocidad del punto en función de θ y ω.
b. Demostrar que la velocidad del punto de contacto entre la rueda y la superficie es instantáneamente nula.
c. Dar la aceleración del punto en función de θ, ω y α.
d. Demostrar que la aceleración del punto de contacto con la superficie es normal a ésta y no es nula.

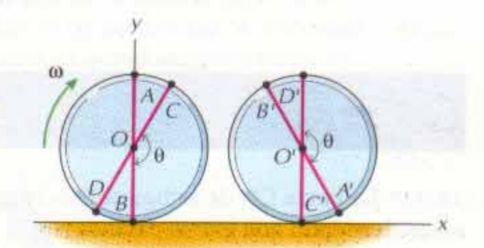


Figura 14-10

SOLUCIÓN

a. Sean A, B, C y D puntos del borde de la rueda tales como los representados en la figura 14-10. Cuando la rueda gire un ángulo θ, su centro pasará de O a O' y el punto C pasará a entrar en contacto con la superficie en C'. La posición del punto A se podrá escribir en función del ángulo θ,

$$\mathbf{r}_A = (x + r \operatorname{sen} \theta)\,\mathbf{i} + (r + r \cos \theta)\,\mathbf{j}$$

donde $x = \overline{OO'} = \overline{BC'}$ es la distancia recorrida por el centro de la rueda al girar ésta. Como la rueda no resbala al girar, la distancia $\overline{BC'}$ deberá ser igual a la longitud del arco $\overline{BC} = r\theta$ y por tanto

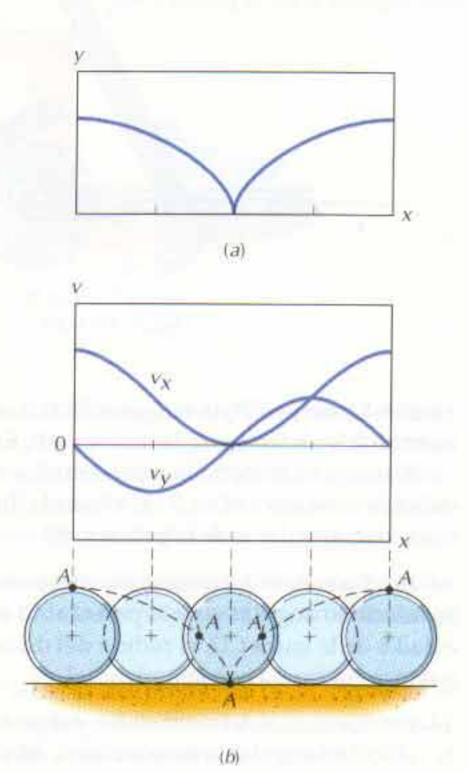
$$\mathbf{r}_A = (r\theta + r \operatorname{sen} \theta)\,\mathbf{i} + (r + r \cos \theta)\,\mathbf{j} \qquad \text{Resp.}$$

(La trayectoria representada por esta ecuación se denomina cicloide y puede verse dibujada en la figura 14-11*a*.)

La velocidad del punto A es la derivada respecto al tiempo de su vector de posición

$$\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$
$$= r\omega[(1 + \cos \theta)\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} \theta\,\mathbf{j}] \qquad \text{Resp.}$$

En la figura 14-11*b* se han representado las componentes x e y de la velocidad.



(b)
Figura 14-11

b. Evaluando la velocidad de A cuando $\theta = 180°$ (y A está en contacto con la superficie) se tiene

$$\mathbf{v}_A(180°) = r\omega[\,(1-1)\,\mathbf{i} - 0\,\mathbf{j}] = \mathbf{0} \qquad \text{Resp.}$$

Por tanto, el punto de contacto se halla instantáneamente en reposo: es centro instantáneo de velocidad nula.

c. La aceleración de A es la derivada respecto al tiempo de su vector velocidad

$$\mathbf{a}_A = \dot{\mathbf{v}}_A = r\,[\alpha(1+\cos\theta) - \omega^2 \operatorname{sen}\theta]\,\mathbf{i}$$
$$-r\,[\alpha \operatorname{sen}\theta + \omega^2 \cos\theta]\,\mathbf{j} \qquad \text{Resp.}$$

d. Evaluando la aceleración de A cuando $\theta = 180°$ (y A está en contacto con la superficie) se tiene

$$\mathbf{a}_A = r\omega^2\,\mathbf{j} \qquad \text{Resp.}$$

Por tanto, el punto de contacto no es centro instantáneo de aceleración nula. La aceleración del punto de contacto está dirigida hacia el centro de la rueda y es perpendicular a la superficie sobre la que está rodando.

PROBLEMAS

–14-24* La barra CD de la figura P14-24 se mueve horizontalmente haciendo que gire la palanca AB. El disco tiene un radio $r = 50$ mm y en el instante representado, $\theta = 30°$ y la velocidad del vástago es de 7 m/s hacia la derecha. Determinar la velocidad angular ω de la palanca AB.

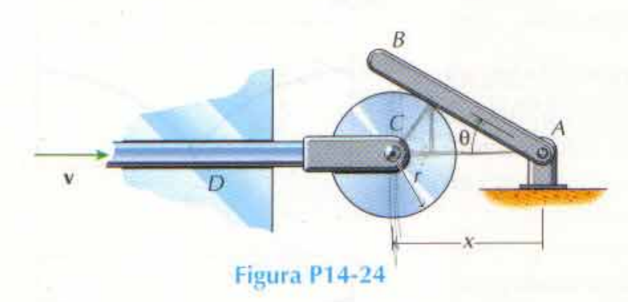


Figura P14-24

– 14-25* La barra CD de la figura P14-24 se mueve horizontalmente haciendo que gire la palanca AB. El disco tiene un radio $r = 50$ mm y en el instante representado, $x = 125$ mm y la velocidad del vástago es de 4,5 m/s hacia la derecha. Determinar la velocidad angular ω de la palanca AB.

14-26 En el caso del mecanismo del problema 14-24, expresar la velocidad angular ω de la palanca AB en función de la velocidad v de la barra CD, el radio r del disco y el ángulo θ que la palanca AB forma con la horizontal.

14-27* En el caso del mecanismo del problema 14-24, expresar la velocidad angular ω de la palanca AB en función de la velocidad v de la barra CD, el radio r del disco y la distancia x.

14-28 La rotación de la leva circular de la figura P14-28 hace que suba y baje el émbolo. El radio de la leva es $r = 50$ mm y está montada en un eje situado a una distancia $b = 35$ mm de su centro. En el instante representado, la leva gira con una celeridad angular constante $\omega = 15$ rad/s y $\theta = 60°$. Determinar la velocidad y la aceleración del émbolo en ese instante.

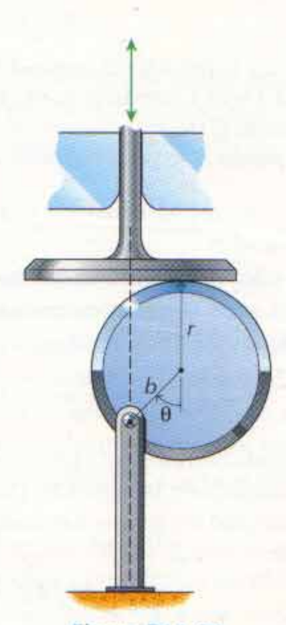


Figura P14-28

14-29 En el caso del mecanismo de la figura P14-28, expresar la velocidad v y la aceleración a del émbolo en función de la ve-

locidad angular ω y la aceleración angular α de la leva, su radio r y el ángulo θ.

14-30* El mecanismo representado en la figura P14-30 se utiliza para convertir el movimiento de rotación del brazo AB en movimiento de traslación del vástago CD. En el instante representado, el brazo AB de longitud $b = 0{,}2$ m está girando en sentido antihorario con celeridad angular constante $\omega = 12$ rad/s y $\theta = 60°$. Determinar la velocidad y la aceleración del vástago en ese instante.

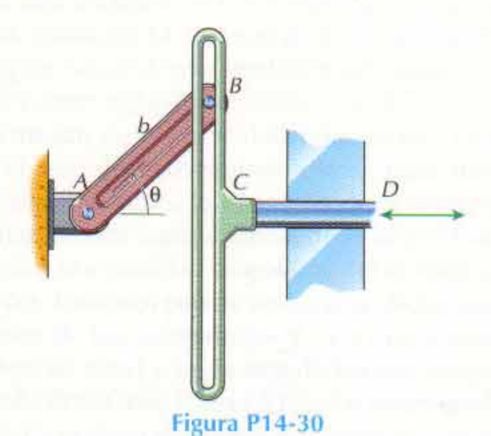


Figura P14-30

14-31 En el caso del mecanismo del problema 14-30, expresar la velocidad y la aceleración del vástago en función de la posición angular θ, la velocidad angular ω, la aceleración angular α y la longitud b de la barra AB.

14-32* Las correderas A y B de la figura P14-32 están obligadas a moverse por sendas guías vertical y horizontal, respectivamente y están conectadas mediante una barra rígida de longitud $d = 800$ mm. En el instante representado, $\theta = 75°$ y la corredera B se mueve hacia la derecha con una celeridad constante de 25 mm/s. Determinar la velocidad angular y la aceleración angular de la barra AB en ese instante.

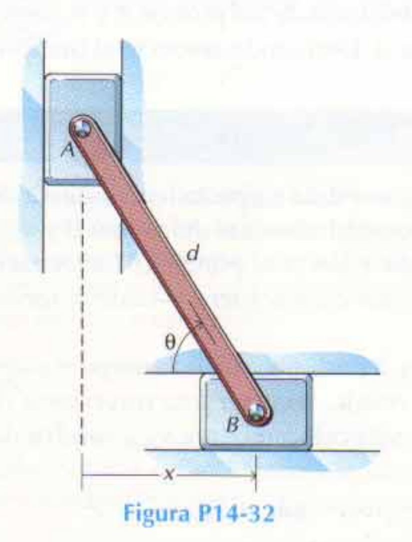


Figura P14-32

14-33* Las correderas A y B de la figura P14-32 están obligadas a moverse por sendas guías vertical y horizontal, respectivamente y conectadas mediante una barra rígida de longitud $d = 90$ cm. En el instante representado, $x = 30$ cm y la corredera B se mueve hacia la derecha con una celeridad constante de 15 cm/s. Determinar la velocidad y la aceleración de la corredera A en ese instante.

14-34 En el caso del sistema de la figura P14-32, expresar la velocidad angular y la aceleración angular de la barra AB en función de la velocidad v_B y la aceleración a_B de la corredera B, la longitud d de la barra AB y el ángulo θ.

14-35* En el caso del sistema de la figura P14-32, expresar la velocidad y la aceleración de la corredera A en función de la velocidad v_B y la aceleración a_B de la corredera B, la longitud d de la barra AB y la distancia x.

14-36 La barra AB de 2 m de longitud, representada en la figura P14-36, se desliza por un escalón de altura $d = 1$ m. Si el extremo B de la barra se mueve hacia la derecha con una celeridad constante de 0,25 m/s, determinar la velocidad angular de la barra en el instante en que el ángulo θ valga 50°.

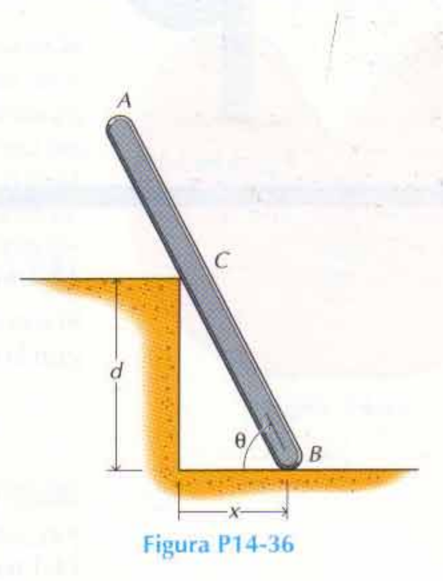


Figura P14-36

14-37 La barra AB de 2,1 m de longitud, representada en la figura P14-36, se desliza por un escalón de altura $d = 1{,}2$ m. Si el extremo B de la barra se mueve hacia la derecha con una celeridad constante de 0,15 m/s, determinar la velocidad angular de la barra en el instante en que $x = 0{,}6$ m.

14-38* En el caso de la barra del problema 14-36, determinar la velocidad del punto C de la barra que está en contacto con el escalón.

14-39 En el caso de la barra del problema 14-36, expresar la velocidad angular de la barra AB en función de la posición x, la celeridad $\dot{x}$ de B, la altura d del escalón y el ángulo θ.

14-40* Al girar la leva circular de la figura P14-40, la barra seguidora se mueve arriba y abajo. El radio de la leva es $r_1 = 40$ mm y está montada sobre un eje situado a una distancia $b = 25$ mm de su centro. El radio del disco menor es $r_2 = 30$ mm. En el instante representado, la leva gira con una celeridad angular constante $\omega = 10$ rad/s y $\theta = 30°$. Determinar la velocidad y la aceleración que, en este instante, lleva la barra seguidora.

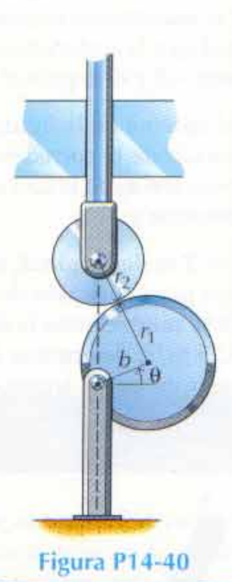


Figura P14-40

14-41* En el caso del mecanismo del problema 14-40, expresar la velocidad y la aceleración de la barra seguidora en función de la velocidad angular ω y la aceleración angular α de la leva, los radios r_1 y r_2 de los discos y el ángulo θ.

14.5.2 Velocidad relativa

Si son A y B dos puntos cualesquiera, sus posiciones estarán relacionadas, según la regla del triángulo para la adición de vectores, por

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \tag{14-13a}$$

donde $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ son las posiciones absolutas de los puntos A y B, respectivamente y $\mathbf{r}_{B/A}$ es la posición de B relativa a A. Derivando respecto al tiempo la ecuación 14-1 tenemos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{14-13b}$$

donde $\mathbf{v}_A$ es la velocidad absoluta (medida respecto a un sistema de coordenadas fijo) del punto A, $\mathbf{v}_B$ es la velocidad absoluta del punto B y $\mathbf{v}_{B/A}$ es la velocidad relativa del punto B (medida relativa al punto A). Las ecuaciones 14-13*a* y 14-13*b* son aplicables a dos puntos cualesquiera —tanto si forman parte de un cuerpo rígido como si no.

Sin embargo, si los puntos A y B pertenecen a un cuerpo rígido, su separación será constante y el punto B resulta recorrer una trayectoria circular alrededor del punto A. Por tanto, la velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ vendrá dada por (ec. 14-11)

$$\mathbf{v}_{B/A} = r_{B/A}\omega\mathbf{e}_t = \omega\mathbf{k} \times r_{B/A} \tag{14-13c}$$

donde $\mathbf{r}_{B/A} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, $\mathbf{e}_t$ es un vector unitario tangente al movimiento relativo (tangente a la circunferencia centrada en A) y ω es la velocidad angular del cuerpo. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_A + r_{B/A}\omega\mathbf{e}_t \\ &= \mathbf{v}_A + \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} \end{aligned} \tag{14-13d}$$

Por tanto, la velocidad del punto B consiste en la suma de dos partes: $\mathbf{v}_A$, que representa una traslación de todo el cuerpo con el punto A, y $\mathbf{r}_{B/A}\omega\mathbf{e}_t$, que representa una rotación de todo el cuerpo alrededor de A (fig. 14-12). Concretamente, la ecuación 14-13*d* nos dice: *La velocidad de un punto cualquiera B de un cuerpo rígido consta de una traslación del cuerpo rígido con un punto A más una rotación del cuerpo rígido en torno al punto A.*

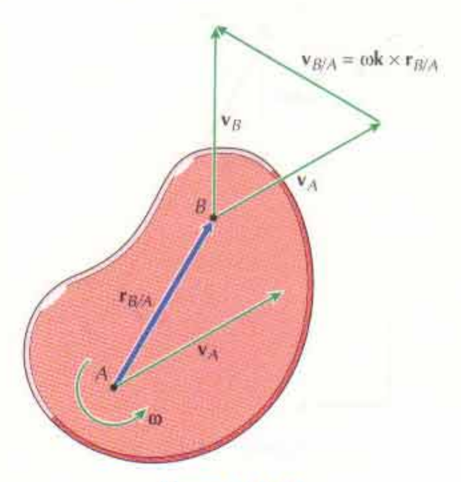


Figura 14-12

La ecuación de la velocidad relativa (ec. 14-13*d*) es una ecuación vectorial que, en el caso del movimiento plano, tiene dos componentes escalares independientes. Por tanto, la ecuación de la velocidad relativa se puede utilizar para hallar las dos componentes de la velocidad $\mathbf{v}_B$ de un cierto punto cuando se conozcan la velocidad angular ω del cuerpo y la velocidad $\mathbf{v}_A$ de otro punto del cuerpo. También puede resolverse dicha ecuación cuando se conozcan las direcciones de las velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ (por ejemplo, si A y B se deslizan a lo largo de guías fijas) y se da una de las tres magnitudes v_A, v_B u ω.

Cuando dos o más cuerpos rígidos estén unidos por un pasador, como en la figura 14-13, podrán escribirse por separado las ecuaciones de la velocidad relativa correspondientes a cada uno de los cuerpos. Uno de los puntos utilizados en cada ecuación deberá ser el punto común (punto B en la fig. 14-13) que une los dos cuerpos; su velocidad será la misma para cada cuerpo. El otro punto en cada ecuación será distinto (A o C) cuya velocidad sea conocida o haya que encontrar. Entonces, las velocidades y las velocidades angulares de los cuerpos podrán relacionarse igualando las dos expresiones de la velocidad del punto común

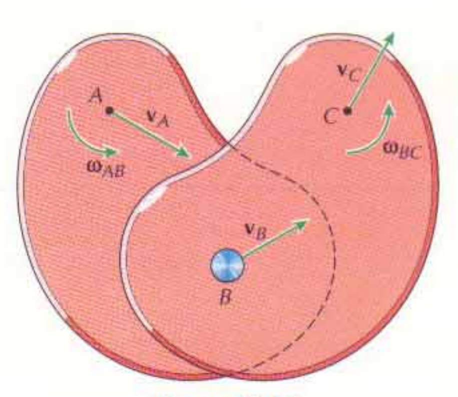


Figura 14-13

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B/C}$$

o sea

$$\mathbf{v}_A + \omega_{AB}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} = \mathbf{v}_C + \omega_{BC}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/C}$$

De esta ecuación pueden despejarse dos incógnitas cualesquiera si se dan las otras cantidades.

PROBLEMA EJEMPLO 14.4

La escalera AB tiene una longitud de 3 m y se desliza por la pared y el suelo, según se indica en la figura 14-14. Cuando el ángulo θ vale 30°, el extremo inferior de la escalera se está moviendo hacia la derecha con una celeridad constante de 2,0 m/s. Determinar la velocidad del extremo superior de la escalera y la velocidad angular de ésta en ese instante.

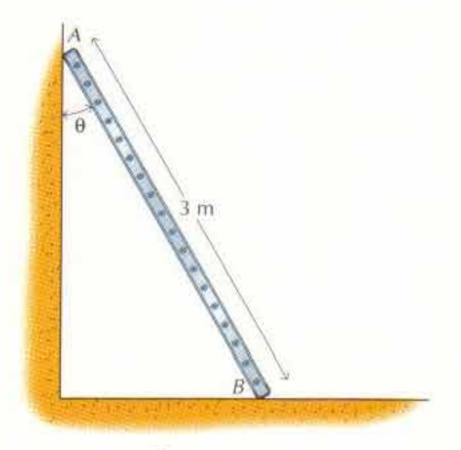


Figura 14-14

SOLUCIÓN

Se toma un sistema de coordenadas con el eje x horizontal y hacia la derecha y el eje y vertical y hacia arriba. Entonces, la velocidad de B vendrá dada por $\mathbf{v}_B = 2\,\mathbf{i}$ m/s, la velocidad de A por $\mathbf{v}_A = v_A\mathbf{j}$ y la ecuación de la velocidad relativa da

$$v_A\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + \mathbf{v}_{A/B} \tag{a}$$

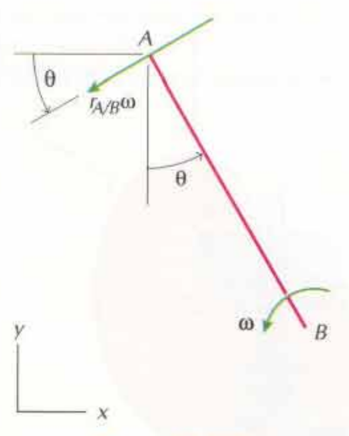


Figura 14-15

Pero, según se ve en la figura 14-15, la velocidad relativa viene dada por

$$\mathbf{v}_{A/B} = 3\omega\mathbf{e}_t = 3\omega(-\cos 30°\mathbf{i} - \text{sen } 30°\mathbf{j})$$

Ahora bien, la componente x de la ecuación a da

$$0 = 2 - 3\omega \cos 30°\mathbf{i}$$

o sea

$$\omega = 0{,}770 \text{ rad/s (antihorario)} \qquad \text{Resp.}$$

y la componente y da

$$v_A = -(3)(0{,}770) \text{ sen } 30° = -1{,}155 \text{ m/s}$$

o sea

$$\mathbf{v}_A = 1{,}155 \text{ m/s} \downarrow \qquad \text{Resp.}$$

De otra manera, el término de la velocidad relativa se puede calcular utilizando el producto vectorial

$$\mathbf{v}_{A/B} = \omega\mathbf{k} \times (-3 \text{ sen } 30°\mathbf{i} + 3 \cos 30°\mathbf{j})$$
$$= -3\omega \text{ sen } 30°\mathbf{j} - 3\omega \text{ sen } 30°\mathbf{i}$$

que da el mismo resultado anterior.

PROBLEMA EJEMPLO 14.5

La rueda del mecanismo corredera-cigüeñal representado en la figura 14-16 gira en sentido antihorario con celeridad constante de 10 rad/s. Determinar la velocidad $\mathbf{v}_B$ de la corredera y la velocidad angular ω_{AB} de la biela AB del cigüeñal cuando $\theta = 60°$.

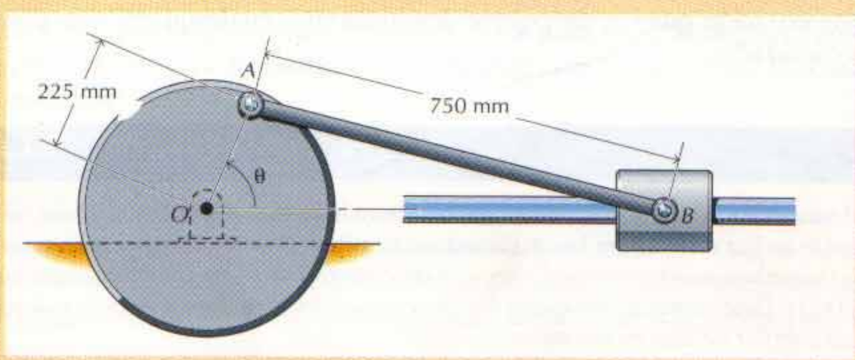


Figura 14-16

SOLUCIÓN

La rueda y la biela AB son dos cuerpos rígidos conectados en el punto A. La velocidad del eje O de la rueda es nula y la de la corredera B sólo tiene componente

horizontal. Escribiendo la velocidad del punto común en relación con las velocidades de estos puntos y las velocidades angulares de cada uno de los cuerpos, se tiene

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{A/O} \qquad (b)$$

Tomando un sistema de coordenadas que tenga el eje x dirigido hacia la derecha y el eje y dirigido hacia arriba, y haciendo referencia a la figura 14-17, los términos de las velocidades relativas son

$$\mathbf{v}_{A/B} = 750\omega_{AB}(-\text{ sen } \phi\, \mathbf{i} - \cos \phi\, \mathbf{j}) \text{ mm/s}$$
$$\mathbf{v}_{A/O} = 225\omega_{AB}(-\text{ sen } 60°\, \mathbf{i} - \cos 60° \mathbf{j}) \text{ mm/s}$$

en donde se determinará el ángulo ϕ mediante el teorema del seno (fig. 14-17*c*)

$$\frac{\text{sen } \phi}{225} = \frac{\text{sen } 60°}{750}$$

de donde

$$\phi = 15{,}06°$$

Luego, las componentes x e y de la ecuación b

$$v_B - 750\omega_{AB}\text{sen } 15{,}06° = -(225)(10) \text{ sen } 60°$$
$$-750\omega_{AB}\cos 15{,}06° = -(225)(10) \cos 60°$$

dan

$$\omega_{AB} = -1{,}553 \text{ rad/s}$$
$$= 1{,}553 \text{ rad/s (horario)} \qquad \text{Resp.}$$

y

$$v_B = -2250 \text{ mm/s}$$

o sea

$$\mathbf{v}_B = 22{,}50 \text{ m/s} \leftarrow \qquad \text{Resp.}$$

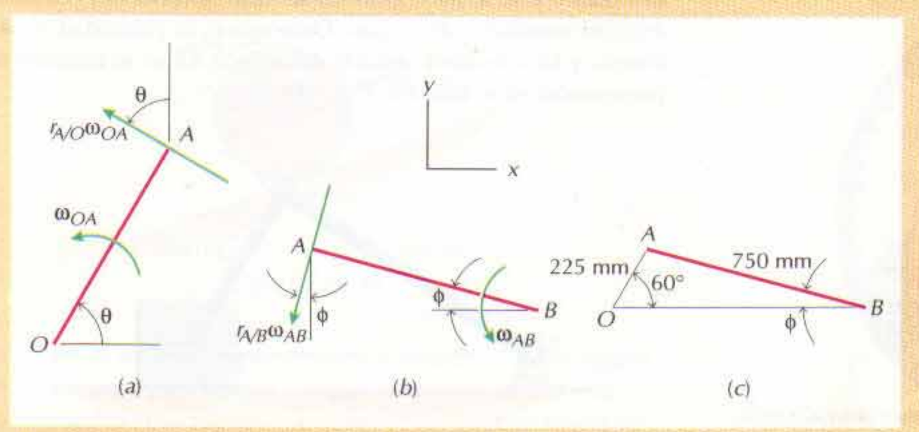


Figura 14-17

14-42* Las correderas A y B de la figura P14-42 están obligadas a moverse por sendas guías vertical y horizontal, respectivamente y están conectadas por una barra rígida de longitud $d = 800$ mm. En el instante representado, $\theta = 75°$ y la corredera B se mueve hacia la derecha con una celeridad constante de 25 mm/s. Determinar la velocidad de la corredera A y la velocidad angular de la barra AB en ese instante.

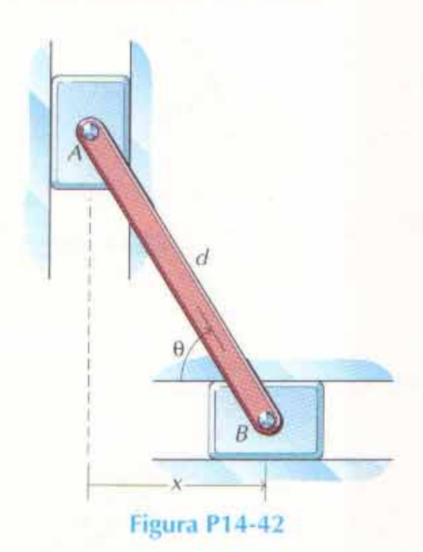


Figura P14-42

14-43* La barra AB de longitud 2,1 m, representada en la figura P14-43, se apoya en un escalón de 1,2 m de altura. Si el extremo B de la barra se mueve hacia la derecha con celeridad constante de 0,15 m/s, determinar la velocidad angular de la barra en el instante en que $x = 0,6$ m.

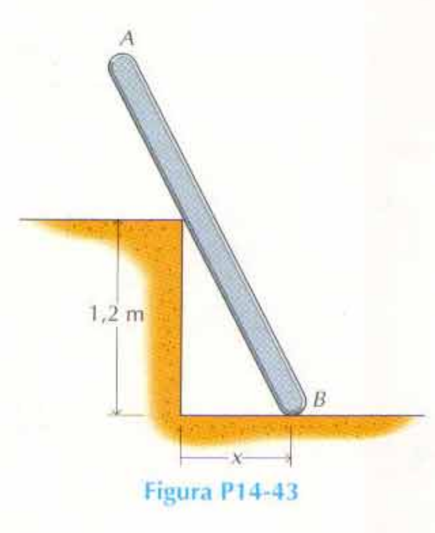


Figura P14-43

14-44 El émbolo de la figura P14-44 está conectado al cigüeñal mediante una biela de 650 mm de longitud. En el instante representado, la velocidad angular del cigüeñal es de 360 rpm en sentido horario. Determinar la velocidad del émbolo en ese instante.

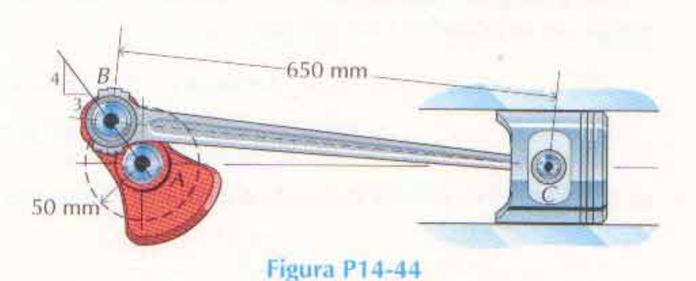


Figura P14-44

14-45* El movimiento del núcleo del solenoide representado en la figura P14-45 hace girar una rueda dentada. Si, en el instante representado, la velocidad angular de la rueda es $\omega_0 =$ 4 rad/s en sentido antihorario, determinar la velocidad angular ω_{AB} de la barra AB y la velocidad $\mathbf{v}_A$ del núcleo.

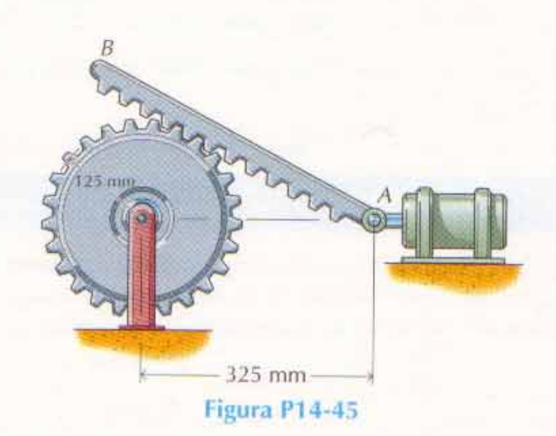


Figura P14-45

14-46 El brazo BC de la figura P14-46 está unido al bloque deslizante y se le hace girar en sentido horario con celeridad angular constante de 2 rpm. Determinar la velocidad v_C del bloque y la velocidad angular del enlace AB en el instante representado, en el cual $\theta = 75°$.

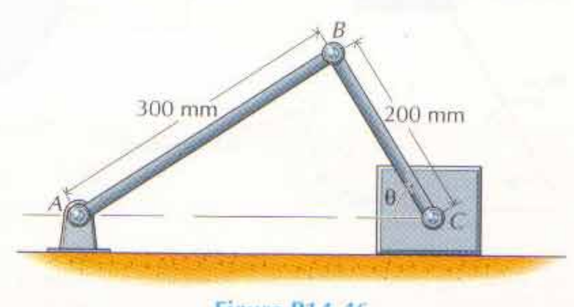


Figura P14-46

14-47 La barra de mando *BC* está unida a la manivela *AB*, según se indica en la figura P14-47. En el instante representado, la barra de mando *BC* se desliza por el interior de la guía pivotante *D* a razón de 375 mm/s. Determinar la velocidad angular ω_{AB} de la manivela en ese instante.

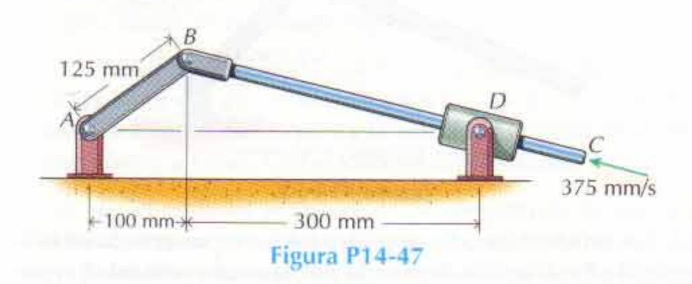


Figura P14-47

14-48* La rueda representada en la figura P14-48 gira con una celeridad angular constante de 120 rpm en sentido antihorario. Determinar, en el instante representado, la velocidad angular ω_{AB} de la barra *AB* y la velocidad $\mathbf{v}_A$ de la corredera A.

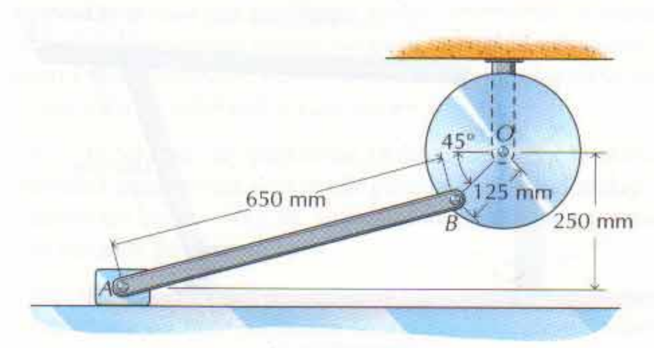


Figura P14-48

14-49 La rueda de la figura P14-49 asciende por el plano inclinado con una velocidad de 600 mm/s y velocidad angular de 5 rad/s en sentido horario. Determinar la velocidad de deslizamiento en el punto de contacto *A* (velocidad relativa entre el punto de la rueda y la superficie en reposo).

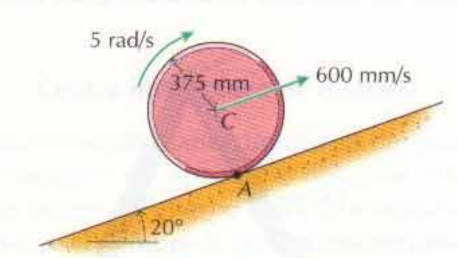


Figura P14-49

14-50* En el instante representado, el rodillo *C* de la figura P14-50 asciende por el canal con una velocidad de 250 mm/s. Determinar las velocidades angulares de las dos barras y la velocidad del pasador *B* en ese instante.

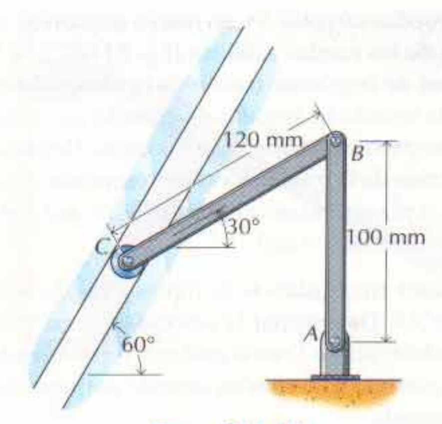


Figura P14-50

14-51* La manivela *AB* de la figura P14-51 tiene una velocidad angular constante de 60 rpm en sentido antihorario. Si en el instante representado $\theta = 40°$, determinar la velocidad angular del miembro *BC* y la velocidad de deslizamiento en el punto de contacto *D* (velocidad relativa entre el punto del brazo *BC* y el pivote en reposo).

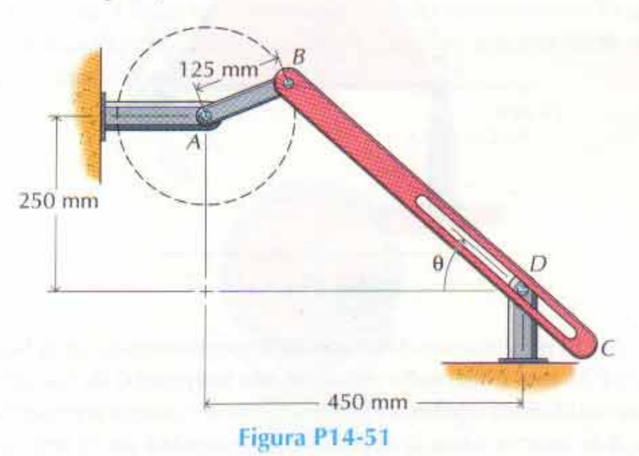


Figura P14-51

14-52 Los engranajes de un automóvil de transmisión automática constan de un anillo dentado *R*, una rueda planetaria *P*,

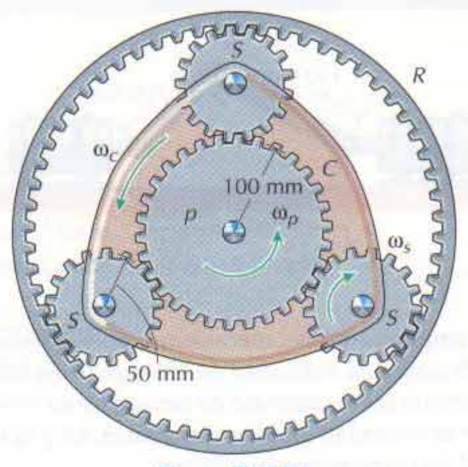


Figura P14-52

tres (o más) ruedas satélites S y un marco giratorio C conectado a los centros de las ruedas satélites (fig. P14-52). Se logran diversas razones de engranaje (razón de la velocidad angular de salida ω_{sal} a la velocidad angular de entrada ω_{en}) manteniendo fija una de las partes y accionando las otras. Determinar la razón de engranaje de la transmisión representada si se mantiene fijo el anillo, el planetario es la entrada ($\omega_{en} = \omega_S$) y el marco giratorio es la salida ($\omega_{sal} = \omega_C$).

14-53* La placa triangular de la figura P14-53 oscila cuando gira el enlace AB. Determinar la velocidad angular de la placa y la velocidad del punto D en el instante representado, si el enlace AB está girando a 60 rpm en sentido antihorario en el instante representado.

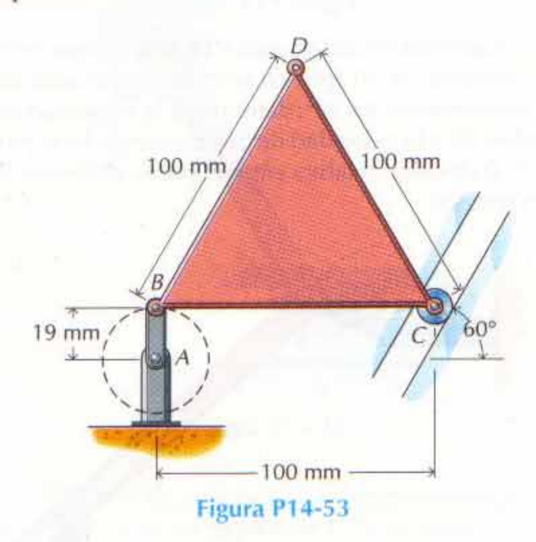


Figura P14-53

14-54* El movimiento del mecanismo representado en la figura P14-54 está gobernado por la acción horizontal de los cilindros hidráulicos unidos a él en A y C. En el instante representado, A se mueve hacia la derecha con velocidad de 75 mm / s y C tiene una velocidad de 50 mm / s hacia la izquierda. Determinar las velocidades angulares de ambas barras y la velocidad del punto B en el instante representado.

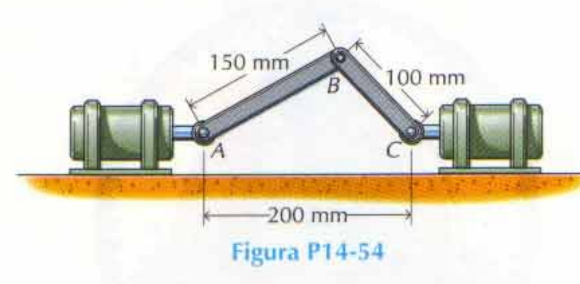


Figura P14-54

14-55 La empuñadura del mecanismo representado en la figura P14-55 tiene una velocidad de 125 mm / s vertical y hacia abajo durante un corto intervalo de tiempo de su movimiento. Determinar la velocidad angular de la barra AB y la velocidad del punto A en el instante representado.

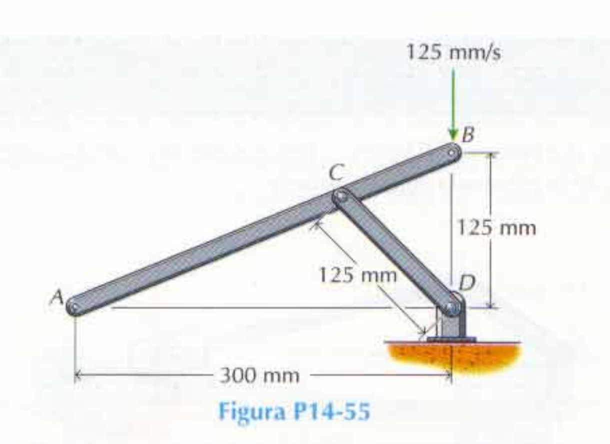


Figura P14-55

14-56* En el entramado de cuatro barras representado en la figura P14-56, el enlace de mando AB tiene una velocidad angular de 100 rpm en sentido antihorario durante un intervalo corto de tiempo de su movimiento. La barra BC está horizontal y la CD vertical cuando $\theta = 90°$. Determinar la velocidad angular de la barra BC y la velocidad del punto E cuando $\theta = 90°$.

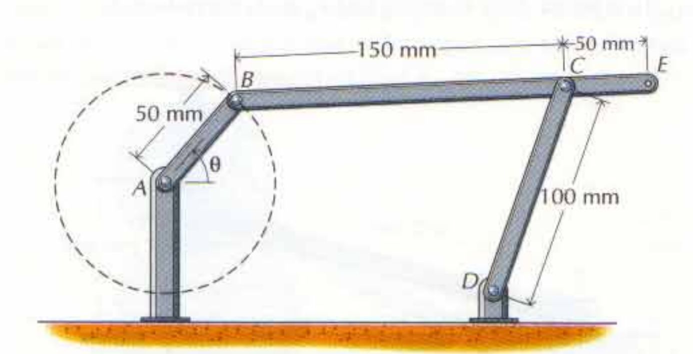


Figura P14-56

14-57* Repítase el problema 14-55 para el caso en que la velocidad vertical del punto B se sustituya por una velocidad horizontal de 125 mm / s dirigida hacia la derecha.

14-58 Repítase el problema 14-56 para el caso $\theta = 0°$.

14-59* En el entramado de cuatro barras de la figura P14-59 el enlace de mando CD tiene una velocidad angular constante de

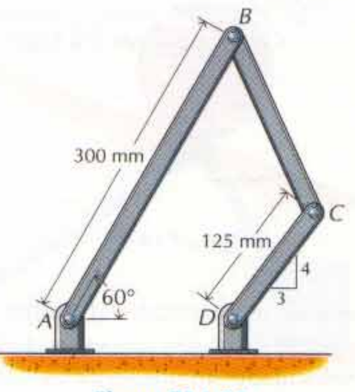


Figura P14-59

120 rpm en sentido horario. Determinar la velocidad angular de las barras AB y BC en el instante representado en el cual B se halla directamente encima de D.

14-60 En el caso del problema 14-50, determinar la velocidad máxima del rodillo C para la cual la velocidad del punto B sea inferior a 1 m/s y la velocidad angular de la barra AB sea menor que 2 rad/s en el instante representado.

14-61 En el caso del problema 14-53, determinar la máxima velocidad angular del enlace AB para la cual la velocidad del punto D sea inferior a 15 cm/s y la velocidad angular de la placa sea inferior a 1 rad/s en el instante representado.

14-62* En el caso del problema 14-56, determinar la máxima velocidad angular del enlace AB para la cual la velocidad del punto E sea inferior a 1 m/s y la velocidad angular de la barra CD sea inferior a 1,5 rad/s cuando $\theta = 0°$.

14-63 En el caso del problema 14-57, determinar la máxima velocidad horizontal del punto B para la cual la velocidad del punto A sea inferior a 250 mm/s en el instante representado.

14-64* En el caso del problema 14-58, determinar la máxima velocidad angular del enlace AB para la cual la velocidad del punto E sea inferior a 1 m/s y la velocidad angular de la barra CD sea inferior a 1,5 rad/s cuando $\theta = 0°$.

14-65* En el caso del problema 14-59, determinar la máxima velocidad angular del enlace CD para la cual la velocidad angular de las barras AB y BC sean ambas inferiores a 3,0 rad/s en el instante representado.

14-66 El brazo D del mecanismo representado en la figura P14-66 tiene un manguito que se desliza libremente sobre la barra BC. La barra de mando AB tiene una velocidad angular de 60 rpm en sentido antihorario cuando se halla en la posición que se indica. Para esta posición, determinar

a. La velocidad angular del cuerpo del manguito D.
b. La velocidad del punto C.
c. La velocidad de la barra BC relativa al cuerpo del manguito D.

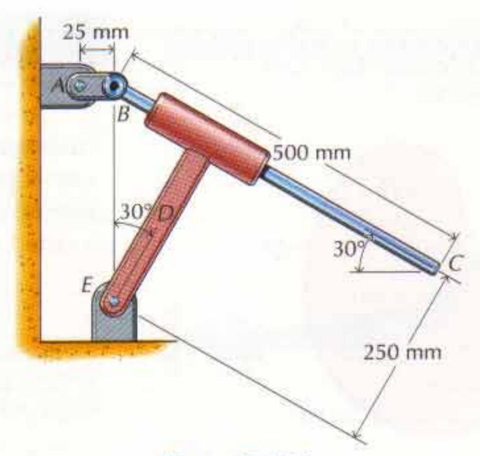


Figura P14-66

14-67* El mecanismo representado en la figura P14-67 se utiliza para originar movimiento intermitente. Las dos ruedas giran en torno a ejes fijos que pasan por sus centros respectivos. Si la rueda A tiene una velocidad angular constante de 30 rpm en sentido horario, determinar la velocidad angular de la rueda B cuando $\theta = 30°$.

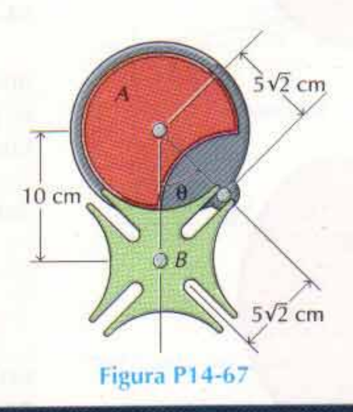


Figura P14-67

14.5.3 Centro instantáneo de rotación

En un movimiento plano cualquiera de un cuerpo, no hay ningún punto que se halle siempre en reposo. No obstante, en cada instante, es siempre posible hallar un punto del cuerpo (o de su extensión) que tenga velocidad nula.[1] Este punto recibe el nombre de **centro instantáneo de rotación** o, simplemente, **centro instantáneo**.

Es importante tener presente que el centro instantáneo de un cuerpo rígido en movimiento plano cualquiera no es un punto fijo. La aceleración del punto

[1] El caso en que ω sea instantáneamente nula exige que dicho punto esté en el infinito.

que es centro instantáneo no suele ser nula. Por tanto, diferentes puntos del cuerpo rígido serán centro instantáneo en diferentes instantes y la situación del centro instantáneo de rotación se moverá respecto al tiempo.

Para situar el centro instantáneo, supongamos que A y B sean dos puntos cualesquiera del cuerpo rígido cuyas velocidades respectivas sean conocidas y que el punto C sea el centro instantáneo (cuya velocidad es nula). El punto C puede estar en el cuerpo o en su extensión. Como $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$, la ecuación de la velocidad relativa (ec. 14-13) nos da

$$\mathbf{v}_A = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{A/C}$$

por lo que el punto C deberá hallarse en la recta que pasa por A y es perpendicular a $\mathbf{v}_A$. Análogamente,

$$\mathbf{v}_B = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/C}$$

y el punto C deberá estar en la recta que pasa por B y es perpendicular a $\mathbf{v}_B$. Si $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ no son paralelos, las dos rectas mencionadas se cortarán y el punto de intersección será el punto C (fig. 14-18*a*).

Si las velocidades de los puntos A y B fuesen paralelas, el centro instantáneo debería hallarse en la recta que une dichos puntos. Como el módulo de la velocidad relativa es ωr, el centro instantáneo se hallará a una distancia $r_{A/C} = v_A/\omega$ del punto A y a una distancia $r_{B/C} = v_B/\omega$ del punto B; su situación podrá hallarse por semejanza de triángulos, tal como se indica en las figuras 14-18*b* y 14-18*c*.

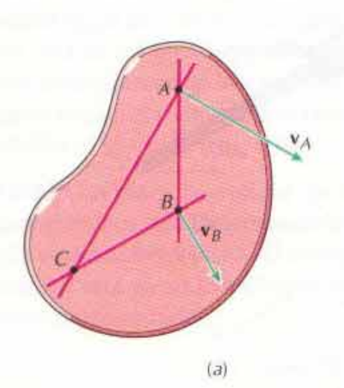
Si las velocidades de los puntos A y B fuesen iguales en un instante cualquiera, el cuerpo se hallaría instantáneamente en traslación y $\omega = 0$. Este caso se podría incluir en lo visto anteriormente si se considera que el centro instantáneo está en el infinito.

Una vez localizado el centro instantáneo, la velocidad de cualquier otro punto del cuerpo se podrá hallar utilizando la ecuación de la velocidad relativa (ec. 14-13)

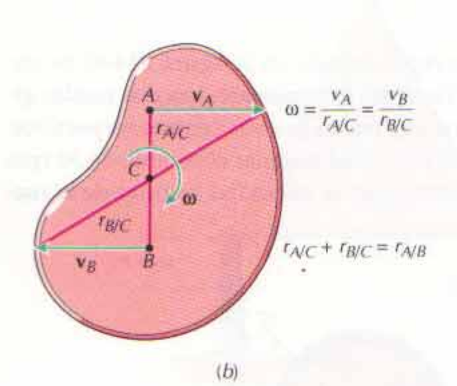
$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{D/C} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{D/C}$$

Cuando dos o más cuerpos estén unidos por un pasador, podremos hallar un centro instantáneo para cada cuerpo. En general, estos centros instantáneos no coincidirán en posición. La situación de cada centro instantáneo podrá hallarse como antes. Como la velocidad del punto que une dos cuerpos es la misma para cada uno de ellos, los centros instantáneos de uno y otro deberán estar sobre una recta que pase por el punto común de ambos cuerpos (fig. 14-19).

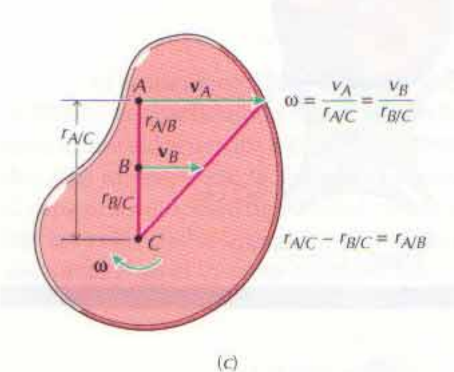
La utilización del centro instantáneo no es necesaria para resolver ningún problema. No es más que otra manera de expresar la ecuación de la velocidad relativa.



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Figura 14-18

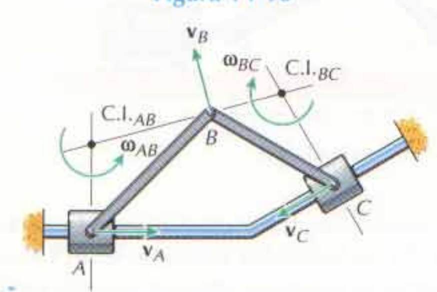


Figura 14-19

PROBLEMA EJEMPLO 14.6

En el instante representado en la figura 14-20, la corredera A se está moviendo hacia la derecha con una celeridad de 3 m/s. Hallar la situación del centro instantáneo de rotación y utilizarlo para hallar la velocidad angular ω_{AB} del brazo y la velocidad $\mathbf{v}_B$ de la corredera B

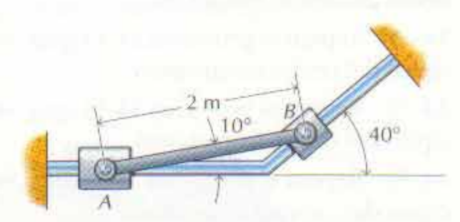


Figura 14-20

SOLUCIÓN

Como la corredera A se mueve en dirección horizontal, el centro instantáneo de rotación deberá hallarse sobre la vertical que pasa por A (fig. 14-21). Análogamente, el centro instantáneo deberá hallarse sobre la recta que pasa por B y es perpendicular a la barra guía de la derecha. El punto C de intersección de estas dos rectas es el punto que se busca. Por el teorema del seno,

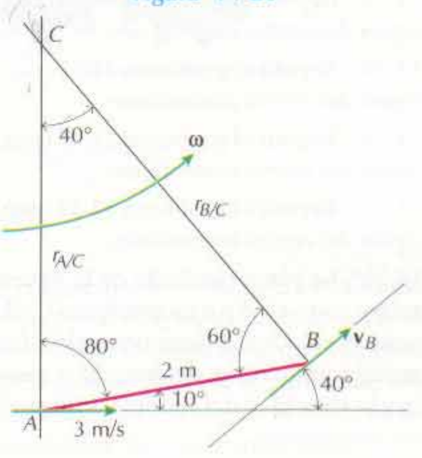


Figura 14-21

$$\frac{r_{A/C}}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{2}{\text{sen } 40^\circ}$$

$$r_{A/C} = 2{,}69 \text{ m}$$

Por tanto, el centro instantáneo de rotación está situado a 2,69 m verticalmente por encima de A.

Como C tiene velocidad nula,

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{A/C} = \mathbf{0} + \mathbf{v}_{A/C}$$

y la velocidad del punto A vendrá dada por

$$v_A = r_{A/C}\omega$$

con lo cual

$$\omega = 1{,}113 \text{ rad/s} \quad \text{(antihorario)} \qquad \text{Resp.}$$

También, por ser nula la velocidad de C,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B/C} = \mathbf{0} + \mathbf{v}_{B/C}$$

y la velocidad del punto B vendrá dada por

$$v_B = r_{B/C}\omega$$

Utilizando, de nuevo, el teorema del seno para hallar la distancia $r_{B/C}$, se tiene

$$\frac{r_{B/C}}{\text{sen } 80^\circ} = \frac{2}{\text{sen } 40^\circ}$$

$$r_{B/C} = 3{,}06 \text{ m}$$

Por tanto, la velocidad de la corredera B será

$$v_B = r_{B/C}\omega = 3{,}41 \text{ m/s} \;\angle 40^\circ \qquad \text{Resp.}$$

14-68* Repetir el problema 14-42 (pág. 94) utilizando los principios del centro instantáneo.

14-69* Repetir el problema 14-43 (pág. 94) utilizando los principios del centro instantáneo.

14-70 Repetir el problema 14-44 (pág. 94) utilizando los principios del centro instantáneo.

14-71* Repetir el problema 14-53 (pág. 96) utilizando los principios del centro instantáneo.

14-72 Repetir el problema 14-56 (pág. 96) utilizando los principios del centro instantáneo.

14-73 Repetir el problema 14-57 (pág. 96) utilizando los principios del centro instantáneo.

14-74* Repetir el problema 14-58 (pág. 96) utilizando los principios del centro instantáneo.

14-75 Repetir el problema 14-59 (pág. 96) utilizando los principios del centro instantáneo.

14-76* La placa cuadrada de la figura P14-76 está unida a un enlace corto en *A* y a un rodillo en *C*. Si, en el instante representado, el enlace *OA* tiene una velocidad angular de 4 rad/s en sentido antihorario, determinar la velocidad angular de la placa y la velocidad del rodillo *C* utilizando los principios del centro instantáneo.

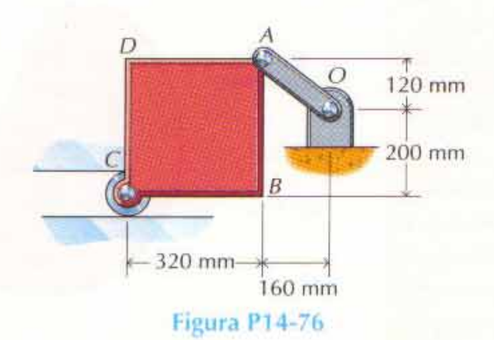


Figura P14-76

14-77* En un intervalo de tiempo muy corto de su movimiento, la corredera *D* de la figura P14-77 sube por el canal con una velocidad de 0,9 m/s. Determinar, para el instante representado, las velocidades angulares de las dos barras y la velocidad del punto *B* utilizando los principios del centro instantáneo.

14-78 La rueda cigüeñal *OA* de la figura P14-78 gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante de 180 rpm. Para la posición representada, determinar la velocidad de la corredera *B* y la velocidad angular de la barra *AB* utilizando los principios del centro instantáneo.

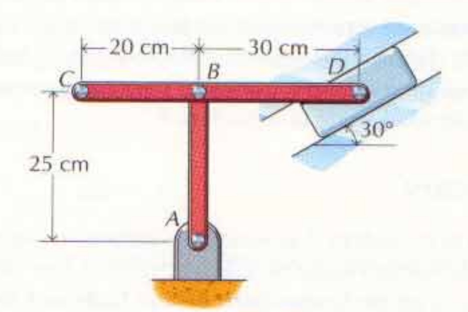


Figura P14-77

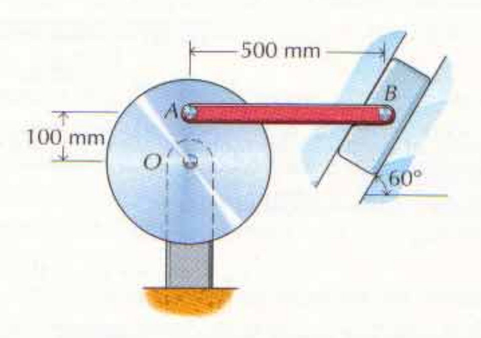


Figura P14-78

14-79* Las ruedas de 30 cm de diámetro representadas en la figura P14-79 ruedan sin deslizamiento por un plano horizontal y están conectadas por una barra *AB* de 90 cm de longitud. Los pasadores *A* y *B* se hallan a 10 cm de los centros de las ruedas. En el instante representado, la velocidad del punto *P* es de 60 cm/s y está dirigida hacia la derecha. Determinar la velocidad del punto *Q* y la velocidad angular de la barra *AB* en ese instante utilizando los principios del centro instantáneo.

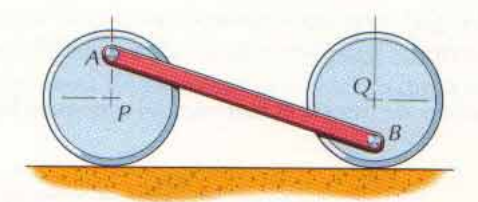


Figura P14-79

14-80 Se hace funcionar un coche de juguete por una cinta móvil en la forma que se indica en la figura P14-80. La cinta se mueve a 2 m/s y la velocidad absoluta del coche es de 0,3 m/s.

Si el diámetro de las ruedas es de 50 mm, determinar la velocidad angular de las mismas y la velocidad $\mathbf{v}_P$ del punto más adelantado de la rueda

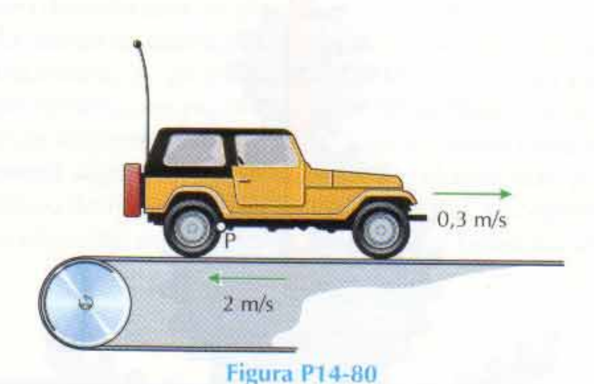


Figura P14-80

14-81 Repetir el problema 14-79 para el caso en que la disposición de las ruedas y la barra sea la que se indica en la figura P14-81.

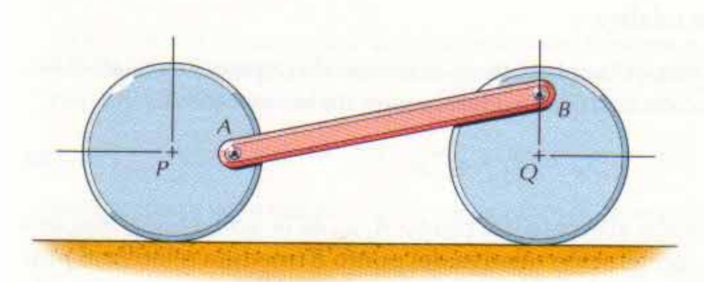


Figura P14-81

14-82* Una rueda escalonada rueda sin deslizamiento sobre su cubo en la forma que se indica en la figura P14-82. Si la velocidad del centro C es de 4,5 m/s hacia la derecha, en el instante representado, determinar

a. La velocidad angular ω de la rueda.
b. Las velocidades de los puntos A, D y E.

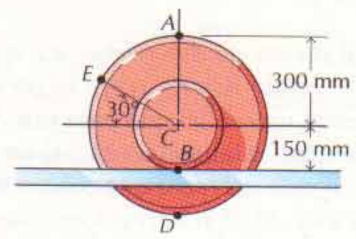


Figura P14-82

14-83 Los centros de las tres ruedas dentadas de la figura 14-83 están conectados mediante pasadores lisos al brazo ABC, que gira en sentido antihorario con una velocidad angular de 5 rad/s. Si la rueda mayor está fija y no gira, determinar la velocidad angular de las otras ruedas y la velocidad del diente D, utilizando los principios del centro instantáneo.

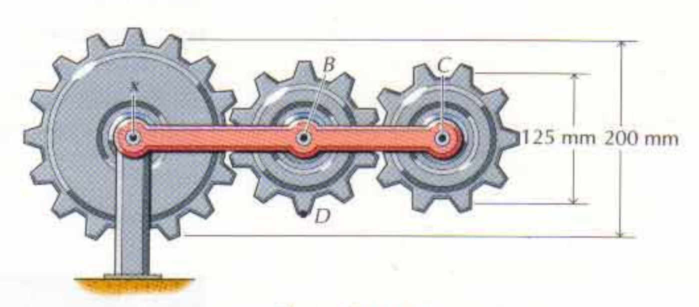


Figura P14-83

14-84* La rueda de 0,5 m de diámetro de la figura P14-84 está rodando sin deslizamiento por el interior de un tambor fijo de 2,0 m de diámetro. Si el centro de la rueda tiene una velocidad de 1,5 m/s hacia la derecha cuando pasa por el punto más bajo del tambor, determinar la velocidad angular de la rueda en ese instante utilizando los principios del centro instantáneo.

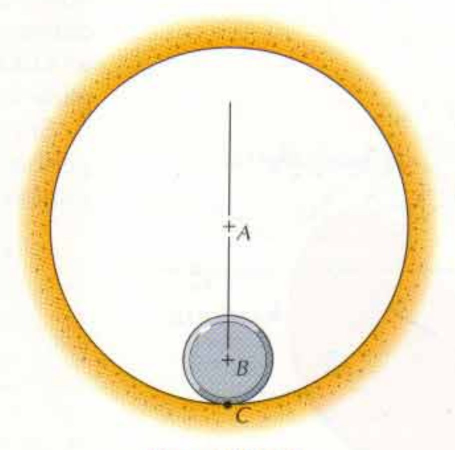


Figura P14-84

14-85* Los centros de las dos ruedas dentadas de la figura P14-85 están conectados mediante pasadores lisos al brazo ABC, el cual gira en sentido horario con una velocidad angular constante de 5 rad/s alrededor del punto fijo A. La rueda mayor está rodando por la parte interior de un tambor dentado fi-

jo. Determinar la velocidad angular de cada una de las ruedas y la velocidad del diente D para la posición representada, utilizando los principios del centro instantáneo.

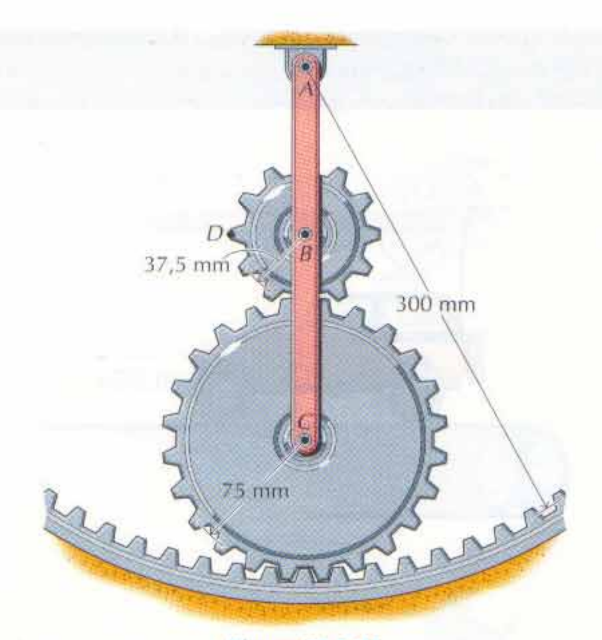


Figura P14-85

14.5.4 Aceleración relativa

Derivando dos veces respecto al tiempo la ecuación de la posición relativa (ec. 14-13*a*) se tiene la relación entre las aceleraciones de los puntos A y B

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \tag{14-14a}$$

donde $\mathbf{a}_A$ es la aceleración absoluta del punto A, $\mathbf{a}_B$ es la aceleración absoluta del punto B y $\mathbf{a}_{B/A}$ es la aceleración relativa del punto B (medida relativa al punto A). La ecuación 14-14*a* es aplicable a dos puntos cualesquiera tanto si forman parte del cuerpo rígido como si no.

Sin embargo, si A y B son dos puntos de un cuerpo rígido, su separación permanece constante y el punto B recorrerá una trayectoria circular en torno al punto A. Por tanto, la aceleración relativa $\mathbf{a}_{B/A}$ viene dada por (ec. 14-12)

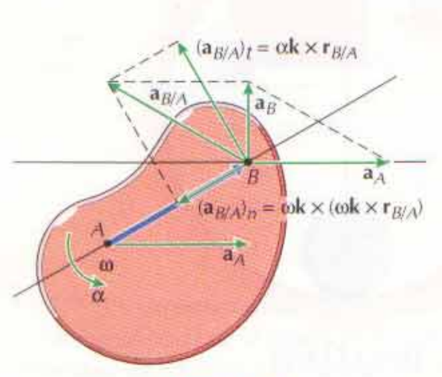


Figura 14-22

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{B/A} &= (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n = \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} + \omega\mathbf{k} \times (\omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A}) \\ &= r_{B/A}\alpha\mathbf{e}_t + r_{B/A}\omega^2\mathbf{e}_n\end{aligned} \tag{14-14b}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{B/A} &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_A + \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} + \omega\mathbf{k} \times (\omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A}) \\ &= \mathbf{a}_A + r_{B/A}\alpha\mathbf{e}_t + r_{B/A}\omega^2\mathbf{e}_n\end{aligned} \tag{14-14c}$$

Por tanto, la aceleración del punto B consta de dos partes: $\mathbf{a}_A$, que representa una traslación de todo el cuerpo con el punto A; y $r_{B/A}\alpha\,\mathbf{e}_t + r_{B/A}\omega^2\,\mathbf{e}_n$, que representa una rotación del cuerpo en torno a un eje fijo que pasa por A (fig. 14-22).

El uso de la ecuación de la aceleración relativa (ec. 14-14) en la resolución de problemas en los que interviene un solo cuerpo o una conexión de varios es análogo al uso de la ecuación de la velocidad relativa. Como la componente normal de la ecuación de la aceleración relativa contiene la velocidad angular

ω, habrá que resolver antes el problema de la velocidad relativa para poder resolver el de la aceleración relativa. En el caso de la conexión de varios cuerpos, la aceleración del punto común a los dos cuerpos rígidos se escribe en función de la aceleración de algún otro punto (cuya aceleración se conozca o desee conocer) de cada uno de los cuerpos rígidos.

El centro instantáneo de rotación de un cuerpo rígido en movimiento plano cualquiera no es un punto fijo. La aceleración del punto que es centro instantáneo no suele ser nula. Por tanto, no se deberá utilizar este punto para el cálculo de aceleraciones. Para localizar el centro instantáneo de aceleración nula se podrá seguir un análisis semejante al utilizado para localizar el centro instantáneo de rotación (o de velocidad nula). Sin embargo, el centro instantáneo de aceleración nula no suele ser útil para la resolución de problemas sencillos.

PROBLEMA EJEMPLO 14.7

Para las condiciones e instante especificados en el ejemplo 14-4, determinar la aceleración angular de la escalera y la aceleración de su extremo superior.

SOLUCIÓN

La aceleración del extremo B de la escalera viene dada por $\mathbf{a}_B = \mathbf{0}$ y la aceleración del extremo A estará dirigida a lo largo de la pared: $\mathbf{a}_A = a_A\mathbf{j}$. Entonces, la ecuación de la aceleración relativa da

$$\mathbf{a}_A\mathbf{j} = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B} = \mathbf{0} + (\mathbf{a}_{A/B})_t + (\mathbf{a}_{A/B})_n \qquad (c)$$

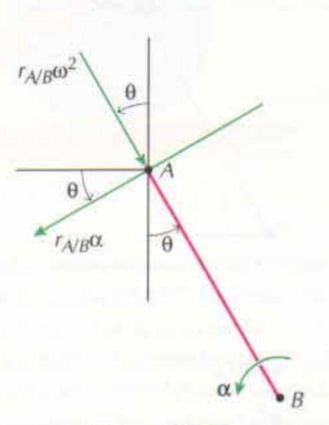


Figura 14-23

Pero, según se ve en la figura 14-23, los términos de la aceleración relativa vienen dados por

$$(\mathbf{a}_{A/B})_t = 3\alpha\mathbf{e}_t = 3\alpha(-\cos 30°\mathbf{i} - \text{sen } 30°\mathbf{j})$$

y

$$(\mathbf{a}_{A/B})_n = 3\omega^2\mathbf{e}_n = 3\omega^2(-\text{ sen } 30°\mathbf{i} - \cos\ 30°\mathbf{j})$$

donde, del problema ejemplo 14-4, $\omega = 0{,}770$ rad/s. Entonces, la componente x de la ecuación c da

$$0 = -3\alpha\cos 30 + 3(0{,}770)^2 \text{ sen } 30°$$

$$\alpha = 0{,}342 \text{ rad/s}^2 \text{ (antihorario)} \qquad \text{Resp.}$$

y la componente y da

$$a_A = -(3)(0{,}342) \text{ sen } 30° - (3)(0{,}770)^2 \cos 30°$$

$$= -2{,}053,\ \text{m/s}^2$$

o sea

$$\mathbf{a}_A = 2{,}053 \text{ m/s}^2 \downarrow \qquad \text{Resp.}$$

De otra manera, los términos de la aceleración relativa se pueden calcular utilizando el producto vectorial

$$(\mathbf{a}_{A/B})_t = \alpha\mathbf{k} \times (-3 \text{ sen } 30°\mathbf{i} + \cos 30°\mathbf{j})$$

$$= -3\alpha \text{ sen } 30°\ \mathbf{i} - 3\alpha\cos 30°\ \mathbf{j}$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a}_{A/B})_n &= \omega\mathbf{k} \times [\omega\mathbf{k} \times (-3 \text{ sen } 30° \,\mathbf{i} - 3 \cos 30° \,\mathbf{j})] \\
&= \omega\mathbf{k} \times [-3\omega \text{ sen } 30° \,\mathbf{i} - 3\omega \cos 30° \,\mathbf{j}] \\
&= -3\omega^2 \text{ sen } 30° \,\mathbf{i} - 3\omega^2 \cos 30° \,\mathbf{j}
\end{aligned}
$$

que da el resultado anterior.

PROBLEMA EJEMPLO 14.8

Para las condiciones e instante especificados en el problema ejemplo 14-5, determinar la aceleración $\mathbf{a}_B$ de la corredera y la aceleración angular α_{AB} de la biela.

SOLUCIÓN

La aceleración del eje O de la rueda es nula y la aceleración de la corredera B sólo tiene componente horizontal. Además, según el problema ejemplo 14-5, ω_{OA} = 10 rad/s (antihorario), $\alpha_{OA} = 0$ rad/s², ω_{AB} = 1,533 rad/s (horario) y el ángulo que forma la biela AB con la horizontal es $\phi = 15{,}06°$. Escribiendo la aceleración del punto común A en función de las aceleraciones de los puntos O y B se tiene

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B} = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{A/O}$$

o sea

$$a_B\mathbf{i} + (\mathbf{a}_{A/B})_t + (\mathbf{a}_{A/B})_n = \mathbf{0} + (\mathbf{a}_{A/O})_t + (\mathbf{a}_{A/O})_n \qquad (d)$$

Pero en la figura 14-24 se ve que los términos de las aceleraciones relativas vienen dados por

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a}_{A/B})_t &= 750\alpha_{AB}(-\text{ sen } \phi \,\mathbf{i} - \cos \phi \,\mathbf{j}) \\
&= -194{,}87\alpha_{AB}\mathbf{i} - (742{,}2\alpha_{AB}\mathbf{j} \text{ mm/s}^2) \\
(\mathbf{a}_{A/B})_n &= 750\omega_{AB}^2(\cos \phi \,\mathbf{i} - \text{ sen } \phi \,\mathbf{j}) \\
&= 1746{,}7\mathbf{i} - 470\mathbf{j} \text{ mm/s}^2 \\
(\mathbf{a}_{A/O})_t &= 225\alpha_{OA}(-\text{ sen } 60° \,\mathbf{i} + \cos 60° \,\mathbf{j}) = 0 \text{ mm/s}^2
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a}_{A/O})_n &= 225\omega_{OA}^2(-\cos 60° \,\mathbf{i} - \text{ sen } 60° \,\mathbf{j}) \\
&= -11250\mathbf{i} - 19485\mathbf{j} \text{ mm/s}^2
\end{aligned}
$$

Luego, la componente y de la ecuación d da

$$-742{,}2\alpha_{AB} - 470 = -19485$$

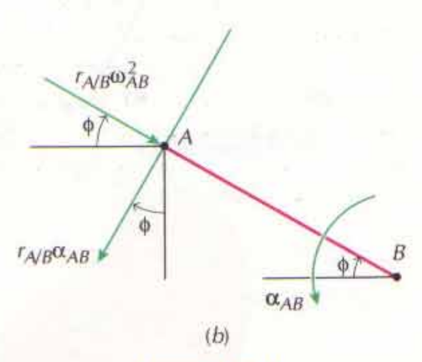
o sea

$$\alpha_{AB} = 25{,}6 \text{ rad/s}^2 \quad \text{(antihorario)} \qquad \text{Resp.}$$

y la componente x da

$$
\begin{aligned}
a_B - 194{,}87\alpha_{AB} + 1746{,}7 &= -11250 \\
a_B &= -8000 \text{ mm/s}^2 \\
\mathbf{a}_B &= 8000 \text{ mm/s}^2 \leftarrow \qquad \text{Resp.}
\end{aligned}
$$

(a)



(b)

Figura 14-24

PROBLEMAS

14-86* En el caso del problema 14-42, determinar la aceleración de la corredera A y la aceleración angular de la barra AB en el instante en que $\theta = 75°$.

14-87* En el caso del problema 14-43, determinar la aceleración de A y la aceleración angular de la barra AB en el instante en que $x = 0{,}6$ m.

14-88 El cigüeñal del problema 14-44 tiene una aceleración angular de 5 rad/s^2 en sentido horario en el instante representado. Determinar la aceleración del émbolo y la aceleración angular de la biela BC en ese instante.

14-89* En el problema 14-45, la velocidad del núcleo está disminuyendo a razón de 75 mm/s^2. Determinar la aceleracción angular α_0 de la rueda dentada y la aceleración angular ω_{AB} de AB en el instante representado.

14-90 En el problema 14-46, determinar la aceleración a_C del bloque y la aceleración angular α_{AB} del enlace en el instante en que $\theta = 75°$.

14-91 En el problema 14-53, la aceleración angular del enlace AB es de 10 rad/s^2 en sentido antihorario. Determinar la aceleración angular de la placa y la aceleración del punto D en el instante representado.

14-92* En el problema 14-56, la aceleración angular del enlace AB es de 12 rad/s^2 en sentido antihorario. Determinar la aceleración angular de la barra BC y la aceleración del punto E cuando $\theta = 90°$.

14-93 En el caso del problema 14-59, determinar la aceleración angular de las barras AB y BC en el instante representado.

14-94* En el problema 14-76, la velocidad del punto C está disminuyendo a razón de 50 mm/s^2. Determinar la aceleración de los puntos A y B en ese instante.

14-95* La rueda representada en la figura P14-95 está rodando sin deslizamiento sobre la superficie horizontal. En el instante representado, la rueda tiene una velocidad angular de 6 rad/s y una aceleración angular de 2 rad/s^2, ambas en sentido horario. Determinar la aceleración angular de los enlaces AB y BC en ese instante.

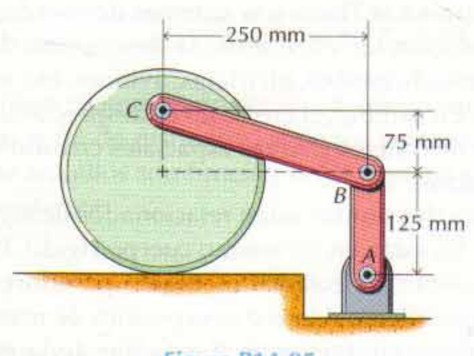


Figura P14-95

14-96 La rueda de 400 mm de diámetro representada en la figura P14-96 está rodando sin deslizamiento sobre la superficie horizontal. La barra AB tiene una longitud de 750 mm y está unida a la rueda mediante un pasador liso situado a 150 mm del centro. En el instante representado, el centro de la rueda tiene una velocidad de 1,5 m/s hacia la izquierda y una aceleración de 0,80 m/s^2 hacia la derecha. Determinar la aceleración angular α_0 de la rueda y la aceleración angular α_{AB} de la barra en ese instante.

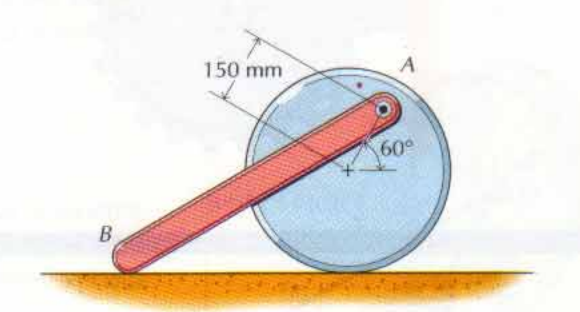


Figura P14-96

14-97* Los ejes de dos ruedas están unidos rígidamente a un vehículo según se indica en la figura P14-97. La velocidad y la aceleración del vehículo son 9 m/s hacia la derecha y 0,9 m/s^2 hacia la izquierda, respectivamente. Las ruedas están además conectadas mediante una barra horizontal AB. Si la rueda menor está rodando sin deslizamiento, determinar la aceleración angular de las dos ruedas y la aceleración relativa entre la rueda mayor y la superficie en el punto C.

Figura P14-97

14-98 Las dos ruedas dentadas de la figura P14-98 giran en torno a sus ejes respectivos. Las barras AB y BC tienen, cada

una, una longitud de 125 mm. En el instante representado, la rueda mayor gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante $\omega_A = 12$ rad/s. Determinar las aceleraciones angulares α_{AB} y α_{BC} de las dos barras y la aceleración del pasador A relativa al pasador C.

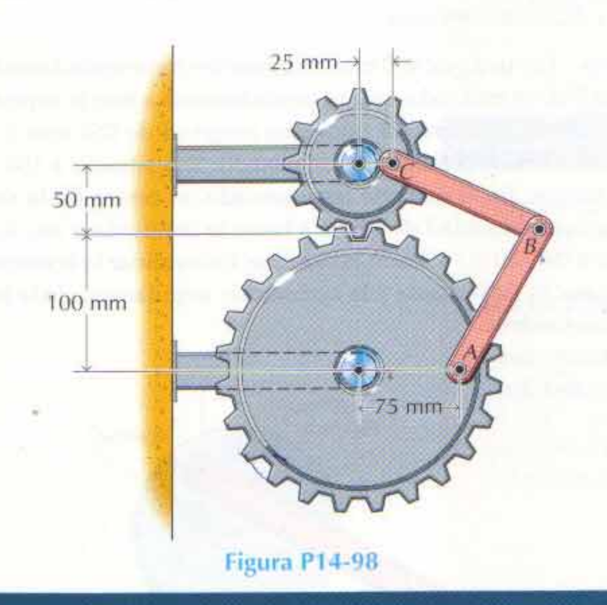


Figura P14-98

14-99 Repetir el problema 14-97 para el caso en que el extremo derecho de la barra AB de 2,5 m de longitud estuviera conectado al punto B' en vez de al B.

14-100* En el problema 14-98, la rueda grande gira en sentido antihorario con $\omega_A = 5$ rad/s. Determinar la aceleración angular α_A de esta rueda para la cual fuesen iguales las aceleraciones angulares de las dos barras ($\alpha_{AB} = \alpha_{BC}$).

14-101 En el problema 14-85, el brazo ABC tiene una aceleración angular de 2 rad/s² en sentido antihorario. Determinar la aceleración angular de cada rueda y la aceleración del diente D, para la posición representada.

14-102* En el problema 14-84, la celeridad del centro de la rueda disminuye a razón de 0,5 m/s² cuando pasa por la parte más baja del tambor. Determinar la aceleración angular de la rueda y la aceleración del punto C (punto de la rueda en contacto con el tambor) en ese instante. (*Sugerencia:* Suponer que el centro A del tambor y el centro B de la rueda están unidos mediante una barra rígida. Relacionar los movimientos angulares de rueda y barra imaginaria mediante el movimiento dado del centro de la rueda.)

14-103* En el caso del mecanismo del problema 14-67, determinar la aceleración angular de la rueda B cuando $\theta = 30°$.

14.6 MOVIMIENTO RELATIVO A EJES EN ROTACIÓN

Hasta ahora, en este capítulo, hemos descrito la posición, la velocidad y la aceleración de cada punto utilizando un sistema de coordenadas fijo. La posición relativa, la velocidad relativa y la aceleración relativa también se han descrito utilizando el mismo sistema de coordenadas fijo. Para el tipo de problemas que se han considerado hasta ahora, este enfoque ha resultado adecuado, directo y de utilización relativamente sencilla.

Sin embargo, existen otros tipos de problemas para los cuales conviene describir la posición o el movimiento de uno de los puntos relativo a un sistema de coordenadas en rotación. Entre los problemas de este tipo podemos citar:

1. El movimiento se observa desde un sistema de coordenadas que está girando. Por ejemplo, la Tierra tiene un movimiento de rotación y los sistemas de coordenadas solidarios a la Tierra son sistemas de coordenadas en rotación. El efecto de la rotación terrestre sobre la descripción del movimiento de columpios, pelotas de béisbol, bicicletas, aviones, etc. es tan pequeño que ni se considera. En cambio, el efecto no es despreciable cuando se describe el movimiento de cohetes y naves espaciales cuando se observan desde la Tierra en rotación.
2. Cuando los movimientos de dos puntos están relacionados de alguna manera pero no son iguales y no están en un mismo cuerpo rígido. Por ejemplo, algunos mecanismos están conectados mediante pasadores que se deslizan por ranuras. El movimiento relativo se especifica de manera conveniente dando el movimiento de traslación y rotación de la pieza que

contiene la ranura, la forma de dicha ranura y la rapidez con que el pasador la recorre.

3. La solución de problemas de Cinética en los que interviene la rotación de cuerpos rígidos de forma irregular. Los momentos y productos de inercia dependen del sistema de coordenadas que se utilice para describirlos. Si los ejes están fijos pero el cuerpo gira, sus momentos de inercia variarán a menos que el cuerpo presente ciertas simetrías. En cambio, si se deja que los ejes de coordenadas giren con el cuerpo, los momentos y productos de inercia serán constantes.

Desde luego, al derivar para obtener la velocidad y la aceleración, habrá que tener en cuenta la rotación del sistema de coordenadas.

14.6.1 Posición

Para ver cómo afecta a la descripción del movimiento la rotación del sistema de coordenadas, consideremos que A y B sean dos puntos cualesquiera animados de movimiento plano. En función de un sistema de coordenadas fijo X-Y, las situaciones de A y B vienen dadas por los vectores de posición

$$\mathbf{r}_A = X_A\mathbf{i} + Y_A\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}_B = X_B\mathbf{i} + Y_B\mathbf{j}$$

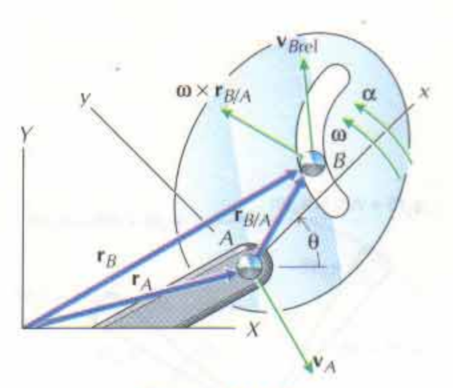


Figura 14-25

donde $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ son vectores unitarios asociados a los ejes X e Y, respectivamente. La regla del triángulo para la adición de dos vectores da $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$. Si se mide $\mathbf{r}_{B/A}$ en el sistema de coordenadas fijo X-Y, este resultado es exactamente el que se ha utilizado en la primera parte de este capítulo.

Supongamos ahora que el punto A pertenezca a un cuerpo rígido que gire con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\,\mathbf{k}$ y con aceleración angular $\boldsymbol{\alpha} = \ddot{\theta}\,\mathbf{k}$ (fig. 14-25). Supongamos además que el movimiento (posición, velocidad y aceleración) del punto A pueda describirse fácilmente en el sistema de coordenadas fijo. Por otra parte, supongamos que el punto B se mueva de una manera prefijada relativa al cuerpo rígido giratorio —pudiera ser un pasador que corra por una ranura. Aun cuando pudiera ser fácil describir el movimiento (posición, velocidad y aceleración) del punto B relativo al cuerpo giratorio, pudiera no ser fácil la descripción de su movimiento relativo al eje de coordenadas fijo X-Y.

En lugar de lo anterior, sea x-y un sistema de coordenadas solidario al cuerpo rígido y que gire con él. Tomemos el punto A como origen de este sistema giratorio. Entonces, en función de este sistema, el vector de posición relativa es

$$\mathbf{r}_{B/A} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$$

donde se han representado por $\mathbf{e}_x$ y $\mathbf{e}_y$ los vectores unitarios asociados a los ejes giratorios, a fin de distinguirlos de los vectores unitarios fijos $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ y hacer resaltar que aquéllos son función del tiempo. Por tanto, la posición de B vendrá determinada por

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} = \mathbf{r}_A + (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) \qquad (14\text{-}15)$$

en donde x, y, $\mathbf{r}_A = X_A\,\mathbf{i} + Y_A\,\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_x = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{e}_y = -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}$ se supone son funciones del tiempo conocidas.

14.6.2 Velocidad

La relación entre las velocidades absoluta y relativa se obtiene derivando respecto al tiempo la ecuación de la posición relativa (ec. 14-15):

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \mathbf{v}_A + \frac{d\,(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y)}{dt}$$

$$= \mathbf{v}_A + \frac{dx}{dt}\,\mathbf{e}_x + x\,\frac{d\mathbf{e}_x}{dt} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{e}_y + y\,\frac{d\mathbf{e}_y}{dt}$$

$$= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B\mathrm{rel}} + x\,\frac{d\mathbf{e}_x}{dt} + y\,\frac{d\mathbf{e}_y}{dt} \qquad (14\text{-}16a)$$

en donde $\mathbf{v}_{B\mathrm{rel}} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y$ es la velocidad de B relativa al sistema de coordenadas giratorio x-y (medida en él). Los dos últimos términos aparecen porque las direcciones de los vectores unitarios $\mathbf{e}_x$ y $\mathbf{e}_y$ varían con el tiempo a causa de la rotación de los ejes x-y.

Las derivadas de los vectores unitarios $\mathbf{e}_x$ y $\mathbf{e}_y$ se calculan aplicando la regla de la cadena para la derivación, que nos da

$$\frac{d\mathbf{e}_x}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_x}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt}$$

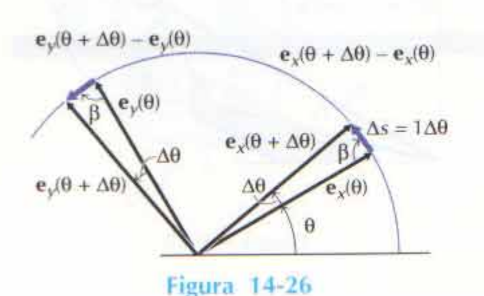


Figura 14-26

donde

$$\frac{d\mathbf{e}_x}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\mathbf{e}_x\,(\theta + \Delta\theta) - \mathbf{e}_x\,(\theta)}{\Delta\theta}$$

Pero en el límite, cuando $\Delta\theta \to 0$, la distancia $|\mathbf{e}_x(\theta + \Delta\theta) - \mathbf{e}_x(\theta)|$ tiende a la longitud del arco de una circunferencia de radio unidad $\Delta s = 1\Delta\theta$ y el ángulo β tiende a 90° (fig. 14-26). Por tanto, el vector $\mathbf{e}_x(\theta + \Delta\theta) - \mathbf{e}_x(\theta)$ tiene por módulo $\Delta\theta$ y está dirigido en la dirección de $\mathbf{e}_y$ y

$$\frac{d\mathbf{e}_x}{dt} = \dot{\theta} \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta\theta\mathbf{e}_y}{\Delta\theta} = \dot{\theta}\mathbf{e}_y = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_x \qquad (14\text{-}16b)$$

donde $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ y $\omega = \dot{\theta} = d\theta/dt$.

Análogamente, la derivada de $\mathbf{e}_y$ respecto al tiempo se puede calcular mediante la regla de la cadena

$$\frac{d\mathbf{e}_y}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_y}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt}$$

donde

$$\frac{d\mathbf{e}_y}{dt} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\mathbf{e}_y(\theta + \Delta\theta) - \mathbf{e}_y(\theta)}{\Delta\theta}$$

Pero en el límite cuando $\Delta\theta \to 0$, la distancia $|\mathbf{e}_y(\theta + \Delta\theta) - \mathbf{e}_y(\theta)|$ tiende, una vez más, a la longitud del arco de una circunferencia de radio unidad $\Delta s = 1\Delta\theta$ y el ángulo β vuelve a tender a 90° (fig. 14-26). Por tanto, el vector $\mathbf{e}_y(\theta + \Delta\theta) - \mathbf{e}_y(\theta)$ tiene por módulo $\Delta\theta$ y está dirigido en sentido opuesto a $\mathbf{e}_x$ y

$$\frac{d\mathbf{e}_y}{dt} = \dot{\theta} \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{-\Delta\theta\mathbf{e}_x}{\Delta\theta} = \dot{\theta}\mathbf{e}_x = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_y \qquad (14\text{-}16c)$$

Aplicando estos resultados en la ecuación de la velocidad relativa (ec. 14-16*a*) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{Brel} + (x\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_x + y\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_y) \\ &= \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{v}_{Brel} \end{aligned} \tag{14-16d}$$

donde $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ y $\boldsymbol{\omega}$ se miden relativas al sistema de coordenadas fijo *X-Y*; $\mathbf{r}_{B/A}$ y $\mathbf{v}_{Brel}$ se miden relativos al sistema de coordenadas giratorio *x-y*. Desde luego, todos los vectores de la ecuación 14-16*d* se deben expresar en un sistema de coordenadas común antes de efectuar las sumas y el producto vectorial. O bien $\mathbf{r}_{B/A}$ y $\mathbf{v}_{Brel}$ se expresan en el sistema de coordenadas fijo *X-Y* (utilizando las expresiones $\mathbf{e}_x = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ y $\mathbf{e}_y = -\operatorname{sen}\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$), o bien $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ deberán expresarse en el sistema de coordenadas giratorio *x-y* (utilizando las expresiones $\mathbf{i} = \cos\theta\mathbf{e}_x - \operatorname{sen}\theta\mathbf{e}_y$ y $\mathbf{j} = \operatorname{sen}\theta\mathbf{e}_x + \cos\theta\mathbf{e}_y$). La elección se basará solamente en la forma en que se conozcan los datos y en la forma en que quieran tenerse los resultados.

Si *A* y *B* son dos puntos de un mismo cuerpo rígido, entonces $\mathbf{v}_{Brel} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega}$ será su velocidad angular y la ecuación 14-16*d* se reduce a la ecuación 14-13*d*. No será necesaria la complejidad adicional del sistema de coordenadas giratorio ni será útil para este tipo de problemas.

Si *A* es un punto fijo de un cuerpo rígido en rotación y *B* es un pasador que corre en una ranura del cuerpo (fig. 14-25), $\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ será la velocidad que tendría el punto *B* si estuviera fijo en el cuerpo en vez de estar moviéndose respecto a él. El último término $\mathbf{v}_{Brel}$ es la velocidad adicional que tiene el punto *B* a causa de su movimiento a lo largo de la ranura. La dirección de $\mathbf{v}_{Brel}$ es tangente a la ranura, según se indica.

14.6.3 Aceleración

La relación entre las aceleraciones absoluta y relativa se obtiene derivando la ecuación de la velocidad relativa (ec. 14-16*d*) respecto al tiempo, con lo que se tiene

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{Brel}}{dt} \tag{14-17a}$$

Del cálculo de la velocidad relativa,

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \mathbf{v}_{Brel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{14-17b}$$

Un cálculo semejante de la derivada de $\mathbf{v}_{Brel}$ nos da

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_{Brel}}{dt} &= \frac{d(\dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y)}{dt} \\ &= (\ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y) + \left(\dot{x}\,\frac{d\mathbf{e}_x}{dt} + \dot{y}\,\frac{d\mathbf{e}_y}{dt}\right) \\ &= \mathbf{a}_{Brel} + (\dot{x}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_y) \\ &= \mathbf{a}_{Brel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{Brel} \end{aligned} \tag{14-17c}$$

donde $\mathbf{a}_{B\text{rel}} = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y$ es la aceleración de B relativa al sistema de coordenadas giratorio x-y (medida en él). Aplicando las ecuaciones 14-17*b* y 14-17*c* en la ecuación 14-17*a* y reagrupando términos se llega a

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + \mathbf{a}_{B\text{rel}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{B\text{rel}} \qquad \text{(14-17d)}$$

donde $\mathbf{a}_A$, $\mathbf{a}_B$, $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ se miden relativas al sistema de coordenadas fijo X-Y; $\mathbf{r}_{B/A}$, $\mathbf{v}_{B\text{rel}}$ y $\mathbf{a}_{B\text{rel}}$ se miden relativas al sistema de coordenadas giratorio x-y. También ahora, los vectores de la ecuación 14-17*d* deben expresarse en un sistema de coordenadas común antes de efectuar las sumas y productos vectoriales. Puede utilizarse o bien el sistema de coordenadas fijo X-Y o bien el giratorio x-y. La elección se basará tan sólo en la forma en que se conozcan los datos y en la forma en que se desee tener los resultados.

Si A y B son dos puntos fijos de un mismo cuerpo rígido, entonces $\mathbf{v}_{B\text{rel}} = \mathbf{a}_{B\text{rel}} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ son la velocidad angular y la aceleración angular del cuerpo y la ecuación 14-17*d* se reduce a la ecuación 14-14*c*. No es necesaria la complejidad adicional del sistema de coordenadas giratorio, ni resulta útil para este tipo de problemas.

Si A es un punto fijo en un cuerpo rígido en rotación y B es un pasador que se desliza por una ranura del cuerpo (fig. 14-25), la aceleración que tendría el punto B si estuviera fijo en el cuerpo rígido en vez de moviéndose respecto a él será $\mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B})$. El término $\mathbf{a}_{B\text{rel}}$ es la aceleración adicional que tiene el punto B a causa de su movimiento a lo largo de la ranura. El término restante $2\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{B\text{rel}}$, denominado **aceleración de Coriolis**, no tiene una interpretación sencilla. Tal como indica el producto vectorial, la aceleración de Coriolis será siempre perpendicular tanto a $\boldsymbol{\omega}$ (estará en el plano del movimiento) como a $\mathbf{v}_{B\text{rel}}$ (será perpendicular a la ranura a lo largo de la cual se mueve el pasador).

La orientación, situación del origen, velocidad angular y aceleración angular del sistema de coordenadas giratorio deberán tomarse de manera que simplifiquen el cálculo de los distintos términos que figuran en las ecuaciones de la velocidad relativa y de la aceleración relativa. Por ejemplo, el origen A deberá ser un punto cuyas velocidad y aceleración absolutas sean fáciles de obtener. La velocidad y la aceleración angulares del sistema giratorio se deberán elegir de manera que se puedan calcular fácilmente la velocidad y aceleración del punto B relativas al sistema de coordenadas giratorio. La orientación del sistema de coordenadas giratorio relativa al sistema de coordenadas fijo deberá tomarse de manera que sean fáciles de describir las componentes de los diversos vectores.

Por último, las ecuaciones 14-16 y 14-17 son igualmente válidas para describir el movimiento relativo de puntos individuales que para describir el movimiento de puntos del cuerpo rígido. Aun cuando se han deducido para el caso de movimiento plano ($\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_{B/A} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$, etc.), en el apartado siguiente se verá que la expresión vectorial de estas ecuaciones es igualmente válida en el caso de un movimiento tridimensional cualquiera.

PROBLEMA EJEMPLO 14.9

El automóvil B recorre una carretera recta con una celeridad constante de 96 km/h mientras el auto A recorre una curva circular de radio 150 m con una ce-

leridad constante de 72 km/h (fig. 14-27). Determinar la velocidad y la aceleración que el auto *B* parece tener para un observador que vaya en el auto *A*, en el instante representado.

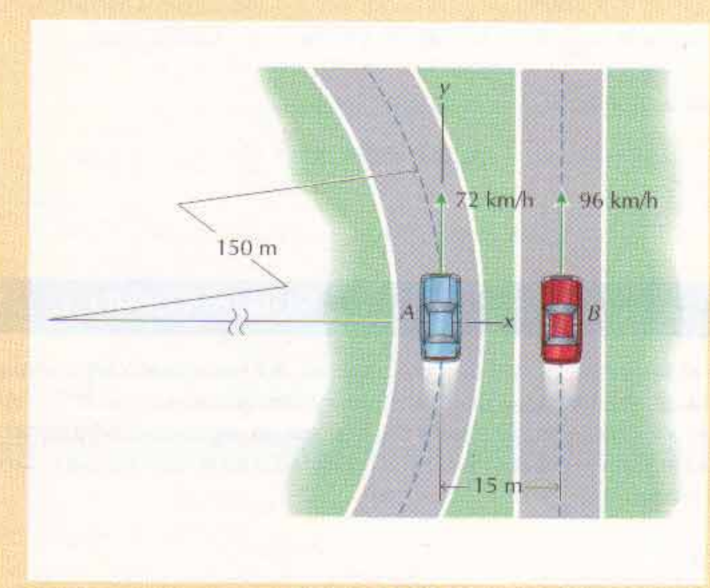


Figura 14-27

SOLUCIÓN

En función de coordenadas r-θ fijas con origen en el centro de la curva

$$\mathbf{v}_A = r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \qquad 20\mathbf{e}_\theta = 150\ \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

Por tanto, $\dot{\theta} = 0{,}1333$ rad/s. Además, como la celeridad del auto *A* es constante, $\ddot{\theta} = 0$ y la aceleración de *A* será

$$\mathbf{a}_A = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta = -\ (150)\,(0{,}1333)^2\mathbf{e}_r = -\ 2{,}665\ \text{m/s}^2$$

El sistema de coordenadas móvil x-y es solidario al auto *A* y se mueve con él. Como estas coordenadas están siempre alineadas con las r-θ anteriores, la velocidad angular y la aceleración angular de la rotación del sistema de coordenadas x-y serán $\boldsymbol{\omega} = 0{,}1333\mathbf{k}$ rad/s y $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$. Luego, la ecuación de la velocidad relativa (ec. 14-16*d*) es

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{v}_{B\text{rel}}$$

donde

$$\mathbf{v}_A = 72\mathbf{e}_y\ \text{km/h} = 20\mathbf{e}_y\ \text{m/s} \qquad \mathbf{v}_B = 96\mathbf{e}_y\ \text{km/h} = 26{,}7\mathbf{e}_y\ \text{m/s}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} = (0{,}1333\mathbf{k}) \times (15\mathbf{e}_x) = 2{,}00\mathbf{e}_y\ \text{m/s}$$

Despejando $\mathbf{v}_{B\text{rel}}$ se tiene

$$\mathbf{v}_{B\text{rel}} = 4{,}7\mathbf{e}_y\ \text{m/s} = 16{,}9\mathbf{e}_y\ \text{km/h}$$ Resp.

La ecuación de la aceleración relativa (ec. 14-17*d*) es

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + \mathbf{a}_{B\text{rel}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{B\text{rel}}$$

donde

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{0} \qquad \mathbf{a}_A = -2{,}665\mathbf{e}_x \ \text{m/s}^2 \qquad \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) = (0{,}1333\mathbf{k}) \times (2{,}00\mathbf{e}_y) = -0{,}267\mathbf{e}_x \ \text{m/s}^2$$

$$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{B\text{rel}} = (0{,}1333\mathbf{k}) \times (4{,}70\mathbf{e}_y) = -1{,}253\mathbf{e}_x \ \text{m/s}^2$$

Despejando $\mathbf{a}_{B\text{rel}}$ se tiene

$$\mathbf{a}_{B\text{rel}} = 4{,}19\mathbf{e}_x \ \text{m/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 14.10

Al oscilar el brazo BC, de 400 mm de longitud, del mecanismo representado en la figura 14-28, el collar C se desliza en uno y otro sentido por el brazo AD. Sabiendo que $\phi = 1{,}5 \text{ sen } \pi t$ rad donde t se expresa en segundos, determinar la velocidad de rotación ω del brazo AD y la celeridad v de la corredera a lo largo del brazo AD cuando $t = \frac{1}{3}$ s.

Figura 14-28

SOLUCIÓN

El sistema de coordenadas x-y se toma de manera que gire con el brazo AD teniendo su origen en A, según se indica en la figura 14-29. Cuando $t = \frac{1}{3}$ s

$$\phi = 1{,}299 \text{ rad} = 74{,}43° \qquad \dot{\phi} = 2{,}356 \text{ rad/s}$$

$$\ddot{\phi} = -12{,}821 \text{ rad/s}^2$$

y

$$\mathbf{v}_C = (400)(2{,}356)\mathbf{e}_\phi = 942{,}48 \text{ mm/s} \quad \searrow 74{,}43°$$

Además, por el teorema del coseno

$$\overline{AC}^2 = 800^2 + 400^2 - 2(800)(400)\cos 74{,}43°$$

o sea

$$\overline{AC} = 792{,}60 \text{ mm}$$

y por el teorema del seno

$$\frac{\text{sen } \theta}{400} = \frac{\text{sen } 74{,}43°}{792{,}60} \qquad \theta = 29{,}09°$$

La ecuación de la velocidad relativa (ec. 14-16*d*) será

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{C/A} + \mathbf{v}_{C\text{rel}}$$

donde, expresándola en el sistema de coordenadas giratorio (v. fig. 14-29)

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{0} \qquad \mathbf{v}_{C\text{rel}} = v\mathbf{e}_x$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{C/A} = \omega\mathbf{k} \times 792{,}60\mathbf{e}_x = 792{,}60\omega\mathbf{e}_y \ \text{mm/s}$$

$$\mathbf{v}_C = 942{,}48(\cos 13{,}52°\ \mathbf{e}_x - \text{sen } 13{,}52°\ \mathbf{e}_y) \ \text{mm/s}$$

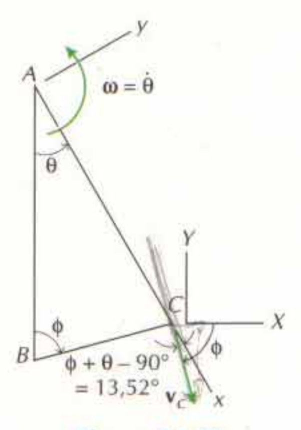


Figura 14-29

Entonces, la componente $\mathbf{e}_y$ de la ecuación de la velocidad relativa da

$$\omega = \dot{\theta} = -0{,}278 \text{ rad/s} \qquad \boldsymbol{\omega} = 0{,}278 \text{ rad/s} \circlearrowright \qquad \text{Resp.}$$

y la componente $\mathbf{e}_x$ da

$$v = 916{,}4 \text{ mm/s (hacia fuera)} \qquad \text{Resp.}$$

De otra manera, las componentes de la ecuación de la velocidad relativa se pueden escribir en función del sistema de coordenadas fijas X-Y (v. fig. 14-29)

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}_{C\text{rel}} = v \text{ sen } 29{,}09°\mathbf{i} - v \cos 29{,}09°\mathbf{j}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{C/A} = \omega\mathbf{k} \times 792{,}60(\text{sen } 29{,}09\ \mathbf{i} - \cos 29{,}09\ \mathbf{j})$$

y

$$\mathbf{v}_C = 942{,}48(\cos 74{,}43\mathbf{i} - \text{sen } 74{,}43\mathbf{j})$$

Luego, las componentes **i** y **j** de la ecuación de la velocidad relativa dan

$$692{,}6\,\omega + 0{,}486v = 253{,}0$$

$$385{,}3\,\omega - 0{,}874v = -908{,}0$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se tienen los mismos resultados anteriores.

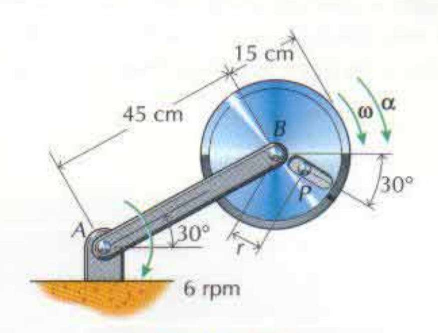


Figura 14-30

PROBLEMA EJEMPLO 14.11

En el mecanismo de la figura 14-30, el brazo AB gira en sentido horario con una frecuencia constante de 6 rpm mientras el pasador P se mueve hacia fuera a lo largo de una guía radial practicada en el disco giratorio con una celeridad constante de 25 mm/s. En el instante representado, $r = 7{,}5$ cm, $\omega = 12$ rpm, $\alpha = 0{,}1$ rad/s^2, ambas en sentido horario. Determinar la velocidad y la aceleración absolutas del pasador P en ese instante.

SOLUCIÓN

Se toma el sistema de coordenadas giratorio x-y con origen en B y el eje x en la dirección de la guía, según se indica en la figura 14-31a. Entonces, la velocidad angular del sistema de coordenadas x-y será

$$\omega = (-12\mathbf{k} \text{ rev/min})\left(\frac{2\pi \text{ rad/rev}}{60 \text{ s/min}}\right) = -1{,}2566\mathbf{k} \text{ rad/s}$$

La ecuación de la velocidad relativa (ec. 14-16d) es

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/B} + \mathbf{v}_{P\text{rel}}$$

donde, en el sistema de coordenadas giratorio (fig. 14-31a)

$$\mathbf{v}_B = (45)\frac{(2\pi)}{60} \measuredangle 60°$$

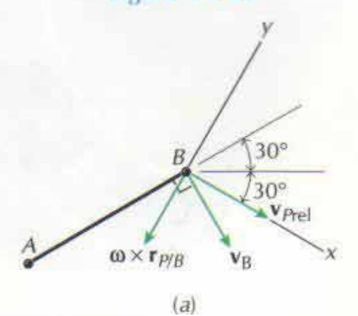
$$= 24{,}49\mathbf{e}_x - 14{,}138\mathbf{e}_y \text{ cm/s}$$

$$\mathbf{v}_{P\text{rel}} = 2{,}5\mathbf{e}_x \text{ cm/s}$$

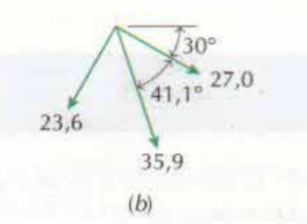
$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/P} = (-1{,}2566\mathbf{k}) \times (7{,}5\mathbf{e}_x) = -9{,}425\mathbf{e}_y \text{ cm/s}$$

Por tanto

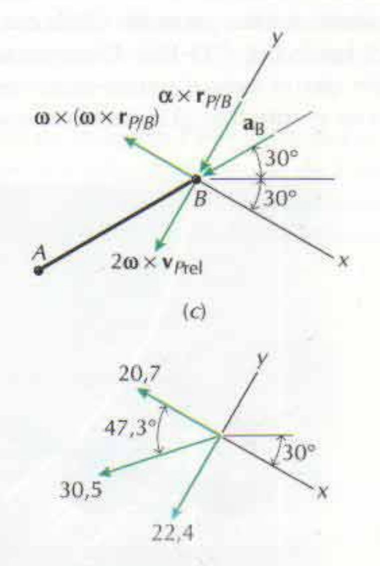
$$\mathbf{v}_P = 27{,}0\mathbf{e}_x - 23{,}6\mathbf{e}_y \text{ cm/s} \qquad \text{Resp.}$$



(a)



(b)



(d)

Figura 14-31

o sea (v. fig.14-31*b*)

$$\mathbf{v}_P = 35{,}9 \text{ cm/s} \quad \angle\, 71{,}1^\circ \qquad \text{Resp.}$$

La ecuación de la aceleración relativa (ec. 14-17*d*) es

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{P/B} \times \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/B})$$
$$+\, \mathbf{a}_{P\text{rel}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{P\text{rel}}$$

donde, en el sistema de coordenadas giratorio (fig. 14-31c)

$$\mathbf{a}_B = (18)\left[\frac{(6)(2\pi)}{60}\right]^2 \quad \angle\, 30^\circ$$
$$= -8{,}883\mathbf{e}_x - 15{,}385\mathbf{e}_y \text{ cm/s}^2$$
$$\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{P/B} = (0{,}1\mathbf{k}) \times (7{,}5\mathbf{e}_x) = -(0{,}75\mathbf{e}_y) \text{ cm/s}^2$$
$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/B}) = -(1{,}2566\mathbf{k}) \times (-3{,}770\mathbf{e}_y)$$
$$= -(11{,}843\mathbf{e}_x) \text{ cm/s}^2$$
$$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{P\text{rel}} = 2(-1{,}2566\mathbf{k}) \times (2{,}5\mathbf{e}_y) = 6{,}283\mathbf{e}_y \text{ cm/s}^2$$
$$\mathbf{a}_{P\text{rel}} = 0$$

Por tanto

$$\mathbf{a}_P = -20{,}7\mathbf{e}_x - 22{,}4\mathbf{e}_y \text{ cm/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

o sea (v. fig. 14-31*d*)

$$\mathbf{a}_P = 30{,}5 \text{ cm/s}^2 \quad \angle\, 17{,}3^\circ \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

14-104* El automóvil *A* recorre una carretera recta con una celeridad constante de 90 km/h mientras el automóvil *B* describe una curva circular de radio 150 m con una celeridad constante de 70 km/h (fig. P14-104). Determinar la velocidad y la aceleración que el auto *A* parece tener según un observador que vaya en el auto *B* en el instante representado.

Figura P14-104

14-105* El automóvil *A* recorre una carretera recta con una celeridad constante de 104 km/h mientras el automóvil *B* describe una curva circular de radio 180 m con una celeridad de 72 km/h (fig. P14-105). Si la celeridad de *B* está disminuyendo a razón de 3 m/s², determinar la velocidad y la aceleración que el auto *A* parece tener según un observador que vaya en el auto *B* en el instante representado.

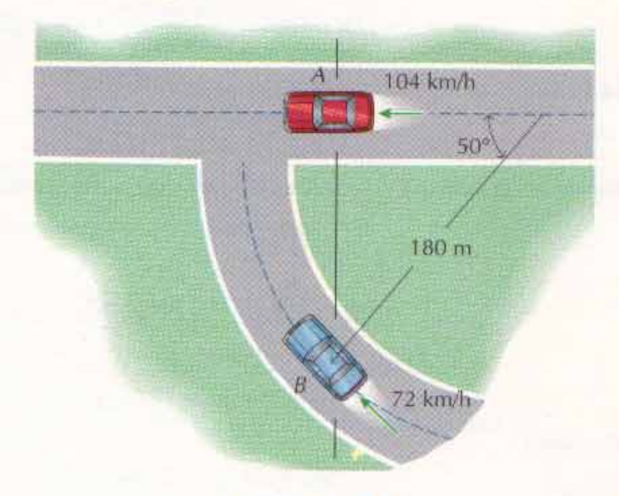


Figura P14-105

14-106* El automóvil A recorre una carretera recta con una celeridad constante de 80 km/h mientras el automóvil B describe una curva circular de radio 125 m con una celeridad de 50 km/h (fig. P14-106). Si la celeridad de B está aumentando a razón de 5 m/s^2, determinar la velocidad y la aceleración que el auto A parece tener según un observador que vaya en el auto B en el instante representado.

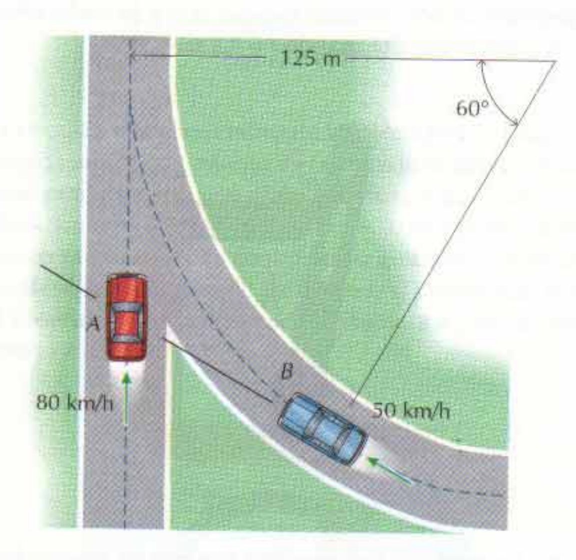


Figura P14-106

14-107 El automóvil A describe una curva circular de radio 150 m con una celeridad constante de 72 km/h mientras el auto B describe otra curva circular de radio 225 m con una celeridad constante de 96 km/h (fig. P14-107). Determinar la velocidad y la aceleración que el auto A parece tener según un observador que vaya en el auto B en el instante representado.

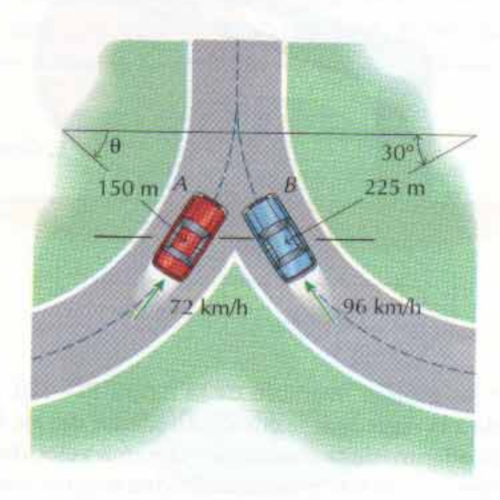


Figura P14-107

14-108 El automóvil A recorre una carretera recta con una celeridad constante de 60 km/h mientras el automóvil B describe una curva circular de radio 100 m con una celeridad de 35 km/h (fig. P14-108). Si la celeridad de B está disminuyendo a razón de 1,5 m/s^2, determinar la velocidad y la aceleración que el auto A parece tener según un observador que vaya en el auto B en el instante representado.

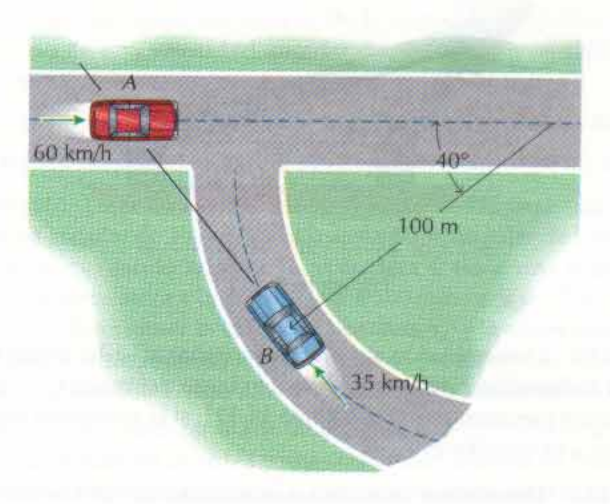


Figura P14-108

14-109* En las condiciones del problema 14-107, determinar la velocidad y la aceleración que el auto B parece tener según un observador que vaya en el auto A en el instante representado. (¿Son estos valores los de la velocidad y la aceleración del problema 14-107 cambiados de signo?)

14-110 En el caso del mecanismo del ejemplo 14-10, determinar la aceleración angular α_{AD} del brazo AD y la aceleración a de la corredera a lo largo del brazo AD cuando $t = \frac{1}{3}$ s.

14-111* En el mecanismo de la figura P14-111, el brazo AB gira en sentido antihorario con velocidad angular de 2 rad/s en el instante representado. Determinar la velocidad angular ω_{CD} del brazo CD y la celeridad v de la corredera a lo largo de CD en ese instante.

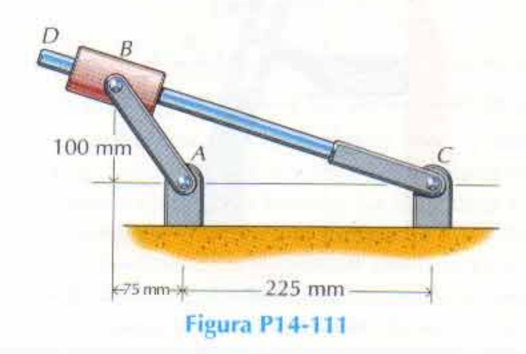


Figura P14-111

14-112* En el mecanismo de la figura P14-112, el brazo *AB* gira en sentido antihorario con velocidad angular de 2 rad/s en el instante representado. Determinar la velocidad angular ω_{CD} del brazo *CD* y la celeridad v de la corredera a lo largo de *AB* en ese instante.

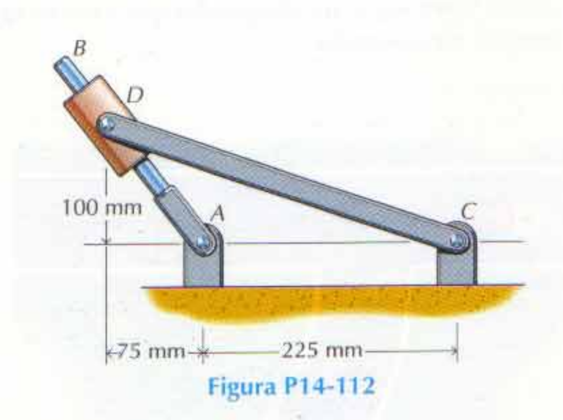


Figura P14-112

14-113 Determinar la aceleración angular α_{CD} del brazo *CD* y la aceleración a de la corredera a lo largo del brazo *CD*, en el caso del mecanismo del problema 14-111, si la velocidad angular ω_{AB} es constante.

14-114* Determinar la aceleración angular α_{CD} del brazo *CD* y la aceleración a de la corredera a lo largo del brazo *AB*, en el caso del mecanismo del problema 14-112, si la velocidad angular ω_{AB} es constante.

14-115 Determinar la aceleración angular α_{CD} del brazo *CD* y la aceleración a de la corredera a lo largo del brazo *CD*, en el caso del mecanismo del problema 14-111, si la velocidad angular ω_{AB} está disminuyendo a razón de 0,5 rad/s^2.

14-116 Determinar la aceleración angular α_{CD} del brazo *CD* y la aceleración a de la corredera a lo largo del brazo *AB*, en el caso del mecanismo del problema 14-112, si la velocidad angular ω_{AB} está disminuyendo a razón de 0,5 rad/s^2.

14-117* Cuando el brazo *AB*, de 15 cm de longitud, del mecanismo representado en la figura P14-117 oscila, el pasador *B* se desliza en uno y otro sentido por la guía practicada en el brazo *CD*. Sabiendo que $\theta = \cos \pi t$ rad, donde t se expresa en segundos, determinar la velocidad angular ω_{CD} y la aceleración angular α_{CD} del brazo *CD* cuando $t = \frac{1}{2}$ s.

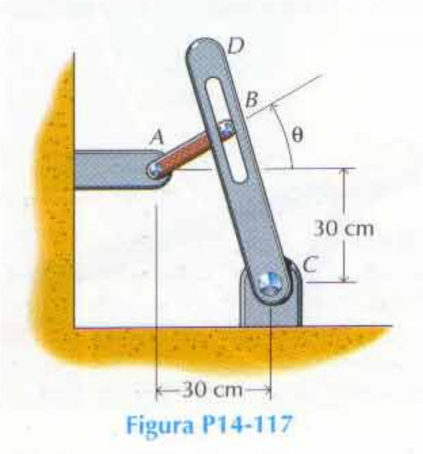


Figura P14-117

14-118 Cuando el brazo *AB*, de longitud 75 mm, del mecanismo representado en la figura P14-118 oscila, el pasador *B* se desliza en uno y otro sentido por la guía practicada en el brazo *CD*. Sabiendo que $\theta = 3$ sen πt rad, donde t se expresa en segundos, determinar la velocidad angular ω_{CD} y la aceleración angular α_{CD} del brazo *CD* cuando $t = 0{,}1$ s.

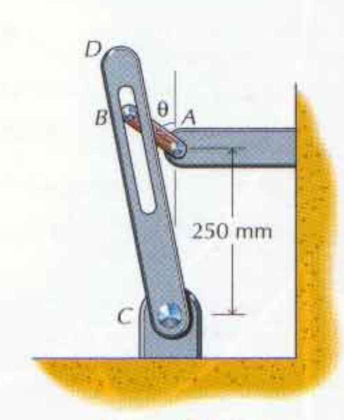


Figura P14-118

14-119* La rueda de la figura P14-119 gira en sentido horario con frecuencia constante de 120 rpm. El pasador *D* está fijo a la rueda en un punto situado a 125 mm de su centro y se desliza por la guía practicada en el brazo *AB*. Determinar la velocidad angular ω_{AB} y la aceleración angular α_{AB} del brazo *AB* en el instante representado.

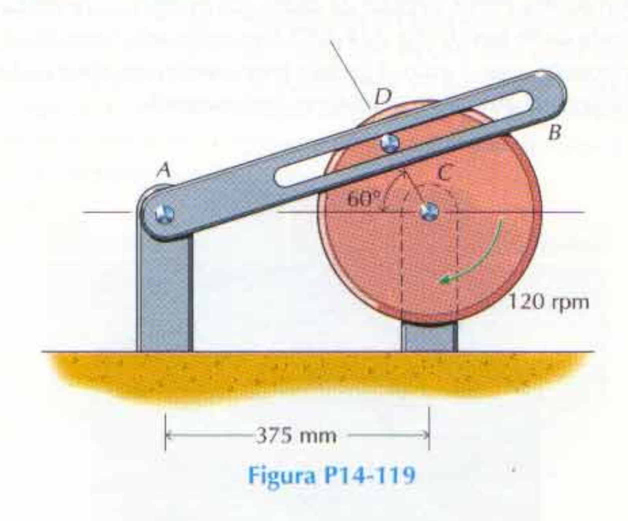


Figura P14-119

14-120* Al girar el miembro de la figura P14-120, la cuerda amarrada a la corredera se enrolla alrededor del eje fijo en *A* y tira hacia adentro de la corredera *B* con una velocidad $r\omega$ relativa al miembro. Si éste gira con celeridad angular constante de 60 rpm, determinar la velocidad absoluta $\mathbf{v}_B$ y la aceleración

absoluta $\mathbf{a}_B$ de la corredera cuando se halle a 400 mm del eje y sea $r = 10$ mm.

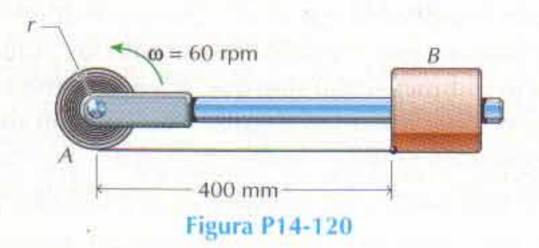


Figura P14-120

14-121 Al girar el miembro de la figura P14-121, una espiga A situada en la parte inferior de la corredera recorre el surco en espiral practicado en una placa fija y tira hacia fuera de la corredera. La espiral viene dada por $r = 0{,}0875\ \theta^2$ donde θ se expresa en radianes y r en centímetros, girando el miembro con una celeridad constante de $\dot{\theta} = 1{,}5$ rad/s. Determinar la velocidad absoluta $\mathbf{v}_A$ y la aceleración absoluta $\mathbf{a}_A$ de la corredera cuando $r = 15$ cm.

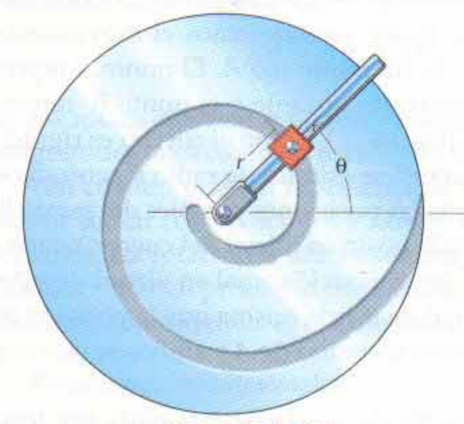


Figura P14-121

14-122* La placa ranurada de la figura P14-122 tiene una velocidad angular constante de 15 rad/s en sentido horario. La corredera A tiene una celeridad constante relativa a la ranura de $u = 100$ mm/s. Si $a = 200$ mm y $b = 0$ mm, determinar la velocidad absoluta $\mathbf{v}_A$ y la aceleración absoluta $\mathbf{a}_A$ de la corredera. Repetirlo para el caso de una velocidad angular de 15 rad/s en sentido antihorario.

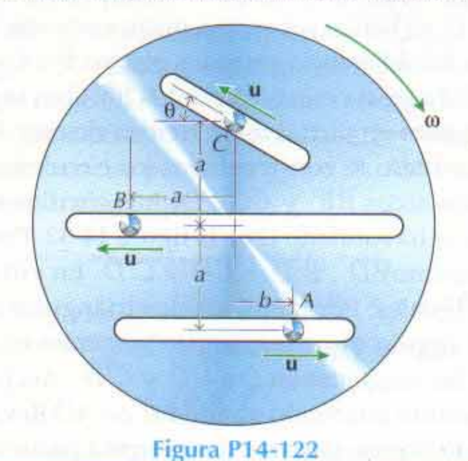


Figura P14-122

14-123 La placa ranurada de la figura P14-122 tiene una velocidad angular constante de 15 rad/s en sentido horario. La corredera B tiene una celeridad constante relativa a la ranura de $u = 25$ cm/s. Si $a = 0$ cm, determinar la velocidad absoluta $\mathbf{v}_B$ y la aceleración absoluta $\mathbf{a}_B$ de la corredera. Repetirlo para el caso de una velocidad angular de 15 rad/s en sentido antihorario.

14-124 Repetir el problema 14-122 para el caso en que $b = 50$ mm.

14-125* Repetir el problema 14-123 para el caso en que $a = 20$ cm.

14-126 La placa ranurada de la figura P14-122 tiene una velocidad angular de 15 rad/s y una aceleración angular de 5 rad/s^2, ambas en sentido horario. La corredera C tiene una celeridad constante relativa a la ranura de $u = 100$ mm/s. Si $a = 200$ mm y $\theta = 20°$, determinar la velocidad absoluta $\mathbf{v}_C$ y la aceleración absoluta $\mathbf{a}_C$ de la corredera. Repetirlo para el caso en que la velocidad y aceleración angulares sean de sentido antihorario.

14-127* La placa ranurada de la figura P14-127 tiene una velocidad angular de 15 rad/s y una aceleración angular de 5 rad/s^2, ambas en sentido horario. La corredera D tiene una celeridad constante relativa a la ranura de $u = 25$ cm/s. Si $a = 20$ cm y $\theta = 0°$, determinar la velocidad absoluta $\mathbf{v}_D$ y la aceleración absoluta $\mathbf{a}_D$ de la corredera. Repetirlo para el caso en que la velocidad y aceleración angulares sean de sentido antihorario.

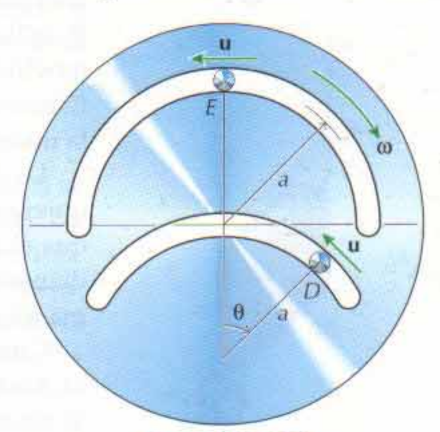


Figura P14-127

14-128* Repetir el problema 14-126 para el caso en que $\theta = 40°$.

14-129 Repetir el problema 14-127 para el caso en que $\theta = 60°$.

14-130* La placa ranurada de la figura P14-127 tiene una velocidad angular de 15 rad/s y una aceleración angular de 5 rad/s^2, ambas en sentido horario. La corredera E tiene una celeridad constante relativa a la ranura de $u = 100$ mm/s. Si $a = 200$ mm, determinar la velocidad absoluta $\mathbf{v}_E$ y la aceleración absoluta $\mathbf{a}_E$ de la corredera. Repetirlo para el caso en que la velocidad y aceleración angulares sean de sentido antihorario.

14.7 MOVIMIENTO TRIDIMENSIONAL DE UN CUERPO RÍGIDO

El movimiento tridimensional de un cuerpo rígido que se estudia en este apartado es considerablemente más complicado que el movimiento bidimensional estudiado en apartados anteriores de este capítulo. No tan sólo los puntos del cuerpo se mueven en el espacio tridimensional sino que, además, varían con el tiempo las direcciones de los vectores velocidad angular y aceleración angular. El tratamiento vectorial no solamente es útil en la descripción del movimiento, sino que es absolutamente necesario para describir el movimiento de cuerpos en tres dimensiones.

Antes de entrar en el estudio de un movimiento tridimensional cualquiera de un cuerpo rígido o el caso particular de su rotación en torno a un punto fijo, será necesario considerar algunos aspectos de las rotaciones de cuerpos rígidos en tres dimensiones.

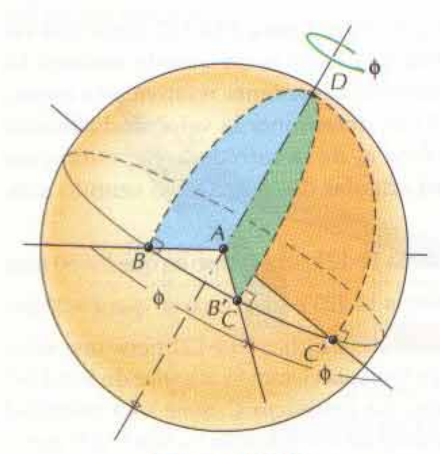


Figura 14-32

14.7.1 Teorema de Euler

El teorema de Euler dice que *cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un punto fijo, toda posición del cuerpo se puede obtener a partir de cualquier otra posición mediante una sola rotación en torno a un cierto eje que pasa por dicho punto fijo.*

Para demostrar el teorema de Euler, consideremos el movimiento de un cuerpo rígido que gire alrededor de un punto fijo A. El punto B representa la posición de un punto arbitrario en cierto instante y el punto B' representa su posición en un instante posterior (fig. 14-32). Como el cuerpo es rígido, el punto B deberá moverse sobre una superficie esférica de radio R centrada en A. La cáscara esférica indicada representa las posiciones posibles del punto B durante el movimiento. Al punto que en la posición inicial del cuerpo ocupa el lugar B' le llamaremos C y pasará a C' en la posición final en virtud de este mismo movimiento. Como la posición final de B es la misma que la posición inicial de C, ambos puntos se hallan a la misma distancia de A y ambos se moverán sobre la misma superficie esférica.

La configuración de un cuerpo rígido queda determinada por tres cualesquiera de sus puntos. Por tanto, la demostración del teorema exige demostrar que el movimiento del cuerpo que lleva el punto B a B' puede obtenerse mediante una sola rotación en torno a un cierto eje que pase por A y que esta misma rotación lleva el punto C a C'.

Como los puntos B, $B' = C$ y C' se hallan sobre una misma superficie esférica, los arcos de círculo máximo $\overline{BC}$ (distancia entre los puntos B y C en la posición inicial del cuerpo) y $\overline{B'C'}$ (distancia entre los puntos B y C en la posición final del cuerpo) deberán ser iguales en virtud de la rigidez de éste. En la superficie esférica de centro en A y radio R, construyamos los círculos máximos que bisecan ortogonalmente a los arcos $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$. Dichos círculos se cortan en dos puntos, uno de los cuales se ha rotulado D en la figura 14-32. Por último, tracemos los arcos de círculo máximo $\overline{BD}$, $\overline{B'D} = \overline{CD}$ y $\overline{C'D}$. En virtud de su construcción, estos arcos serán iguales. Por tanto, los dos triángulos esféricos $BB'D$ y $CC'D$ serán iguales y el ángulo ϕ que forman las tangentes en D a $\overline{BD}$ y $\overline{B'D}$ será igual al que forman las tangentes en D a $\overline{CD}$ y $\overline{C'D}$. Así pues, una rotación de magnitud ϕ en el sentido adecuado alrededor de AD llevará B sobre B' y C sobre C', determinando la posición final del cuerpo a partir de su posición inicial, según reza el teorema de Euler.

14.7.2 Rotaciones finitas (no son vectores)

Del teorema de Euler se deduce que el movimiento durante un intervalo de tiempo Δt de un cuerpo rígido que tenga un punto fijo puede considerarse que es una rotación $\Delta\theta$ en torno a un cierto eje. Esto podría representarse mediante un vector dirigido según el eje de rotación y de módulo igual al valor de la rotación. Por ejemplo, para designar la rotación de la figura 14-32 podría utilizarse la expresión $\boldsymbol{\phi} = \phi \mathbf{e}_{AD}$. Sin embargo, aun cuando estas expresiones definen módulo, dirección y sentido, no obedecen a las reglas de adición de vectores y no son vectores a menos que las rotaciones sean infinitesimales.

Mediante un ejemplo sencillo podemos mostrar que las rotaciones finitas no obedecen a las reglas de adición de vectores. Tomemos un libro y establezcamos un sistema de coordenadas como se indica en la figura 14-33*a*. Sean $\Delta\boldsymbol{\theta}_x = 90°\mathbf{i}$ y $\Delta\boldsymbol{\theta}_y = 90°\mathbf{j}$, que representan rotaciones antihorarias de 90° alrededor de los ejes x e y, respectivamente. La rotación $\Delta\boldsymbol{\theta}_x + \Delta\boldsymbol{\theta}_y$ (es decir, la rotación $\Delta\boldsymbol{\theta}_x$ seguida de la rotación $\Delta\boldsymbol{\theta}_y$) da como resultado la posición final representada en la figura 14-33*b*. En cambio, la rotación $\Delta\boldsymbol{\theta}_y + \Delta\boldsymbol{\theta}_x$(es decir, la rotación $\Delta\boldsymbol{\theta}_y$ seguida de la rotación $\Delta\boldsymbol{\theta}_x$) da lugar a la posición final representada en la figura 14-33*c*. Evidentemente, estas posiciones finales no coinciden y la "suma" de las rotaciones depende del orden en que se escriban

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_x + \Delta\boldsymbol{\theta}_y \neq \Delta\boldsymbol{\theta}_y + \Delta\boldsymbol{\theta}_x$$

Por tanto, las rotaciones finitas no son vectores.

Las magnitudes tales como las rotaciones finitas se denominan "pseudovectoriales". Aun cuando pueden representarse mediante segmentos orientados, no se pueden sumar como vectores y no son magnitudes vectoriales. Por esta y otras razones, las rotaciones finitas son magnitudes difíciles de manejar. Si bien se pueden tratar en problemas de Dinámica superior, en este primer curso de Dinámica no abordaremos el cálculo de las rotaciones finitas.

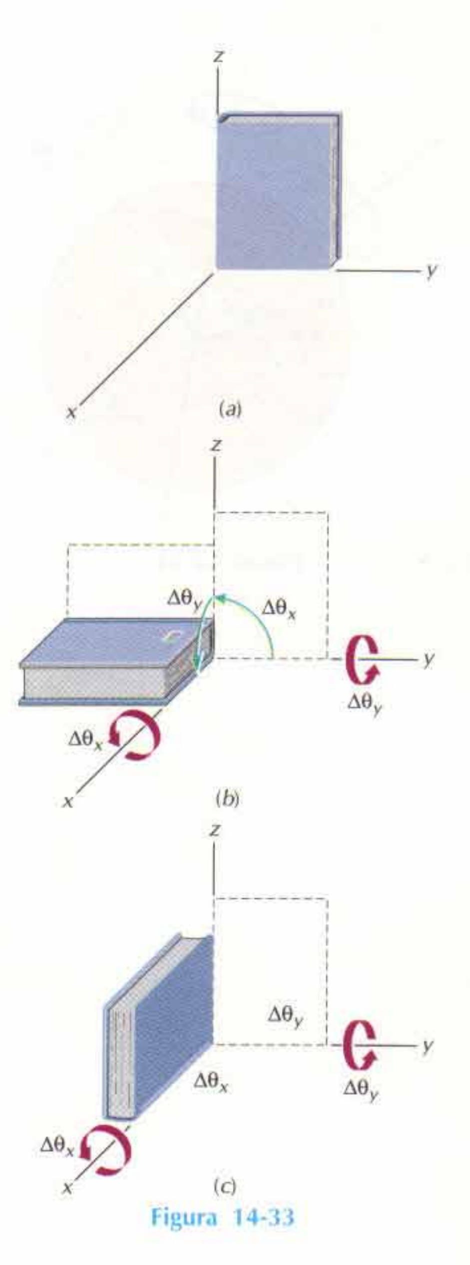


Figura 14-33

14.7.3 Rotaciones infinitesimales

Aun cuando las rotaciones finitas no se pueden combinar vectorialmente, sí se pueden combinar así las rotaciones que sean suficientemente pequeñas, las cuales son vectores. En la figura 14-34 se han representado las rotaciones infinitesimales $d\boldsymbol{\theta}_1$ y $d\boldsymbol{\theta}_2$ de un cuerpo rígido en torno a un punto fijo A. Primeramente llevan el punto P hasta Q_1 y luego hasta S si se efectúa primero la rotación $d\boldsymbol{\theta}_1$. Si se aplicara primero la rotación $d\boldsymbol{\theta}_2$, pasaría primeramente P a Q_2 y luego a S'. Aunque estos movimientos tienen lugar sobre una superficie esférica de radio R, en el caso de rotaciones infinitesimales la curvatura de la superficie tiene un efecto despreciable, los lados de la figura de desplazamientos son, en esencia, paralelos y $S = S'$. Así pues, el desplazamiento total del punto P vendrá dado por

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2 = d\mathbf{r}_2 + d\mathbf{r}_1 \\ &= (d\boldsymbol{\theta}_1 \times \mathbf{r} + d\boldsymbol{\theta}_2 \times \mathbf{r} = d\boldsymbol{\theta}_2 \times \mathbf{r} d\boldsymbol{\theta}_1) \times \mathbf{r} \\ &= (d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2) \times \mathbf{r} = (d\boldsymbol{\theta}_2 + d\boldsymbol{\theta}_1) \times \mathbf{r} \\ &= d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} \end{aligned} \tag{14-18}$$

donde

$$d\boldsymbol{\theta} = d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2$$

es una única rotación resultante en torno al eje que se indica y no depende del orden de los sumandos en la adición vectorial.

14.7.4 Rotación en torno a un punto fijo

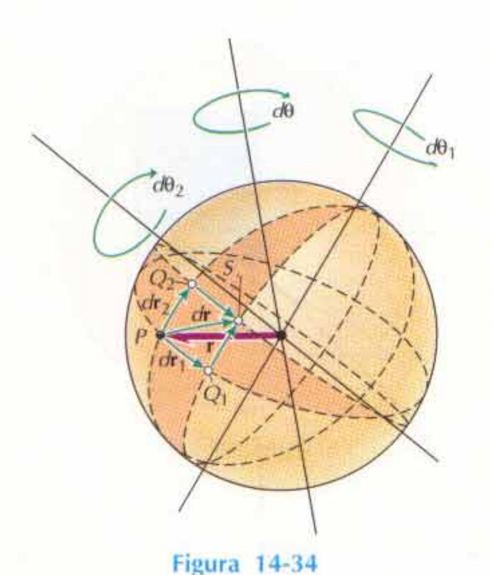


Figura 14-34

Como ahora sabemos que $d\boldsymbol{\theta}$ es un vector, su derivada respecto al tiempo también lo será. A este vector

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$$

se le da el nombre de vector velocidad angular. La dirección del vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ representa el eje en torno al cual gira el cuerpo y su módulo es igual a la rotación que se efectúa por unidad de tiempo. Sin embargo, en el caso de la rotación en torno a un punto fijo, la dirección de dicho eje no es constante. Por tanto, tanto el módulo como la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ serán función del tiempo.

La aceleración angular es la derivada de la velocidad angular respecto al tiempo:

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$$

Como tanto la dirección como el módulo de $\boldsymbol{\omega}$ dependen del tiempo, la derivada deberá tener en cuenta las variaciones de una y otro. En general, la dirección de $\boldsymbol{\alpha}$ no coincide con la de $\boldsymbol{\omega}$.

La velocidad de un punto cualquiera del cuerpo rígido viene dada por la derivada del vector de posición respecto al tiempo. Si el desplazamiento de la ecuación 14-18 tiene lugar en un tiempo dt, entonces

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \times \mathbf{r}$$

y la velocidad del punto en P vendrá dada por

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P \tag{14-19}$$

La aceleración en la posición P viene dada por la derivada respecto al tiempo del vector velocidad:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P &= \frac{d\mathbf{v}_P}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_P}{dt} \\ &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_P = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) \end{aligned} \tag{14-20}$$

Aun cuando estas ecuaciones son formalmente iguales a las del movimiento plano, importa recordar que tanto los módulos como las direcciones de $\boldsymbol{\omega}$ y de $\boldsymbol{\alpha}$ varían con el tiempo y que la dirección de $\boldsymbol{\alpha}$ no coincide con la de $\boldsymbol{\omega}$.

14.7.5 Cuerpo rígido en un movimiento cualquiera

Si A y B son dos puntos móviles, sus posiciones estarán relacionadas, en virtud de la regla del triángulo para la adición de dos vectores, de la manera siguiente:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \tag{14-21}$$

donde $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ son los vectores de posición absoluta de A y B, respectivamente y $\mathbf{r}_{B/A}$ es el vector de posición de B relativa a A. Derivando la ecuación 14-21 tendremos la ecuación para la velocidad relativa

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

donde $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ son las velocidades absolutas de A y B, respectivamente y $\mathbf{v}_{B/A}$ es la velocidad de B relativa a A. Sin embargo, si A y B fuesen dos puntos de un cuerpo rígido su separación se mantendría constante y el punto B se movería sobre una superficie esférica centrada en A. Por tanto, la velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ vendría dada por (ec. 14-19)

$$\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

Por tanto

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{A/B} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{14-22}$$

y la velocidad del punto B consiste en la suma de dos partes: $\mathbf{v}_A$ que representa una traslación de todo el cuerpo con el punto A; y $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$, que representa una rotación en torno al punto A. Análogamente, derivando respecto al tiempo la ecuación 14-22 tenemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \tag{14-23}$$

y la aceleración del punto B consta también de dos partes: $\mathbf{a}_A$, que representa una traslación de todo el cuerpo con el punto A; y $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$, que representa una rotación en torno al punto A.

De nuevo hemos de advertir que las direcciones de $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ no son constantes y que el cálculo de la velocidad relativa y de la aceleración relativa debe realizarse teniendo en cuenta tal hecho.

14.7.6 Movimiento tridimensional relativo a ejes en rotación

El desarrollo de las ecuaciones para la velocidad relativa y la aceleración relativa en un movimiento tridimensional relativo a ejes en rotación sigue una marcha paralela a la seguida en el apartado 14.6 para el caso del movimiento plano. La diferencia estriba en que, en el caso del movimiento tridimensional, las direcciones de los vectores velocidad angular y aceleración angular no son fijas como en el caso del movimiento bidimensional. Si en las derivaciones se incluye la variación temporal de dichas direcciones, la forma vectorial de las ecuaciones 14-16*d* y 14-17*d* será la correcta y dichas ecuaciones serán válidas tanto para el movimiento bidimensional como para el tridimensional.

Análogamente a como se hizo en el desarrollo del apartado 14.6, consideremos un movimiento tridimensional cualquiera de dos puntos A y B cuyas situaciones se especifiquen el sistema fijo de coordenadas XYZ por los vectores de posición

$$\mathbf{r}_A = X_A\mathbf{i} + Y_A\mathbf{j} + Z_A\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_B = X_B\mathbf{i} + Y_B\mathbf{j} + Z_B\mathbf{k}$$

donde **i**, **j** y **k** son vectores unitarios asociados a los ejes X, Y y Z, respectivamente. En cambio, la posición relativa se escribirá respecto a un sistema de co-

ordenadas xyz que tenga su origen en A y gire con velocidad angular $\boldsymbol{\alpha}$ y aceleración angular $\boldsymbol{\omega}$ respecto al sistema fijo de coordenadas XYZ. Por tanto,

$$\mathbf{r}_{B/A} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

donde los vectores unitarios asociados a los ejes x, y, z se han representado por $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ y $\mathbf{e}_z$ para distinguirlos de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ y hacer resaltar que son función del tiempo. Entonces, por adición de vectores, los vectores de posición absoluta $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ y el vector de posición relativa $\mathbf{r}_{B/A}$ estarán relacionados de la manera siguiente:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z) \qquad (14\text{-}24)$$

La relación entre las velocidades absolutas y relativa se obtiene derivando respecto al tiempo la ecuación de la posición relativa (ec. 14-24), es decir:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \mathbf{v}_A + \frac{d\,(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)}{dt} \\ &= \mathbf{v}_A + \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x + x\,\frac{d\mathbf{e}_x}{dt} + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_y + y\,\frac{d\mathbf{e}_y}{dt} + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z + z\,\frac{d\mathbf{e}_z}{dt} \\ &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B\text{rel}} + \left(x\,\frac{d\mathbf{e}_x}{dt} + y\,\frac{d\mathbf{e}_y}{dt} + z\,\frac{d\mathbf{e}_z}{dt}\right) \qquad (14\text{-}25a)\end{aligned}$$

en donde $\mathbf{v}_{B\text{rel}} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z$ es la velocidad de B relativa al sistema de coordenadas giratorio xyz (medida en él).

Las derivadas de los vectores unitarios del paréntesis de la ecuación 14-25*a* se pueden calcular de manera análoga a la utilizada en el apartado 14.6. De otra manera, el vector unitario $\mathbf{e}_x$ puede considerarse que es el de posición de un punto que gira alrededor de A con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Entonces, la derivada de $\mathbf{e}_x$ respecto al tiempo sería la velocidad de aquel punto y vendría dada por

$$\frac{d\mathbf{e}_x}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_x$$

Análogamente,

$$\frac{d\mathbf{e}_y}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_y \qquad \text{y} \qquad \frac{d\mathbf{e}_z}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_z$$

Aplicando estos resultados en la ecuación 14-25*a* tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B\text{rel}} + (x\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_x + y\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_y + z\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_z) \\ &= \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{v}_{B\text{rel}}\end{aligned} \qquad (14\text{-}25b)$$

donde $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ y $\boldsymbol{\omega}$ se miden relativas al sistema de coordenadas fijo XYZ; $\mathbf{r}_{B/A}$ y $\mathbf{v}_{B\text{rel}}$ se miden relativos al sistema de coordenadas giratorio xyz.

La relación entre las aceleraciones absoluta y relativa se obtiene derivando respecto al tiempo la ecuación de la velocidad relativa (ec. 14-25*b*) y se obtiene

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{B\text{rel}}}{dt} \qquad (14\text{-}26a)$$

Según el cálculo de la velocidad relativa,

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \mathbf{v}_{B\text{rel}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad (14\text{-}26b)$$

Otro cálculo análogo de la derivada de $\mathbf{v}_{B\text{rel}}$ respecto al tiempo nos da

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}_{B\text{rel}}}{dt} &= \frac{d(\dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z)}{dt} \\ &= (\ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z) + \left(\dot{x}\frac{d\mathbf{e}_x}{dt} + \dot{y}\frac{d\mathbf{e}_y}{dt} + \dot{z}\frac{d\mathbf{e}_z}{dt}\right) \\ &= \mathbf{a}_{B\text{rel}} + (\dot{x}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_y + \dot{z}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_z) \\ &= \mathbf{a}_{B\text{rel}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{B\text{rel}} \qquad (14\text{-}26c)\end{aligned}$$

donde $\mathbf{a}_{B\text{rel}} = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z$ es la aceleración del punto B relativa al sistema de coordenadas giratorio xyz (medida en él). Aplicando las ecuaciones 14-26*b* y 14-26*c* en la ecuación 14-26*a* y reagrupando términos, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B = {} & \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \\ & + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{B\text{rel}} + \mathbf{a}_{B\text{rel}} \qquad (14\text{-}26d)\end{aligned}$$

donde $\mathbf{a}_A$, $\mathbf{a}_B$, $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ se miden relativas al sistema de coordenadas fijo XYZ; $\mathbf{r}_{B/A}$, $\mathbf{v}_{B\text{rel}}$ y $\mathbf{a}_{B\text{rel}}$ se miden respecto al sistema de coordenadas giratorio xyz; y al término $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{B\text{rel}}$ se le da el nombre de aceleración de Coriolis.

Las ecuaciones 14-26 y 14-27 exigen la suma de varios vectores. Para sumarlos, habrá que expresar sus componentes en un sistema de coordenadas común. Dichas componentes pueden escribirse o en el sistema de coordenadas fijo XYZ o en el sistema de coordenadas giratorio xyz. La elección se basa únicamente en la forma en que se den los datos y en la forma que se quiera dar los resultados.

La orientación, situación del origen, velocidad angular y aceleración angular del sistema de coordenadas giratorio se deberán tomar de manera que simplifiquen el cálculo de los distintos términos de las ecuaciones de la velocidad relativa y de la aceleración relativa. Por ejemplo, el origen A debería ser un punto cuya velocidad y aceleración absolutas puedan obtenerse con facilidad. La velocidad angular y la aceleración angular del sistema giratorio deberían tomarse de manera que se puedan calcular fácilmente la velocidad y aceleración del punto B relativas al sistema giratorio de coordenadas. La orientación del sistema de coordenadas giratorio relativa al sistema de coordenadas fijo debería tomarse de manera que sea fácil describir las componentes de los distintos vectores.

PROBLEMA EJEMPLO 14.12

El disco de 400 mm de diámetro de la figura 14-35 está unido rígidamente a un árbol de 600 mm de longitud y rueda sin deslizamiento sobre una superficie fija en el plano x-y. El árbol, que es perpendicular al disco, está unido a una rótula

en A, punto alrededor del cual puede pivotar libremente. Cuando disco y árbol ruedan en torno a su propio eje con velocidad angular ω_1, el árbol rueda también alrededor de un eje vertical con velocidad angular ω_2. Si $\omega_1 = 5$ rad/s y $\dot{\omega} = 20$ rad/s^2 en el instante representado, determinar

a. La velocidad angular total $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular total $\boldsymbol{\alpha}$ del disco en ese instante.

b. La velocidad $\mathbf{v}_C$ y la aceleración $\mathbf{a}_C$ del punto C del borde del disco en ese instante.

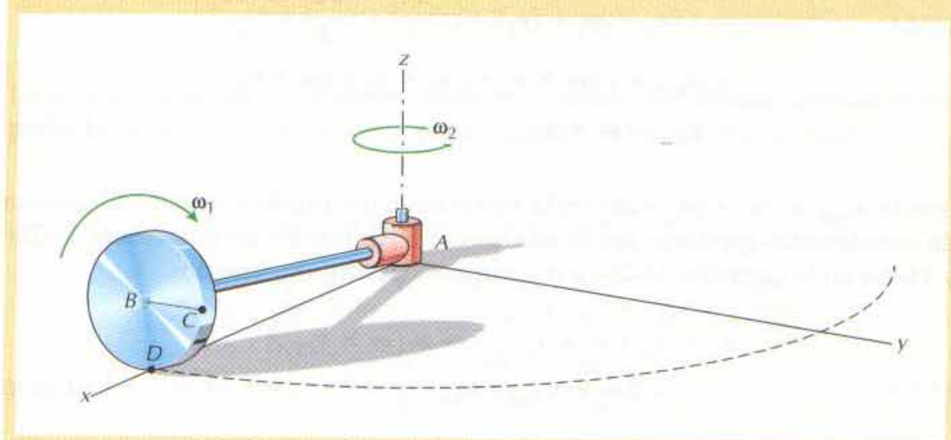


Figura 14-35

SOLUCIÓN

a. La barra AB forma un ángulo de 18,43° con el eje x (fig. 14-36*a*). Según la regla de la mano derecha, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_1$ está dirigida de B hacia A y expresada en función de sus componentes es

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_1 \mathbf{e}_{BA} = -5 \cos 18{,}43° \ \mathbf{i} - 5 \ \text{sen} \ 18{,}43° \ \mathbf{k} \ \text{rad/s}$$
$$= -4{,}744\mathbf{i} - 1{,}581\mathbf{k} \ \text{rad/s} \qquad (a)$$

donde $\mathbf{e}_{BA}$ es un vector unitario dirigido de B hacia A. Como el disco rueda sin deslizamiento, la longitud del arco $\overline{DD'}$ en la rueda ha de ser igual a la longitud del arco $\overline{DD'}$ en la superficie (fig. 14-36*b*)

$$s = 200 \ \theta_1 = 632{,}46\theta_2 \qquad (b)$$

Derivando la ecuación b respecto al tiempo se tiene la relación entre las velocidades angulares ω_1 y ω_2

$$\omega_2 = 0{,}3162 \ \omega_1 \qquad (c)$$

Entonces $\boldsymbol{\omega}_2 = 1{,}581\mathbf{k}$ rad/s

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = -4{,}74\mathbf{i} \ \text{rad/s} \qquad \text{Resp.}$$

La aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ es la derivada de la velocidad angular

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2$$

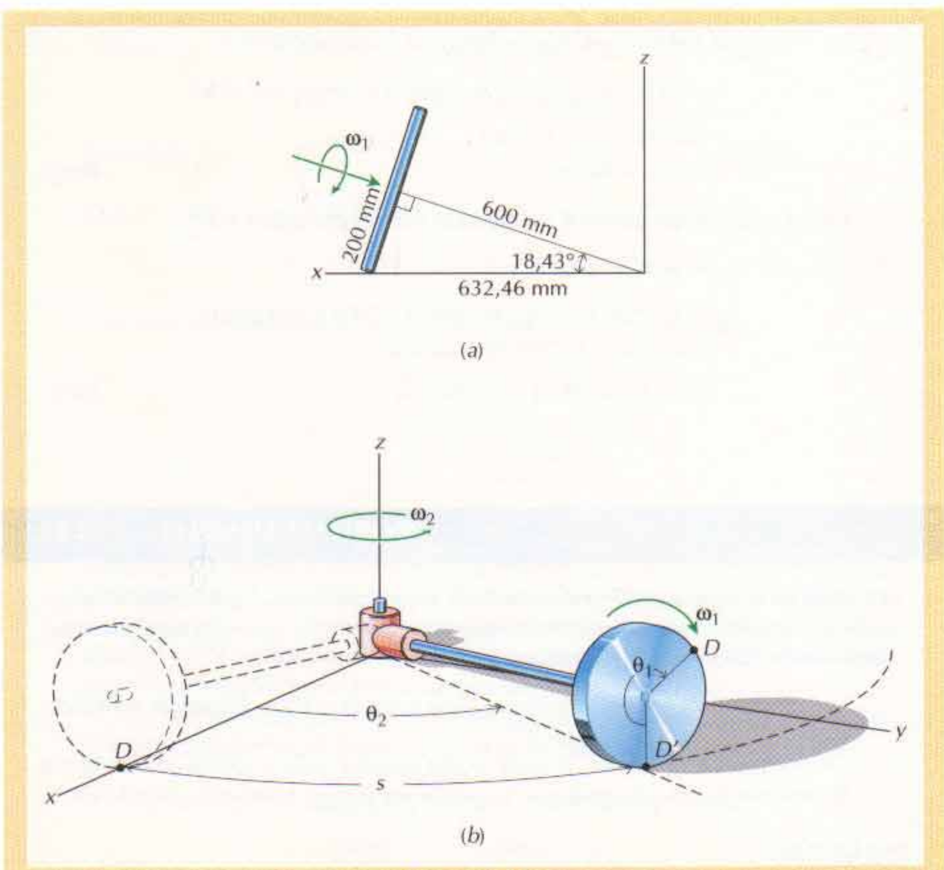


Figura 14-36

donde las derivadas deben tener en cuenta tanto los cambios de sentido como las variaciones de los módulos de $\boldsymbol{\omega}_1$ y $\boldsymbol{\omega}_2$. Siguiendo el discurso del apartado 14.7 relativo a la derivada del vector unitario $\mathbf{e}_{BA}$, la derivada de $\boldsymbol{\omega}_1$ es

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 &= \dot{\omega}_1\mathbf{e}_{BA} + \omega_1\dot{\mathbf{e}}_{BA} = \dot{\omega}_1\mathbf{e}_{BA} + \omega_1(\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{e}_{BA}) \\ &= (-20\cos 18{,}43°\mathbf{i} - 20 \text{ sen } 18{,}43° \mathbf{k}) \\ &\quad + 5[(1{,}581\mathbf{k}) \times (-\cos 18{,}43° \mathbf{i} - \text{sen } 18{,}43°\mathbf{k})] \\ &= -18{,}97\mathbf{i} - 7{,}50\mathbf{j} - 6{,}323\mathbf{k} \text{ rad/s}^2\end{aligned}$$

Derivando la ecuación *c* respecto al tiempo, se tiene

$$\dot{\omega}_2 = 0{,}3162\dot{\omega}_1$$

y como la dirección de ω_2 es constante,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = 6{,}324\mathbf{k} \text{ rad/s}^2$$

Por tanto

$$\boldsymbol{\alpha} = -18{,}97\mathbf{i} - 7{,}50\mathbf{j} \text{ rad/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

b. La posición del punto C relativa al punto en torno al cual gira el disco es

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_C &= 600\cos 18{,}43°\mathbf{i} + 200\mathbf{j} + 600 \text{ sen } 18{,}34°\mathbf{k} \\ &= 569{,}2\mathbf{i} + 200\mathbf{j} + 189{,}69\mathbf{k} \text{ mm}\end{aligned}$$

La velocidad del punto C viene dada por la ecuación 14-19

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C = -4{,}744\mathbf{i} \times (569{,}2\mathbf{i} + 200\mathbf{j} + 189{,}69\mathbf{k})$$
$$= 899{,}9\mathbf{j} - 948{,}8\mathbf{k} \text{ mm/s}$$
$$\cong 900\mathbf{j} - 949\mathbf{k} \text{ mm/s} \qquad \text{Resp.}$$

La aceleración del punto C viene dada por la ecuación 14-20

$$\mathbf{a}_C = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_C$$
$$= (-18{,}97\mathbf{i}, 7{,}50\mathbf{j}) \times (569{,}2\mathbf{i} + 200\mathbf{j} + 189{,}69\mathbf{k})$$
$$-4{,}744\mathbf{i} \times (899{,}9\mathbf{j} - 948{,}8\mathbf{k})$$
$$= -1423\mathbf{i} - 903\mathbf{j} - 3790\mathbf{k} \text{ mm/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 14.13

La varilla de la figura 14-37 está conectada a las correderas *A* y *B* mediante rótulas. Si la corredera *A* se mueve en el sentido negativo del eje *x* con una celeridad constante de 150 mm/s, determinar

a. La velocidad $\mathbf{v}_B$ y la aceleración $\mathbf{a}_B$ de la corredera *B* en el instante representado.
b. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la varilla en el instante representado. (Supóngase que la varilla no gira en torno a su propio eje.)

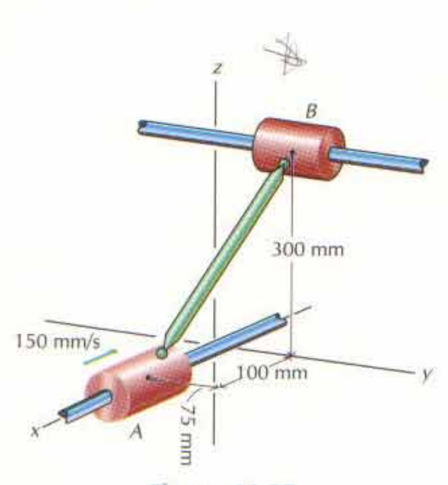


Figura 14-37

SOLUCIÓN

a. Representando por *x* la posición de la corredera *A* y por *y* la de la corredera *B*, la longitud de la varilla *AB*, en todo momento, será

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + 300^2)} = 335 \qquad (a)$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación *a* y derivando respecto al tiempo, se tiene

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0 \qquad (b)$$

donde $\dot{x} = v_A = -150$ mm/s e $\dot{y} = v_B$. En el instante representado, x = 100 mm e y = 75 mm. Por tanto,

$$v_B = 200 \text{ mm/s}$$

o sea
$$\mathbf{v}_B = 200\mathbf{j} \text{ mm/s} \qquad \text{Resp.}$$

Derivando la ecuación *b* respecto al tiempo, se tiene

$$\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y} = 0$$

donde $\ddot{x} = a_A = 0$ e $\ddot{y} = a_B$. Por tanto,

$$a_B = -2500/3 \text{ mm/s}^2$$

o sea
$$\mathbf{a}_B = -833\mathbf{j} \text{ mm/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

b. La ecuación de la velocidad relativa es

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

donde $\mathbf{v}_A = -150\mathbf{i}$ mm/s, $\mathbf{v}_B = 200\mathbf{j}$ mm/s y la posición de B relativa a A es

$$\mathbf{r}_{B/A} = -100\mathbf{i} + 75\mathbf{j} + 300\mathbf{k} \text{ mm}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} 200\mathbf{j} &= -150\mathbf{i} + (\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}) \times (-100\mathbf{i} + 75\mathbf{j} + 300\mathbf{k}) \\ &= (300\omega_y - 75\omega_z - 150)\,\mathbf{i} - (100\omega_z + 300\omega_x)\,\mathbf{j} + (75\omega_x + 100\omega_y)\,\mathbf{k} \quad (c) \end{aligned}$$

Aun cuando la ecuación *c* es vectorial, sus tres componentes

$$x: \quad 300\omega_y - 75\omega_z = 150 \quad (d)$$

$$y: \quad 300\omega_x + 100\omega_z = -200 \quad (e)$$

$$z: \quad 75\omega_x + 100\omega_y = 0 \quad (f)$$

no son suficientes para hallar las tres componentes incógnitas de la velocidad angular. La velocidad relativa de los extremos de la varilla AB es independiente de la rotación de ésta en torno a su propio eje y el sistema de ecuaciones *d*, *e* y *f* da infinitas soluciones para la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ que difieren en la velocidad de rotación en torno a AB. Esta ambigüedad se elimina suponiendo que la barra no gira en torno a su propio eje.

La hipótesis de que la barra AB no gira en torno a su propio eje equivale a suponer que la componente de $\boldsymbol{\omega}$ en la dirección de la barra es nula:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{B/A} &= (\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}) \cdot (-100\mathbf{i} + 75\mathbf{j} + 300\mathbf{k}) \\ &= -100\omega_x + 75\omega_y + 300\omega_z = 0 \quad (g) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema constituido por las ecuaciones *d*, *e* y *g*, se tiene

$$\omega_x = -0{,}5680 \text{ rad/s}; \qquad \omega_y = 0{,}4260 \text{ rad/s}$$

$$\omega_z = -0{,}2959 \text{ rad/s}$$

o sea

$$\boldsymbol{\omega} = -0{,}5680 + 0{,}4260 - 0{,}2959 \qquad \text{Resp.}$$

Análogamente, la ecuación de la aceleración relativa

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{B/A} \quad (h)$$

donde $\mathbf{a}_A = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}_B = -833\mathbf{j}$ mm/s^2 y $\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = 150{,}0\mathbf{i} + 200{,}0\mathbf{j}$ mm/s. Por tanto, la ecuación *h* de la aceleración relativa da

$$\begin{aligned} -833\mathbf{j} &= 0 + (\alpha_x\mathbf{i} + \alpha_y\mathbf{j} + \alpha_z\mathbf{k}) \times (-100\mathbf{i} + 75\mathbf{j} + 300\mathbf{k}) \\ &\quad + (0{,}5680\mathbf{i} + 0{,}4260\mathbf{j} - 0{,}2959\mathbf{k}) \times (150{,}0\mathbf{i} + 200\mathbf{j}) \\ &= [(300\alpha_y - 75\alpha_z)\,\mathbf{i} - (100\alpha_z + 300\alpha_x)\,\mathbf{j} + (75\alpha_x + 100\alpha_y)\,\mathbf{k}\,] \\ &\quad + [59{,}175\mathbf{i} - 44{,}385\mathbf{j} - 177{,}5\mathbf{k}] \quad (i) \end{aligned}$$

tiene las tres componentes

$$x: \quad 300\alpha_y - 75\alpha_z = -59{,}175 \quad (j)$$

$$y: \quad 300\alpha_x + 100\alpha_z = 788{,}6 \quad (k)$$

$$z: \quad 75\alpha_x + 100\alpha_y = 177{,}5 \quad (l)$$

Haciendo la hipótesis de que la varilla no gira en torno a su propio eje,

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}_{B/A} = (\alpha_x \mathbf{i} + \alpha_y \mathbf{j} + \alpha_z \mathbf{k}) \cdot (-100\mathbf{i} + 75\mathbf{j} + 300\mathbf{k})$$
$$= -100\alpha_x + 75\alpha_y + 300\alpha_z = 0 \qquad (m)$$

Por último, resolviendo el sistema constituido por las ecuaciones *k*, *l* y *m*, se tiene

$$\alpha_x = 2{,}367 \text{ rad/s}^2 \qquad \alpha_y = 0{,}000 \text{ rad/s}^2$$
$$\alpha_z = 0{,}789 \text{ rad/s}^2$$

o sea $$\boldsymbol{\alpha} = 2{,}367\mathbf{i} + 0{,}789\mathbf{k} \text{ rad/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 14.14

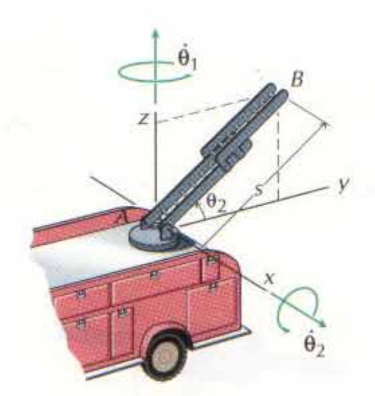


Figura 14-38

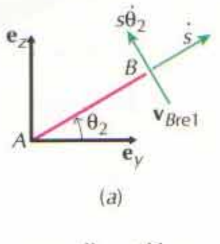
La escalera de bomberos representada en la figura 14-38 se eleva con una celeridad angular constante $\dot\theta_2 = 0{,}5$ rad/s. Simultáneamente, gira en torno a un eje vertical con una celeridad angular constante $\dot\theta_1 = 0{,}8$ rad/s y se extiende con una celeridad constante $\dot s = 1{,}5$ m/s. Determinar la velocidad $\mathbf{v}_B$ y la aceleración $\mathbf{a}_B$ del extremo de la escalera cuando $s = 10$ m y $\theta_2 = 30°$.

SOLUCIÓN

El sistema de coordenadas giratorio *xyz* se toma con su origen en *A*, según se indica en la figura 14-38. La velocidad de rotación del sistema *xyz* se toma de manera que la escalera se encuentre siempre en el plano *yz*. Entonces, la ecuación de la velocidad relativa (ec. 14-25*b*) es

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{v}_{B\text{rel}}$$

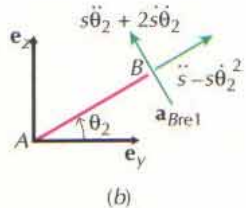
donde
$$\mathbf{v}_A = 0$$
$$\boldsymbol{\omega} = \dot\theta_1 \mathbf{e}_z$$
$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} = \dot\theta_1 \mathbf{e}_z \times (s \cos\theta_2 \mathbf{e}_y + s \operatorname{sen}\theta_2 \mathbf{e}_z)$$
$$= -(0{,}8)(10)30°\mathbf{e}_x = -6{,}928\mathbf{e}_x$$



(*a*)

y (fig. 14-39*a*)

$$\mathbf{v}_{B\text{rel}} = [\dot s \cos\theta_2 \mathbf{e}_y + \dot s \operatorname{sen}\theta_2 \mathbf{e}_z$$
$$- s\dot\theta_2 \operatorname{sen}\theta_2 \mathbf{e}_y + s\dot\theta_2 \cos\theta_2 \mathbf{e}_z]$$
$$= [1{,}5 \cos 30° - (10)(0{,}5) \operatorname{sen} 30°]\,\mathbf{e}_y$$
$$= -1{,}201\mathbf{e}_y + 5{,}080\mathbf{e}_z$$



(*b*)
Figura 14-39

Por tanto
$$\mathbf{v}_B = -6{,}928\mathbf{e}_x - 1{,}201\mathbf{e}_y + 5{,}080\mathbf{e}_z \qquad \text{Resp.}$$

La ecuación de la aceleración relativa (ec. 14-26*d*) es

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times r_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + \mathbf{a}_{B\text{rel}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{B\text{rel}}$$

donde

$$\mathbf{a}_A = 0$$
$$\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} = 0$$
$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) = \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_z \times (-6{,}928\mathbf{e}_x) = -5{,}543\mathbf{e}_y$$
$$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{B\text{rel}} = 2\dot{\theta}_1 \mathbf{e}_z \times (-1{,}201\mathbf{e}_y + 5{,}080\mathbf{e}_z) = 1{,}922\mathbf{e}_x$$

y (fig. 14-39*b*)

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{B\text{rel}} &= (\ddot{s} - s\dot{\theta}_2^2)(\cos\theta_2 \mathbf{e}_y + \text{sen}\,\theta_2 \mathbf{e}_z)\\ &\quad + (s\ddot{\theta}_2 + 2\dot{s}\dot{\theta}_2)(-\text{sen}\,\theta_2 \mathbf{e}_y + \cos\theta_2 \mathbf{e}_z)\\ &= [0 - (10)(0{,}5)^2]\,[30°\mathbf{e}_y + \text{sen}\,30°\mathbf{e}_z]\\ &\quad + [0 + 2(1{,}5)(0{,}5)]\,[-\text{sen}\,30°\mathbf{e}_y + \cos 30°\mathbf{e}_z]\\ &= -2{,}915\mathbf{e}_y + 0{,}049\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

Por tanto

$$\mathbf{a}_B = 1{,}922\mathbf{e}_x - 8{,}458\mathbf{e}_y + 0{,}049\mathbf{e}_z \text{ rad/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

14-131* Dibujar la posición final del libro de la figura 14-33*a* tras las rotaciones sucesivas

$$\Delta\theta_x = 90° \qquad \Delta\theta_y = 90° \qquad \Delta\theta_z = 90°$$

Determinar también la rotación única (eje y ángulo) equivalente a esa combinación de rotaciones.

14-132* Dibujar la posición final del libro de la figura 14-33*a* tras las rotaciones sucesivas

$$\Delta\theta_z = 180° \qquad \Delta\theta_y = 90° \qquad \Delta\theta_x = 180°$$

Determinar también la rotación única (eje y ángulo) equivalente a esa combinación de rotaciones.

14-133 Dibujar la posición final del libro de la figura 14-33*a* tras la rotaciones sucesivas

$$\Delta\theta_z = 90° \qquad \Delta\theta_y = 90° \qquad \Delta\theta_z = 90° \qquad \Delta\theta_x = 90°$$

Determinar también la rotación única (eje y ángulo) equivalente a esa combinación de rotaciones.

14-134* Dibujar la posición final del libro de la figura 14-33*a* tras las rotaciones sucesivas

$$\Delta\theta_x = 90° \qquad \Delta\theta_y = 90° \qquad \Delta\theta_x = -90° \qquad \Delta\theta_z = 90°$$

14-135 Determinar cuál de las siguientes rotaciones de un cuerpo dará lugar a la misma posición final de él:

a. $\Delta\theta_x = 90°,\ \Delta\theta_y = 90°$
b. $\Delta\theta_x = 90°,\ \Delta\theta_z = 90°$
c. $\Delta\theta_x = 90°,\ \Delta\theta_z = -90°$
d. $\Delta\theta_y = -90°,\ \Delta\theta_x = 90°$
e. $\Delta\theta_x = -90°,\ \Delta\theta_y = 90°,\ \Delta\theta_z = 90°$
f. $\Delta\theta_y = 90°,\ \Delta\theta_z = 90°,\ \Delta\theta_x = -90°$
g. $\Delta\theta_z = -90°,\ \Delta\theta_x = 90°,\ \Delta\theta_y = 90°$
h. $\Delta\theta_y = -90°,\ \Delta\theta_x = 90°,\ \Delta\theta_y = -90°,\ \Delta\theta_x = 90°$
i. $\Delta\theta_x = 90°,\ \Delta\theta_y = 90°,\ \Delta\theta_x = -90°,\ \Delta\theta_y = -90°$

14-136 El disco de 400 mm de diámetro representado en la figura P14-136 está rígidamente unido a un árbol de 750 mm de longitud y rueda sin deslizamiento sobre una superficie fija en el plano *xy*. El árbol, que es perpendicular al disco, está unido en *A* a una rótula y puede pivotar libremente en torno de *A*. Cuando el disco gira con velocidad angular ω_1 en torno al árbol, éste gira también alrededor de un eje vertical con velocidad angular ω_2. Si $\omega_1 = 2$ rad/s y $\dot{\omega}_1 = 5$ rad/s^2 en el instante representado, determinar:

a. La velocidad angular total $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular total $\boldsymbol{\alpha}$ en ese instante.
b. La velocidad $\mathbf{v}_C$ y la aceleración $\mathbf{a}_C$ del punto C del borde del disco en ese instante.

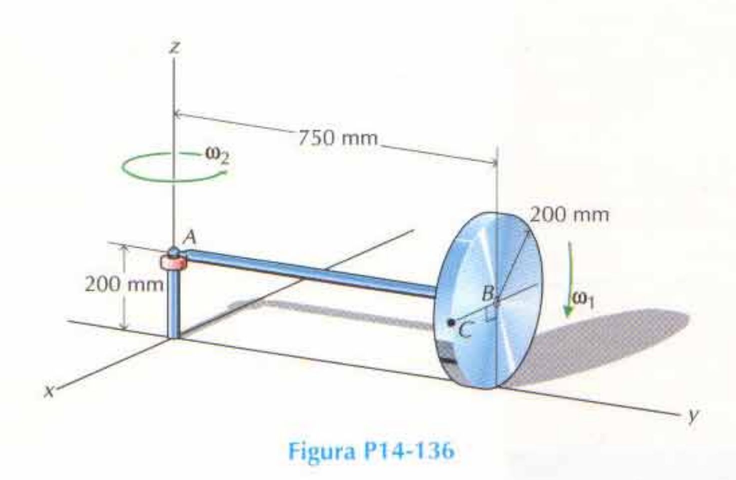


Figura P14-136

14-137* El tubo AB de 375 mm de longitud representado en la figura P14-137 gira alrededor de un eje vertical con celeridad angular ω_z. Al mismo tiempo, el tubo BC de longitud 300 mm gira en torno de AB con celeridad angular ω_2 y el disco de 250 mm de diámetro gira en torno al tubo BC con una celeridad angular ω_1.Determinar, para el instante representado (cuando BC está en el plano horizontal, $\omega_1 = 5$ rad/s = constante, $\omega_2 = \dot{\omega}_2 = 0$, $\omega_z = 3$ rad/s y $\dot{\omega}_z = -10$ rad/s^2)

a. La velocidad angular total $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular total $\boldsymbol{\alpha}$ del disco.
b. La velocidad $\mathbf{v}_D$ y la aceleración $\mathbf{a}_D$ del punto D del borde del disco.

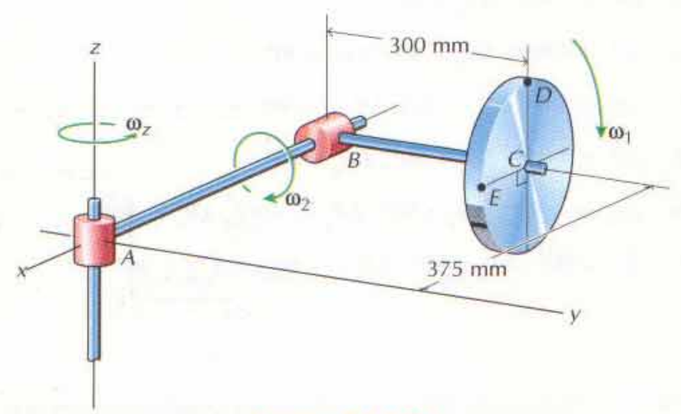


Figura P14-137

14-138 El eje del disco de 250 mm de diámetro de la figura P14-138 está montado sobre la plataforma giratoria de 800 mm de diámetro y gira con ella. Si, en el instante representado, $\omega_1 = 10$ rad/s, $\dot{\omega}_1 = 40$ rad/s^2, $\omega_2 = 3$ rad/s y $\dot{\omega}_2 = -25$ rad/s^2, determinar

a. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular total $\boldsymbol{\alpha}$ del disco en ese instante.
b. La velocidad $\mathbf{v}_D$ y la aceleración $\mathbf{a}_D$ del punto D del borde del disco en ese instante.

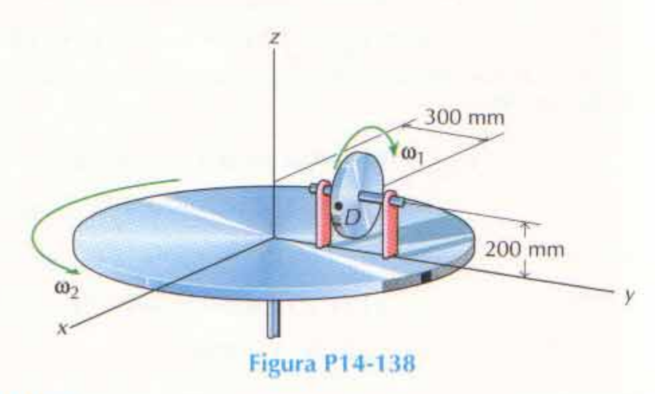


Figura P14-138

14-139* El tubo AB de 375 mm de longitud de la figura P14-137 gira en torno a un eje vertical con una celeridad constante ω_z. Al mismo tiempo, el tubo BC de longitud 300 mm gira alrededor de AB con una celeridad angular ω_2 y el disco de 250 mm de diámetro gira alrededor del tubo BC con una celeridad angular ω_1. Determinar, para el instante representado (cuando BC está en el plano horizontal, $\omega_1 = 5$ rad/s = constante, $\omega_2 = 3$ rad/s, $\dot{\omega}_2 = -10$ rad/s^2, $\omega_z = \dot{\omega}_z = 0$)

a. La velocidad angular total $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular total $\boldsymbol{\alpha}$ del disco.
b. La velocidad $\mathbf{v}_E$ y la aceleración $\mathbf{a}_E$ del punto E del borde del disco.

14-140* Un motor eléctrico gira unas palas (v. fig. P14-140) con una celeridad angular constante $\omega_1 = 600$ rpm. Al mismo tiempo, el motor gira en torno a un eje vertical con una celeridad constante $\omega_z = 5$ rpm. Determinar, para el instante repre-

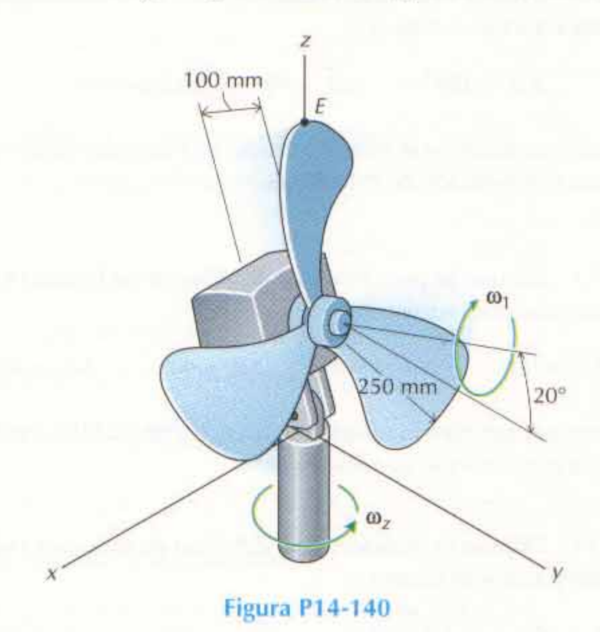


Figura P14-140

sentado, la velocidad angular total $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular total $\boldsymbol{\alpha}$ de las palas.

14-141 La varilla de longitud 120 cm de la figura P14-141 está conectada a las correderas A y B mediante rótulas. En el instante representado, $x = 50$ cm y la corredera A se mueve en el sentido negativo del eje x con una celeridad constante de 45 cm/s. Determinar

a. La velocidad $\mathbf{v}_B$ y la aceleración $\mathbf{a}_B$ de la corredera B en ese instante.
b. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la varilla en ese instante. (Supóngase que la varilla no gira en torno a su propio eje.)

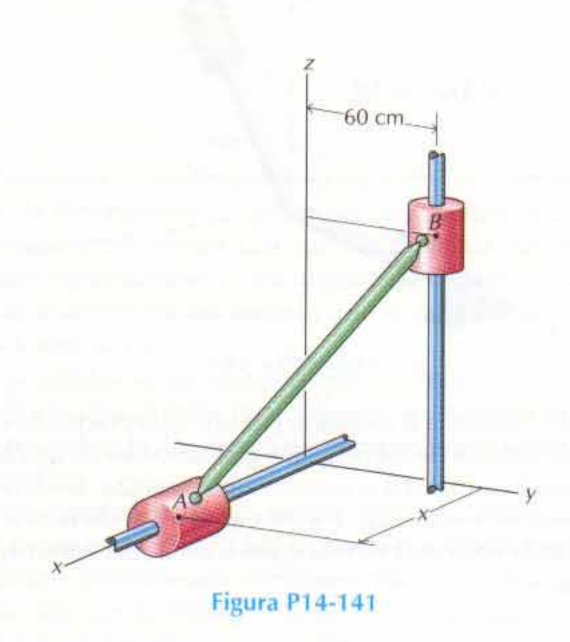


Figura P14-141

14-142* La varilla de 1200 mm de longitud de la figura P14-142 está conectada a las correderas A y B mediante) rótulas. En el instante representado, $y = 750$ mm y la corredera B se mueve en el sentido positivo del eje y con una celeridad constante de 100 mm/s. Determinar

a. La velocidad $\mathbf{v}_A$ y la aceleración $\mathbf{a}_A$ de la corredera A en ese instante.
b. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la varilla en ese instante. (Supóngase que la varilla no gira en torno a su propio eje.)

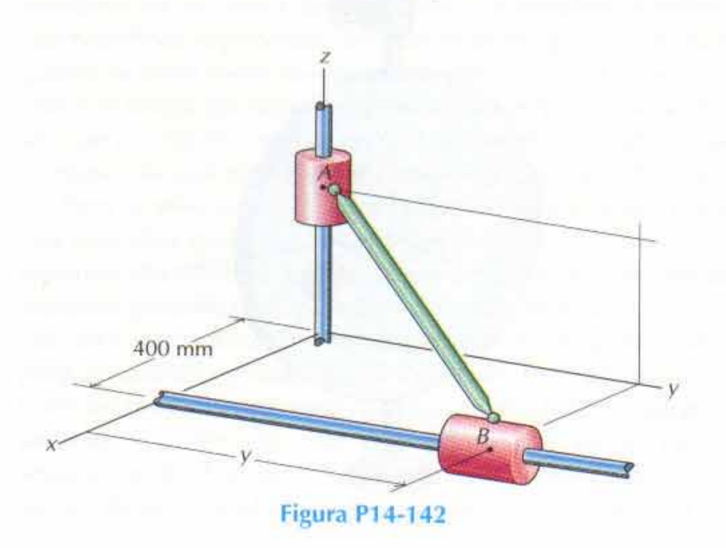


Figura P14-142

14-143 La varilla de 125 cm de longitud representada en la figura P14-143 está conectada a las correderas A y B mediante rótulas. Cuando la corredera B pasa por el eje x ($x_B = 60$ cm, $y_B = 0$ cm, $z_B = 0$ cm), la velocidad y la aceleración de la corredera A son $\dot{y} = 45$ cm/s e $\ddot{y} = -15$ cm/s^2, respectivamente. Para este instante, determinar

a. La velocidad $\mathbf{v}_B$ y la aceleración $\mathbf{a}_B$ de la corredera B.
b. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$. (Supóngase que la varilla no gira en torno a su propio eje.)

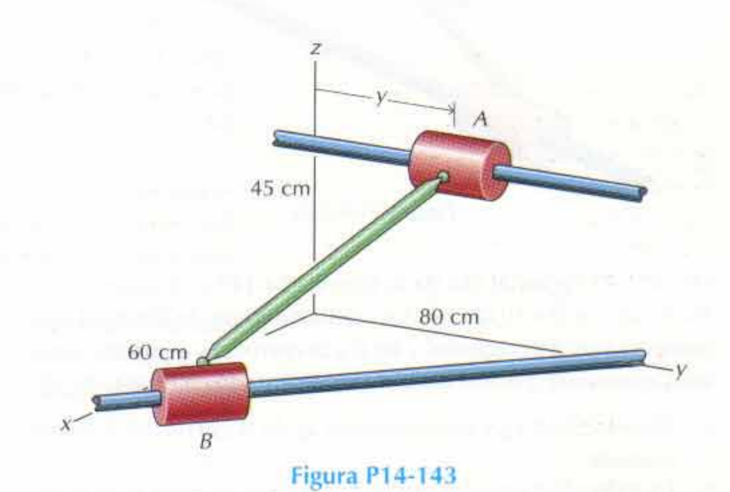


Figura P14-143

14-144* Supóngase que la posición de la corredera B del problema 14-142 viene dada por $y(t) = 1000$ sen nt donde t se expresa en segundos, y en milímetros y $n = 1$ rad/s. Determinar

a. La velocidad $\mathbf{v}_A$ y la aceleración $\mathbf{a}_A$ de la corredera A en el instante $t = 0{,}8$ s.
b. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la varilla en el instante $t = 0{,}8$ s. (Supóngase que la varilla no gira en torno a su propio eje.)

14-145 Supóngase que la posición de la corredera A del problema 14-141 viene dada por $x(t) = 60$ sen nt donde t se expresa en segundos, x en centímetros y $n = 1$ rad/s. Determinar

a. La velocidad $\mathbf{v}_B$ y la aceleración $\mathbf{a}_B$ de la corredera B en el instante $t = 0{,}5$ s.
b. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la varilla en el instante $t = 0{,}5$ s. (Supóngase que la varilla no gira en torno a su propio eje.)

14-146* La rueda de 600 mm de diámetro de la figura P14-146 gira con una celeridad angular constante $\omega_0 = 5$ rad/s. La varilla AB de 1000 mm de longitud está conectada al borde de la rueda en el punto A y a la corredera B mediante rótulas. Para el instante representado, en el cual $\theta = 90°$, determinar

a. La velocidad $\mathbf{v}_B$ y la aceleración $\mathbf{a}_B$ de la corredera B en ese instante.
b. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la varilla en ese instante. (Supóngase que la varilla no gira en torno a su propio eje.)

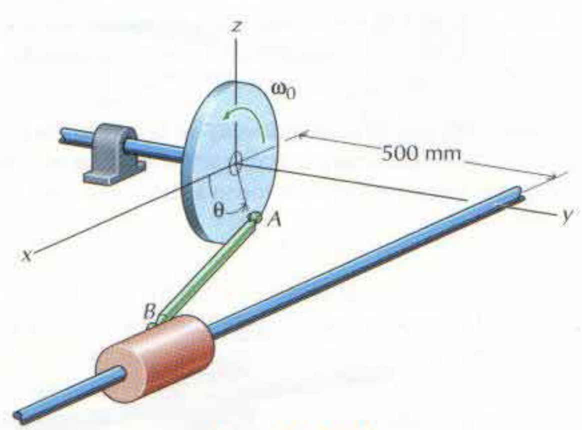


Figura P14-146

14-147 El cigüeñal OA de la figura P14-147 está girando con $\dot{\theta} = 3$ rad/s y $\ddot{\theta} = 10$ rad/s². La varilla de 90 cm de longitud está conectada en A al cigüeñal y en B a la corredera mediante rótulas. Determinar, para el instante representado en el cual $\theta = 0°$,

a. La velocidad $\mathbf{v}_B$ y la aceleración $\mathbf{a}_B$ de la corredera B en ese instante.
b. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la varilla en ese instante. (Supóngase que la varilla no gira en torno a su propio eje.)

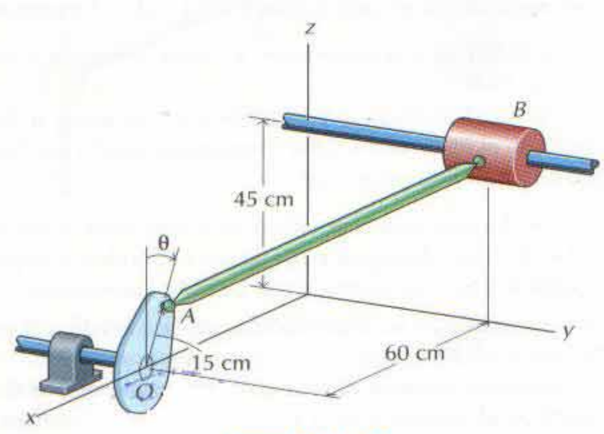


Figura P14-147

14-148* La escalera de bomberos del problema ejemplo 14-14 gira en torno a un eje vertical con celeridad angular constante $\omega_1 = 0{,}8$ rad/s con $\dot{s} = 0$, $\ddot{s} = -2{,}5$ m/s², $\dot{\theta}_2 = 0$ y $\ddot{\theta}_2 = -1{,}5$ rad/s² cuando $s = 10$ m y $\theta_2 = 30°$. Determinar la velocidad $\mathbf{v}_B$ y la aceleración $\mathbf{a}_B$ del extremo de la escalera en ese instante.

14-149 Una cuenta B se desliza por una varilla doblada que gira en torno al eje x (fig. P14-149). En el instante representado, la varilla está en el plano xz siendo $\omega = 5$ rad/s, $\dot{\omega} = 18$ rad/s², $s = 200$ mm, $\dot{s} = 25$ mm/s y $\ddot{s} = -62{,}5$ mm/s². Determinar la velocidad $\mathbf{v}_B$ y la aceleración $\mathbf{a}_B$ de la cuenta en ese instante.

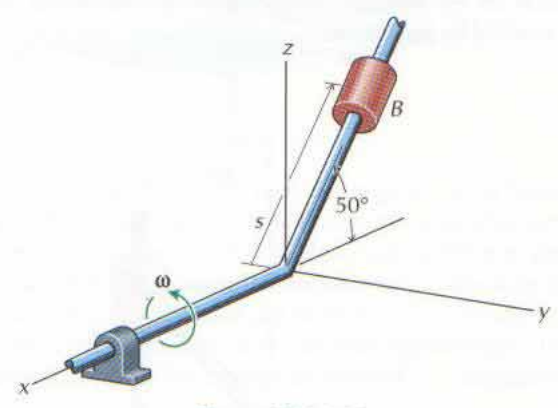


Figura P14-149

14-150* Un cursor B se desliza por una guía practicada en un disco de 500 mm de diámetro que gira alrededor de un eje vertical (fig. P14-150). En el instante representado, $\omega = 3$ rad/s, $\dot{\omega} = 8$ rad/s², $s = 200$ mm, $\dot{s} = 250$ mm/s y $\ddot{s} = -50$ mm/s². Determinar la velocidad $\mathbf{v}_B$ y la aceleración $\mathbf{a}_B$ del cursor en ese instante.

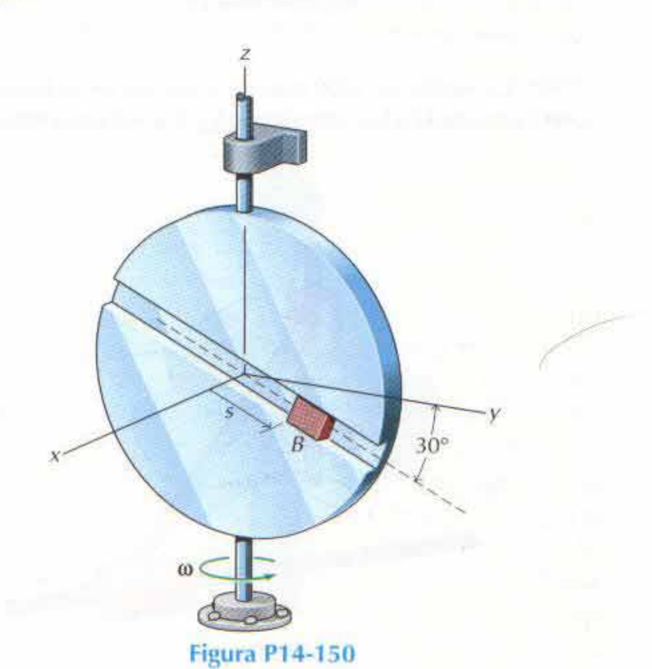


Figura P14-150

14-151* Una cuenta B se desliza por un aro que gira en torno al eje y (fig. P14-151). En el instante representado, el aro de 50 cm de diámetro se halla en el plano y-z y $\omega = 8$ rad/s, $\dot{\omega} = 12$ rad/s², $\theta = 30°$ y $\dot{\theta} = 10$ rad/s = constante. Determinar la velocidad $\mathbf{v}_B$ y la aceleración $\mathbf{a}_B$ de la cuenta en ese instante.

14-152 Repetir el problema 14-150 para el caso $s = 0$.

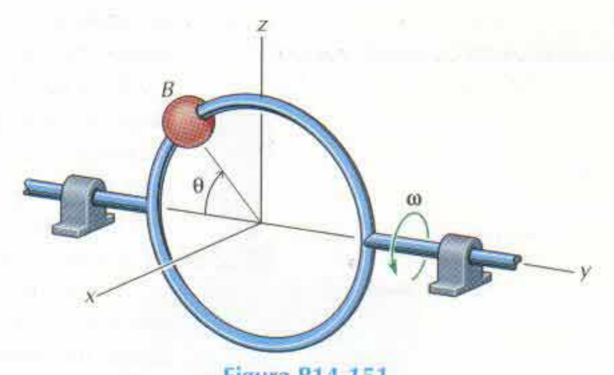


Figura P14-151

RESUMEN

La Cinemática estudia cómo se mueven los cuerpos. En el caso de cuerpos sólidos, la descripción completa del movimiento exige que se den la situación y orientación del cuerpo. La Cinemática de los cuerpos sólidos comprende magnitudes tanto lineales como angulares. El estudio de la Cinética, que relaciona el movimiento con las fuerzas que lo originan, exige una buena comprensión de la Cinemática.

Los sólidos se considerará que son rígidos. En un cuerpo rígido, las separaciones de dos puntos cualesquiera se mantienen fijas e independientes del tiempo. Además, los ángulos definidos por las distintas tripletas de puntos son invariables.

En la traslación de un cuerpo rígido, la orientación de toda recta del mismo se mantiene invariable: las rectas horizontales permanecen horizontales y las verticales permanecen verticales. Esto significa que el movimiento de todo punto del cuerpo rígido es igual al de cualquiera otro de sus puntos. La Cinemática de los puntos que constituyen un cuerpo rígido en movimiento de traslación es igual a la Cinemática del movimiento de un punto.

En el movimiento plano de un cuerpo rígido, cada uno de sus puntos se mantiene en un plano. La traslación y la rotación en torno a un eje fijo coplanarias son tipos específicos del movimiento plano. Un movimiento plano cualquiera es todo movimiento plano para el cual las rectas del cuerpo giran sin que éste tenga fijo ninguno de sus puntos. El movimiento plano cualquiera de un cuerpo rígido consiste en una traslación de todo el cuerpo con uno de sus puntos más una rotación del cuerpo en torno a dicho punto.

Para la resolución de problemas de movimiento plano cualquiera existen dos métodos generales: el análisis del movimiento absoluto y el análisis del movimiento relativo. En el método del movimiento absoluto se escriben las relaciones geométricas que describen las ligaduras a las que está sometido el cuerpo y su interacción con otros cuerpos. Después se utilizan estas relaciones para describir la situación y el movimiento de otros puntos del cuerpo. El método del movimiento relativo utiliza la rigidez del cuerpo para relacionar la velocidad y aceleración de dos puntos de dicho cuerpo rígido. Como la separación de dos puntos de un mismo cuerpo rígido es invariable, las expresiones de la velocidad relativa y la aceleración relativa adoptan formas parti-

cularmente sencillas, las cuales sólo dependen de la velocidad y aceleración angulares del cuerpo.

Para resolver un problema cualquiera puede utilizarse uno u otro método. Algunos problemas se describen geométricamente con facilidad y se manejan fácilmente con el método del movimiento absoluto. Los problemas que no tengan una descripción geométrica fácil suelen resolverse utilizando el método del movimiento relativo. En muchos casos, la elección del método es cuestión de gusto personal.

En un movimiento plano cualquiera de un cuerpo rígido, ninguno de sus puntos está fijo a lo largo del tiempo. Sin embargo, en cada instante se puede hallar un punto del cuerpo (o de su prolongación) cuya velocidad sea nula. Una vez localizado este centro instantáneo, la velocidad de cualquier otro punto del cuerpo se podrá hallar utilizando la ecuación de la velocidad relativa. La utilización del centro instantáneo no es necesaria para resolver un problema cualquiera. No es sino otra manera de expresar la ecuación de la velocidad relativa.

El centro instantáneo de rotación de un cuerpo rígido en movimiento plano cualquiera no está fijo. Por tanto, diferentes puntos del cuerpo rígido serán centros instantáneos en distintos instantes y la situación del centro instantáneo de rotación se moverá a lo largo del tiempo. En el cálculo de aceleraciones no deberá utilizarse el centro instantáneo de rotación.

Existen varios tipos de problemas en los cuales conviene describir la posición o el movimiento de un punto respecto a un sistema de coordenadas en rotación. En particular, algunos mecanismos están conectados mediante pasadores que se deslizan por ranuras o guías. El movimiento relativo se especifica convenientemente dando los movimientos de traslación y rotación del miembro que contiene la ranura, la forma de ésta y la velocidad de recorrido del pasador a lo largo de dicha ranura. Al derivar la ecuación de la posición relativa para obtener las ecuaciones de la velocidad y la aceleración relativas habrá que tener en cuenta la rotación del sistema de coordenadas. Ello da lugar a tres nuevos términos: $\mathbf{v}_{B\text{rel}}$, $\mathbf{a}_{B\text{rel}}$ y $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{B\text{rel}}$ en las ecuaciones de la velocidad relativa y de la aceleración relativa.

PROBLEMAS DE REPASO

14-153* El mecanismo representado en la figura P14-153 es un esquema simplificado de una prensa de imprenta. Al girar la manivela AB ($\dot{\theta}$ = 5 rpm = constante), el tambor C se mueve en uno y otro sentido sobre el papel. Para el instante representado (θ = 50°) determinar

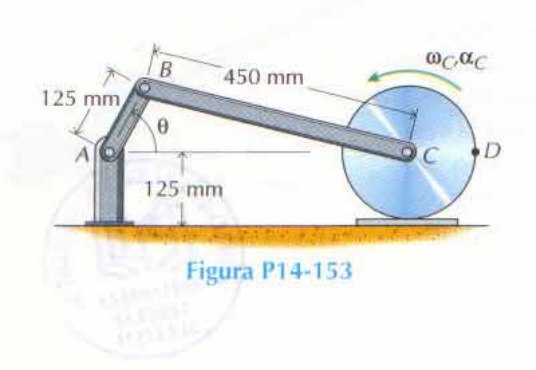


Figura P14-153

a. La velocidad angular ω_C y la aceleración angular α_C del tambor.
b. La velocidad $\mathbf{v}_D$ y la aceleración $\mathbf{a}_D$ del punto D de la superficie del tambor.

14-154 La cubierta del rodamiento a rodillos representado en la figura P14-154 está fija, mientras que el árbol interior gira a velocidad constante de 5000 rpm. Si los rodillos ruedan sin deslizamiento por las pistas de 50 y 60 mm de diámetro respectivamente, determinar la velocidad **v** y la aceleración **a** del punto

a. A de la superficie del árbol.
b. C del eje de un rodillo.
c. B de la superficie del rodillo.
d. D de la superficie del rodillo.

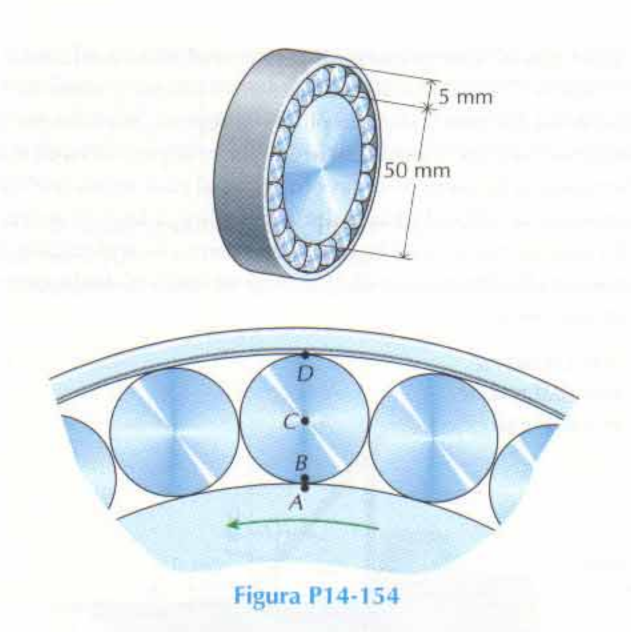


Figura P14-154

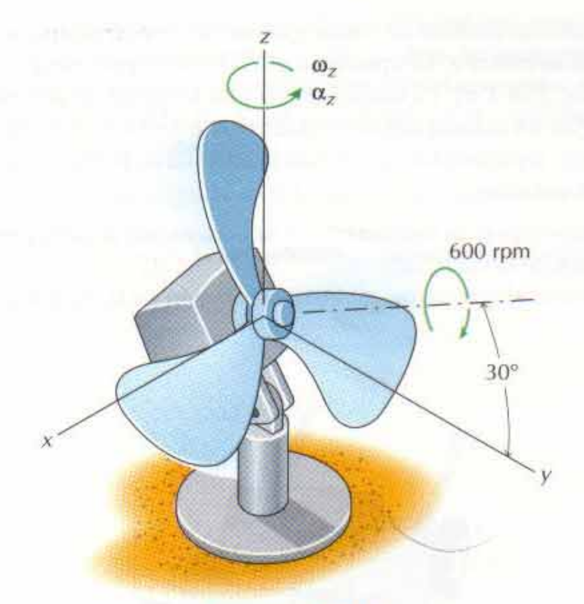


Figura P14-156

14-155 El camión representado en la figura P14-155 se halla inicialmente parado ante un semáforo. Al tener luz verde acelera a 0,24 m/s^2 y el barril de 0,9 m de diámetro empieza a rodar hacia atrás con aceleración angular constante $\alpha = 0{,}025$ rad/s^2. Determinar

a. Lo que habrá recorrido el camión antes de que el barril caiga por su trasera.
b. La velocidad $\mathbf{v}_C$ del centro del barril y su velocidad angular ω cuando sale por la trasera del camión.
c. La velocidad de deslizamiento (velocidad relativa del barril respecto al suelo) en el instante en que llega al suelo.

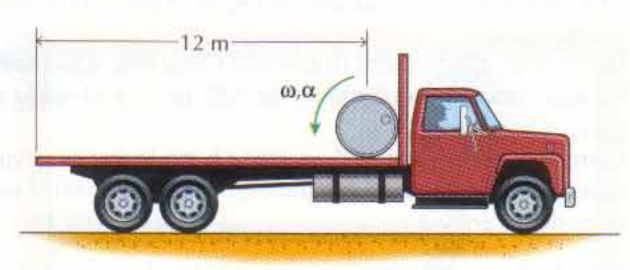


Figura P14-155

14-156 Un motor eléctrico hace girar las palas del ventilador de la figura P14-156 con la frecuencia constante de 600 rpm. Al mismo tiempo, el motor gira en torno a un eje vertical con una velocidad angular ω_z y una aceleración angular ω_z. Determinar la velocidad angular total $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular total $\boldsymbol{\alpha}$ de las palas en el instante en que $\omega_z = 3$ rad/s y $\alpha_z = 12$ rad/s^2.

14-157 Se eleva una viga AB de longitud 3,6 m mediante un torno, en la forma indicada en la figura P14-157. El torno se acelera con una aceleración angular constante de 0,05 rad/s^2 hasta que su velocidad angular alcanza las 10 rpm, manteniéndose luego constante esta velocidad angular. Si el sistema parte del reposo con $\theta = 90°$ determinar la velocidad $\mathbf{v}_B$ y la aceleración $\mathbf{a}_B$ cuando

a. $\theta = 60°$ b. $\theta = 30°$ c. $\theta = 0°$

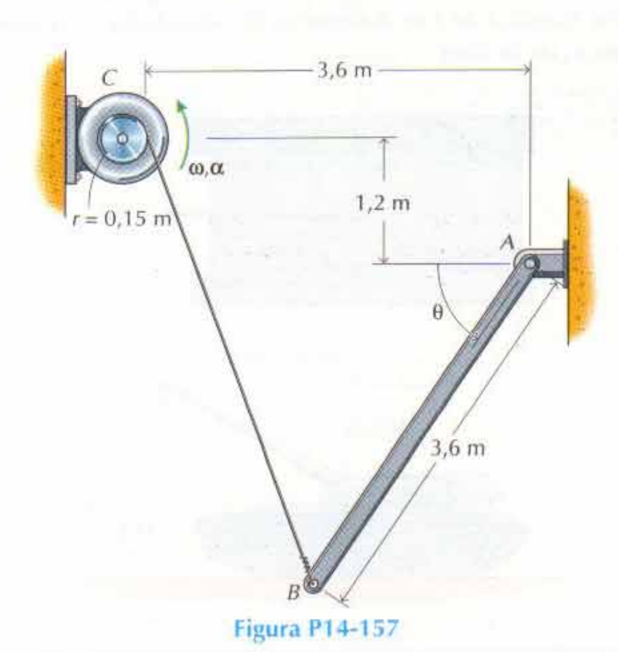


Figura P14-157

14-158* La cuchilla de una segadora de césped rotatoria gira constantemente a 900 rpm en sentido horario vista desde encima (fig. P14-158). La cuchilla tiene una longitud de 800 mm y la segadora avanza con celeridad constante $v = 3$ m/s. Para el instante representado, en el cual la cuchilla es perpendicular a la velocidad **v**

a. Determinar la velocidad **v** y la aceleración **a** de los extremos de la cuchilla.
b. Hallar el centro instantáneo de rotación de la cuchilla.

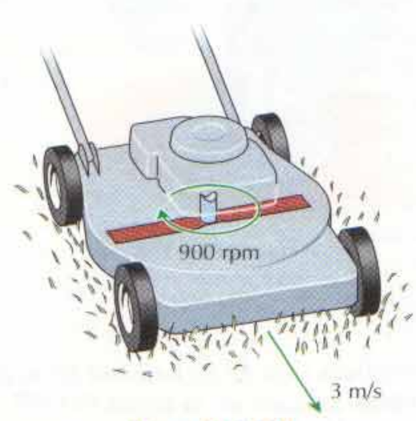


Figura P14-158

14-159 El tanque representado en la figura P14-159 avanza con una celeridad constante de 48 km/h. En el instante representado, la torreta está apuntando hacia delante y girando con velocidad angular constante $\omega_1 = 2$ rad/s mientras el cañón se alza a razón de $\omega_2 = 0{,}5$ rad/s y $\dot{\omega}_2 = 0{,}03$ rad/s^2. Si el cañón tiene una longitud de 3 m, determinar la velocidad $\mathbf{v}_A$ y la aceleración $\mathbf{a}_A$ de su boca.

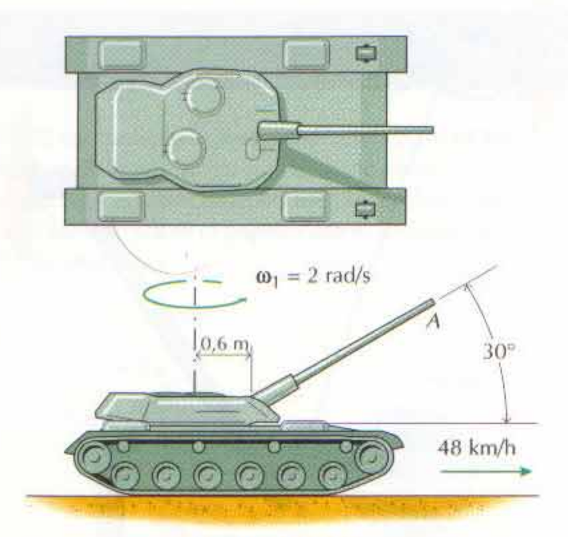


Figura P14-159

14-160* Un bloque pequeño B gira con el plato horizontal A de la figura P14-160. La distancia entre el bloque y el eje de rotación es de 200 mm y el plato parte del reposo. Si el bloque comienza a deslizarse cuando su aceleración supera el valor $0{,}6g$, determinar el número N de revoluciones al cual se inicia el deslizamiento, la velocidad angular ω del plato a la cual se inicia dicho deslizamiento y el ángulo θ que forma la aceleración del bloque con la dirección radial cuando se inicia el deslizamiento, en los casos:

a. $\alpha = 1{,}0$ rad/s^2.
b. $\alpha = 10{,}0$ rad/s^2.
c. $\alpha = 20{,}0$ rad/s^2.

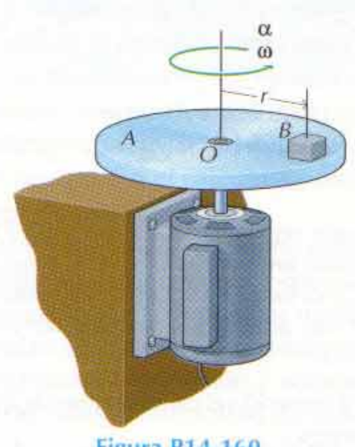


Figura P14-160

14-161* El tanque del problema 14-159 dispara una granada en el instante representado. Si sale del cañón con una celeridad relativa de 255 m/s

a. Determinar la velocidad absoluta $\mathbf{v}_g$ de la granada cuando sale del cañón.
b. Determinar dónde caerá la granada (tiene una aceleración vertical hacia abajo constante de 9,81 m/s^2 y el suelo es plano y horizontal).
c. Comparar la respuesta del apartado b con la que se obtendría en el caso de que el tanque estuviera parado en el instante de hacer fuego.

14-162 El bloque pequeño B gira con el plato horizontal A de la figura P14-160. El bloque empieza a deslizarse cuando la aceleración se hace mayor que $0{,}6g$. El plato parte del reposo y se acelera hasta alcanzar las 30 rpm en una revolución, manteniendo a continuación constante la velocidad angular. Determinar la máxima distancia r para la cual no se desliza el bloque en el caso de que

a. $\alpha =$ constante
b. α disminuya linealmente respecto a θ a partir de $\alpha = \alpha_0$ cuando $\omega = 0$ hasta $\alpha = 0$ al cabo de una revolución.

14-163* En el instante representado, el camión de la figura P14-163 lleva una velocidad de 48 km/h y está acelerando a razón de 1,5 m/s^2. Si el extremo A de la barra AB de 3 m de longitud se desliza hacia atrás con celeridad de 0,6 m/s relativa al camión,

a. Determinar la velocidad $\mathbf{v}_G$ y la aceleración $\mathbf{a}_G$ del centro de la barra AB.
b. Localizar el centro instantáneo de rotación C de la barra AB.

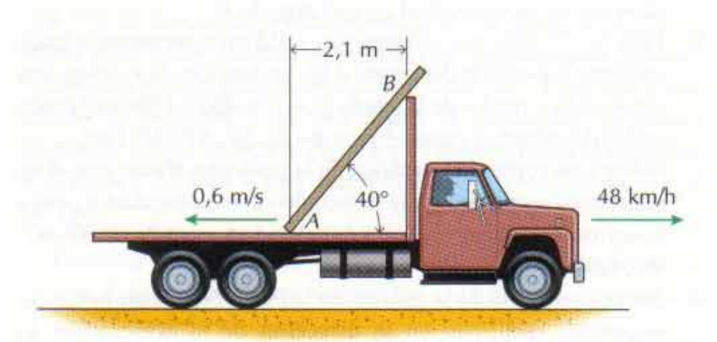


Figura P14-163

14-164 La lanzadera C de la figura P14-164 oscila en uno y otro sentido a causa de la rotación de la rueda D de 0,50 m de diámetro. Si dicha rueda gira con velocidad angular constante igual a 30 rpm, determinar la velocidad $\mathbf{v}_C$ y la aceleración $\mathbf{a}_C$ de la lanzadera en el instante representado, en el cual el miembro AB está horizontal.

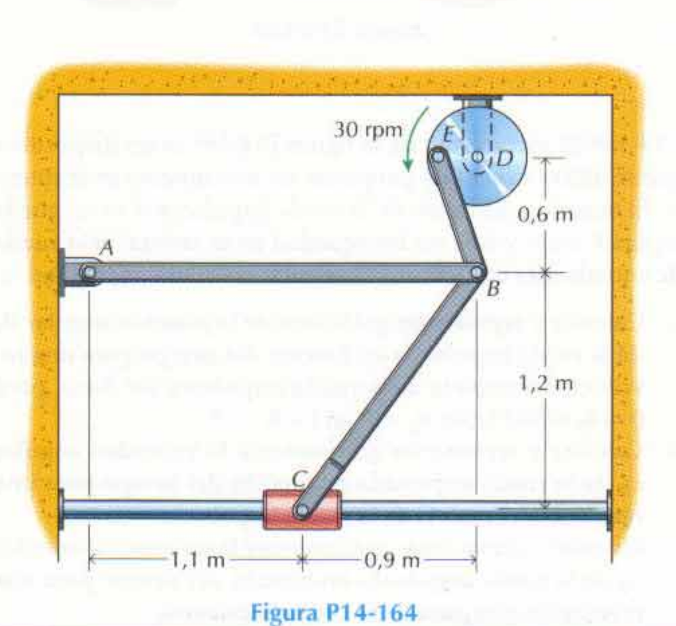


Figura P14-164

14-165 La antena de radar de la figura P14-165 está siguiendo un avión. En el instante representado, el plato del radar está girando alrededor de un eje vertical con celeridad angular constante igual a 0,4 rad/s, $\phi = 30°$, $\dot{\phi} = -0{,}5$ rad/s y $\ddot{\phi} = 0{,}02$ rad/s^2. Para ese instante, determinar:

a. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la antena.
b. La velocidad $\mathbf{v}_H$ y la aceleración $\mathbf{a}_H$ del emisor de señal H.

Figura P14-165

C4-166 Una rueda de 600 mm de diámetro está rodando sin deslizamiento sobre una superficie horizontal, según se indica en la figura P14-166. La barra AB de 1 m de longitud está conectada a la rueda en un punto situado a 250 mm de su centro y el extremo A se desliza libremente por la superficie. Si el centro de la rueda lleva una celeridad constante de 1,2 m/s hacia la derecha y $\theta = 0$ cuando $t = 0$, calcular y representar gráficamente

a. La velocidad v_A del extremo A de la barra en función del tiempo ($0 \le t \le 3$ s).
b. La aceleración angular α_{AB} de la barra en función del tiempo ($0 \le t \le 3$ s).
c. La aceleración $\mathbf{a}_G$ del centro de masa de la barra en función del tiempo ($0 \le t \le 3$ s).

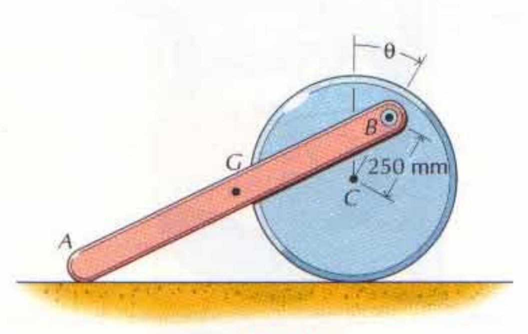


Figura P14-166

C14-167 El mecanismo corredera-manivela de la figura P14-167 es una idealización del mecanismo de automóvil constituido por cigüeñal, biela y émbolo. Si la manivela gira con una velocidad angular $\dot{\theta}$ constante

a. Escribir las expresiones correspondientes a la aceleración $\mathbf{a}_C$ del émbolo, la velocidad angular $\dot{\phi}$ de la biela y la aceleración $\ddot{\phi}$ de ésta, en función de θ, $\dot{\theta}$, ℓ_{AB} y ℓ_{BC}.
b. Tomando $\ell_{AB} = 75$ mm, $\ell_{BC} = 175$ mm y $\dot{\theta} = 4800$ rpm, representar gráficamente a_C, $\dot{\phi}$ y $\ddot{\phi}$ en función de θ ($0 \leqslant \theta \leqslant 360°$).

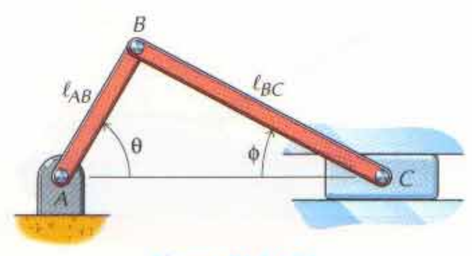


Figura P14-167

C14-168 Una rueda escalonada está rodando sin deslizamiento sobre un par de raíles, según se indica en la figura P14-168. Si el centro de la rueda lleva una celeridad constante v_C y la coordenada x del punto A es nula cuando $\theta = 0°$:

a. Escribir las expresiones de posición (x_A, y_A), velocidad (v_{Ax}, v_{Ay}) y aceleración (a_{Ax}, a_{Ay}) del punto A en función de los radios r_1 y r_2, la velocidad v_C y el ángulo θ.
b. Para $r_1 = 75$ mm, $r_2 = 150$ mm y $v_C = 0{,}5$ m/s, representar gráficamente la posición del punto A (y_A en función de x_A) para una revolución y media de la rueda ($0 \leqslant \theta \leqslant 450°$). Dibujar la recta radial del centro al punto A para $\theta = 0°, 30°, 60°, 90°, 120°, ...$
c. Sobre una copia de la gráfica de la posición, trazar por A un segmento rectilíneo en la dirección de la velocidad $\mathbf{v}_A$ cuya longitud sea proporcional a la celeridad, para $\theta = 0°, 30°, 60°, 90°, 120°, ...$
d. Sobre una copia de la gráfica de la posición, trazar por A un segmento rectilíneo en la dirección de la aceleración $\mathbf{a}_A$ cuya longitud sea proporcional al módulo de la aceleración, para $\theta = 0°, 30°, 60°, 90°, 120°, ...$

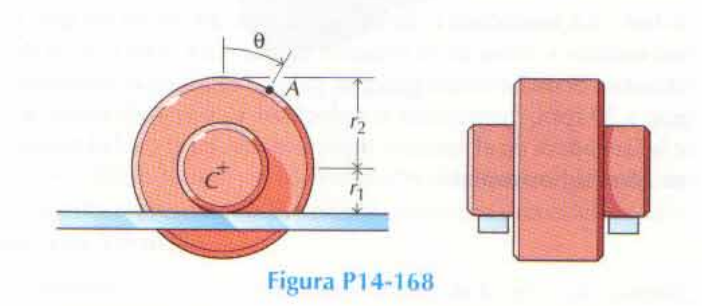


Figura P14-168

C14-169 El mecanismo de la figura P14-169 es un dispositivo que se utiliza a menudo para crear un movimiento intermitente. El tamaño y situación de la rueda impulsora A es tal que la espiga P entra y sale sin brusquedad en la ranura. Si la rueda de entrada gira con velocidad angular constante $\omega_A = 5$ rad/s:

a. Calcular y representar gráficamente la posición angular θ_B de la rueda impulsada en función del tiempo para una revolución completa de la rueda impulsora (es decir, para $0 \leqslant \theta_B \leqslant 360°$). Sea $\theta_B = 0°$ en $t = 0$.
b. Calcular y representar gráficamente la velocidad angular ω_B de la rueda impulsada en función del tiempo para una revolución completa de la rueda impulsora.
c. Calcular y representar gráficamente la aceleración angular α_B de la rueda impulsada en función del tiempo para una revolución completa de la rueda impulsora.

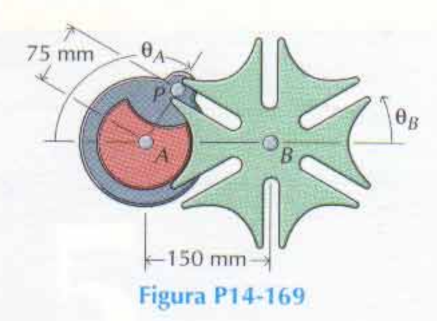


Figura P14-169

C14-170 El mecanismo representado en la figura P14-170 se utiliza para hacer avanzar la película en un proyector cinematográfico. Cuando gira el enlace impulsor *AB*, el gancho *P* engancha la película y la tira hacia la izquierda en forma alternada, luego se separa de ella y se mueve hacia la derecha. Si el enlace *AB* gira a una celeridad angular constante ω_{AB} = 900 rpm

a. Calcular y representar gráficamente el movimiento de la uña *P* (posición y_P en función de x_P) para una revolución completa del enlace *AB*.
b. Calcular y representar gráficamente las componentes horizontal y vertical de la velocidad de la uña *P* en función del tiempo. (Sea $t = 0$ cuando *AB* y *CD* estén verticales, como en la figura.)
c. Calcular y representar gráficamente las componentes horizontal y vertical de la aceleración de la uña *P* en función del tiempo.

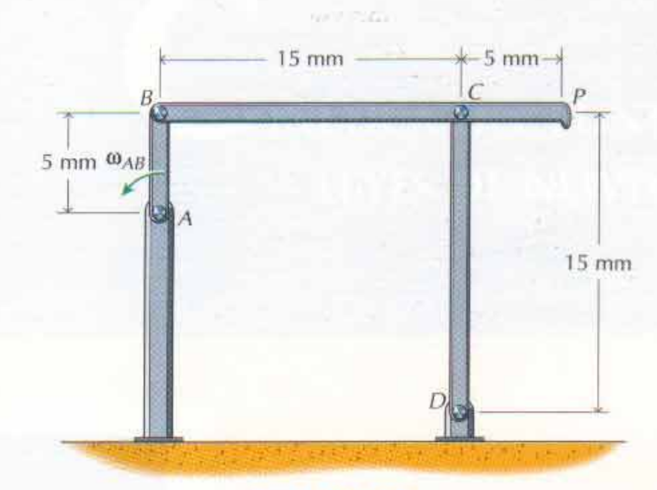
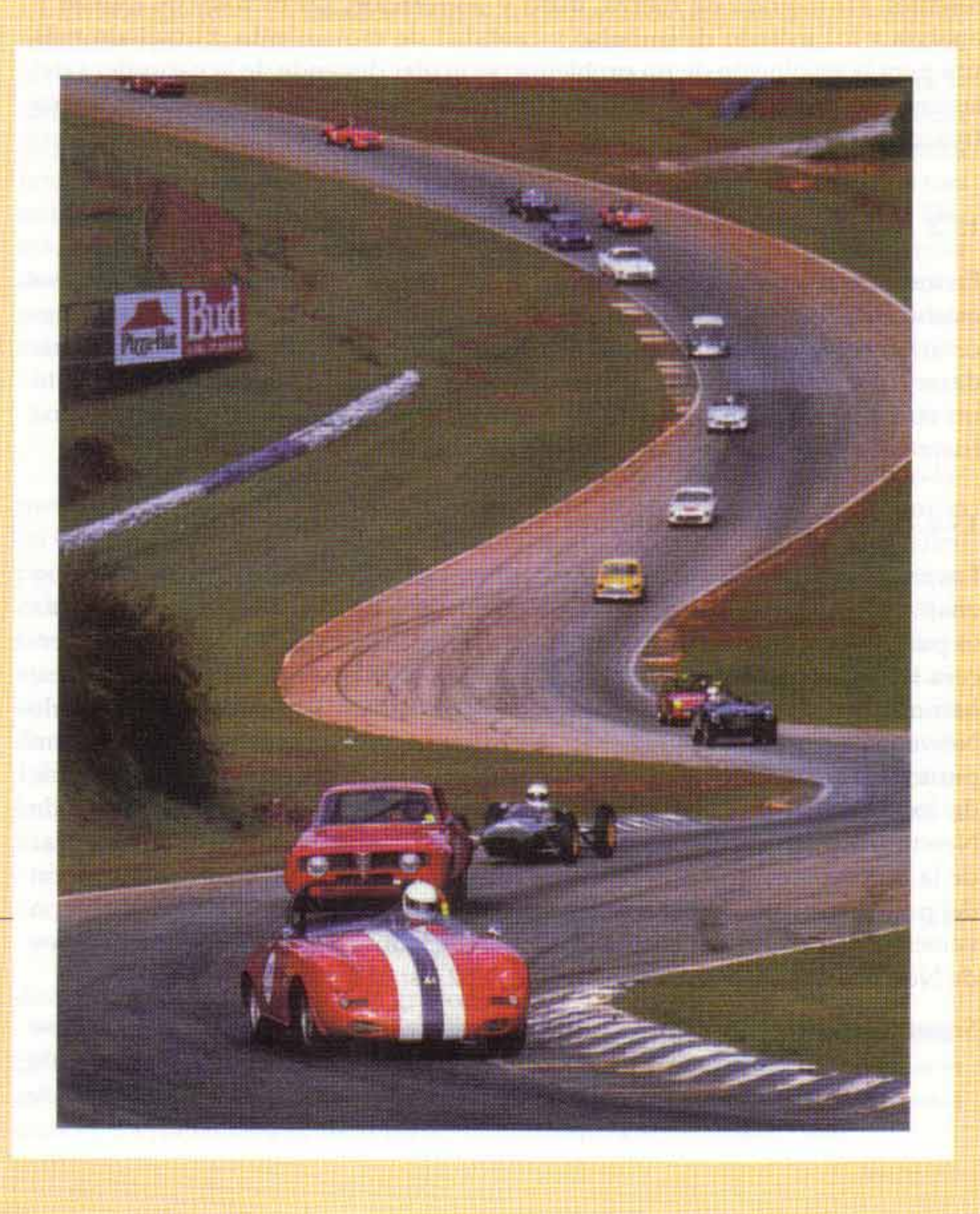


Figura P14-170

15 CINÉTICA DEL PUNTO: LEYES DE NEWTON



Los coches de carreras, al tomar una curva, experimentan una aceleración hacia el interior de ella que debe ser generada por fuerzas de rozamiento, si la calzada es horizontal. Para reducir estas fuerzas de rozamiento necesarias, debe peraltarse la calzada.

15.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos 13 (Cinemática del punto) y 14 (Cinemática del cuerpo rígido) se han estudiado los movimientos de las partículas y de los cuerpos rígidos sin considerar las fuerzas necesarias para originar dichos movimientos. En ellos se desarrollaron relaciones que describen cómo varían la velocidad y la aceleración de un cuerpo con el tiempo o con un cambio de posición. En un curso anterior de Estática, se desarrollaron métodos para determinar la fuerza resultante **R** y el momento resultante **C** de todo sistema de fuerzas que pueda ejercerse sobre un cuerpo. Cuando la resultante del sistema de fuerzas que se ejerce sobre un cuerpo (supuesto un punto) es nula, el cuerpo está en equilibrio (en reposo o moviéndose con velocidad constante). Cuando dicha resultante no es nula, el cuerpo se halla animado de movimiento acelerado. Las fuerzas no equilibradas y los movimientos que originan constituyen el tema (Cinética) a tratar en los restantes capítulos de este libro.

El movimiento que experimenta un cuerpo cuando está sometido a un sistema de fuerzas no equilibrado se puede establecer utilizando tres métodos diferentes: (1) método de fuerza, masa y aceleración, (2) método de trabajo y energía y (3) método de impulso y cantidad de movimiento. El método más útil para la resolución de un problema particular depende de la naturaleza del sistema de fuerzas (constantes o variables) y de la información que se busca (reacciones, velocidades, aceleraciones, etc.).

15.2 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

En los tiempos anteriores a Galileo y Newton, se creía que un cuerpo en reposo estaba en su estado natural; por tanto, para mantenerlo en movimiento era necesaria una cierta fuerza. La gran contribución de Newton a la Mecánica fue darse cuenta de que no era necesaria una fuerza para mantener en movimiento un cuerpo una vez que se hubiera puesto en movimiento y que el efecto de una fuerza es alterar la velocidad, no mantenerla.

15.2.1 Segunda ley de Newton

Las tres leyes de Newton para el movimiento, tal como suelen expresarse hoy en día, se consignaron en el apartado 12.2. La primera ley atañe a una partícula (o punto material) en reposo o que se mueva con velocidad constante y la tercera ley rige la acción y la reacción entre cuerpos que interactúan. Ambas se han utilizado para desarrollar los conceptos de Estática. La segunda ley de Newton para el movimiento, que relaciona el movimiento acelerado de un punto material con las fuerzas que originan el movimiento, constituye la base de los estudios de Dinámica. Se dijo anteriormente que la primera ley de Newton, que trata el caso de punto material en equilibrio, es un caso particular de la segunda ley. Cuando la fuerza resultante es nula ($\mathbf{R} = \mathbf{0}$), la aceleración del punto es nula ($\mathbf{a} = \mathbf{0}$); por tanto, el punto estará en reposo o moviéndose con velocidad constante (en equilibrio). El enunciado moderno de la segunda ley de Newton, presentado en el apartado 12.2, es:

Segunda ley. Si sobre una partícula se ejerce una fuerza exterior, aquélla se acelerará en la dirección y sentido de la fuerza y el módulo de la aceleración será directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa de la partícula.

Matemáticamente, la segunda ley de Newton se expresa en la forma:

$$\mathbf{a} = k\,\frac{\mathbf{F}}{m} \qquad (15\text{-}1)$$

donde

a es la aceleración de la partícula
F es la fuerza que se ejerce sobre la partícula
m es la masa de la partícula
k es una constante de proporcionalidad que depende de las unidades que se hayan tomado para la aceleración, la fuerza y la masa. Un sistema para el cual $k = 1$ tendrá unidades cinéticas coherentes.

Con $k = 1$, la ecuación 15-1 se puede escribir en la forma conocida

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad (15\text{-}2)$$

En la actualidad, en Estados Unidos, los ingenieros utilizan dos sistemas de unidades cinéticas coherentes: el Sistema Internacional de Unidades (unidades SI) y el U.S. customary system. En el SI, las magnitudes fundamentales son la longitud (m), la masa (kg) y el tiempo (s). La unidad de fuerza, llamada newton (N) es, por definición, la fuerza que aplicada a una masa de 1 kg le comunica una aceleración de 1 m/s^2. El sistema SI es un sistema absoluto ya que las tres unidades fundamentales son iguales en cualquier punto (del entorno de la Tierra, la Luna, del espacio, etc.). En el sistema SI, el peso **W** de un cuerpo (fuerza de la gravedad), como cualquier otra fuerza, se expresa en newton. Así pues, según la segunda ley de Newton, el módulo W del peso de un cuerpo de masa m es

$$W = mg \qquad (15\text{-}3)$$

En Estados Unidos sigue utilizándose un sistema cuyas magnitudes fundamentales son la longitud (ft), la fuerza (lb) y el tiempo (s). La unidad de tiempo (el segundo) es la misma que en el sistema SI. La unidad de longitud (el pie) es, por definición, 0,3048 m. La unidad de fuerza (la libra) se define diciendo que es el peso al nivel del mar y a una latitud de 45° de un patrón de platino que tiene una masa de 0,453 592 43 kg. Como la unidad de fuerza depende de la atracción gravitatoria terrestre, el U.S. customary system no es un sistema absoluto. En este sistema, la unidad de masa es el slug. Por definición, una masa de 1 slug adquiere una aceleración de 1 ft/s^2 cuando se le aplica una fuerza de 1 lb. En los problemas de Cinética, en donde intervienen fuerzas, masas y aceleraciones, cuando se dé el peso W de un cuerpo en libras, se podrá obtener la masa m en slug mediante la expresión

$$m = \frac{W}{g} \qquad (15\text{-}4)$$

donde g es la aceleración de la gravedad.

La ecuación 15-2 expresa el hecho de que los módulos de **F** y **a** son proporcionales y que los vectores **F** y **a** tienen la misma dirección y sentido (ya que m es un escalar positivo). La ecuación 15-2 es válida tanto para fuerzas constantes como para fuerzas que varíen con el tiempo (en módulo o dirección).

Cuando se utilice la ecuación 15-2 para resolver problemas de Cinética, las medidas de la aceleración hay que efectuarlas respecto a ejes de referencia fijos en el espacio (que tengan una orientación constante respecto a las estrellas fijas). Un tal sistema de ejes se denomina terna galileana o sistema inercial primario. Cuando un sistema de ejes de referencia sea solidario a la Tierra, la aceleración que en él se mida no será la aceleración absoluta que ha de figurar en la ecuación 15-2, a causa de la rotación de la Tierra en torno a su eje y de su aceleración respecto al Sol al recorrer su órbita. En la mayoría de los problemas técnicos en la superficie terrestre, las correcciones a efectuar para compensar la aceleración de la Tierra respecto al sistema inercial primario son despreciables y las aceleraciones medidas respecto a ejes solidarios a la superficie terrestre se pueden tratar como si fuesen absolutas. Sin embargo, la ecuación 15-2 no será válida cuando **a** represente una aceleración relativa medida respecto a un sistema de ejes móviles sobre la Tierra. Además, habrá que considerar las componentes de la aceleración del movimiento de la Tierra cuando se aborden problemas tales como el vuelo de naves espaciales o las trayectorias de misiles balísticos.

Los valores internacionalmente aceptados de g relativa a la Tierra al nivel del mar y a una latitud de 45° son 9,80665 m/s² y 32,1740 ft/s². En el trabajo rutinario, estos valores suelen redondearse a 9,81 m/s² y 32,2 ft/s². Los valores absolutos internacionalmente aceptados para g al nivel del mar y a una latitud de 45°, que deberán tomarse cuando se utilice un sistema inercial primario son 9,8236 m/s² y 32,2295 ft/s².

15.2.2 Ecuaciones del movimiento de un punto

Cuando sobre un punto material se ejerce un sistema de fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \ldots, \mathbf{F}_n$, su resultante es una fuerza **R** cuya recta soporte pasa por el centro de masa del punto, ya que todo sistema de fuerzas que se ejerzan sobre un punto debe constituir un sistema de fuerzas concurrentes. El movimiento del punto material debido a la acción de la resultante **R** viene regido por la segunda ley de Newton para el movimiento en la forma

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{15-5}$$

Si escribimos la fuerza resultante **R** y la aceleración **a** en función de sus componentes cartesianas rectangulares, la ecuación 15-5 será

$$\Sigma\,(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) = m\,(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \tag{15-6}$$

Expresando esta ecuación vectorial en forma de componentes tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= \Sigma\mathbf{F}_x = m\mathbf{a}_x \\ \mathbf{R}_y &= \Sigma\mathbf{F}_y = m\mathbf{a}_y \\ \mathbf{R}_z &= \Sigma\mathbf{F}_z = m\mathbf{a}_z \end{aligned} \tag{15-7}$$

Análogamente, la ecuación 15-6 se puede escribir en forma escalar:

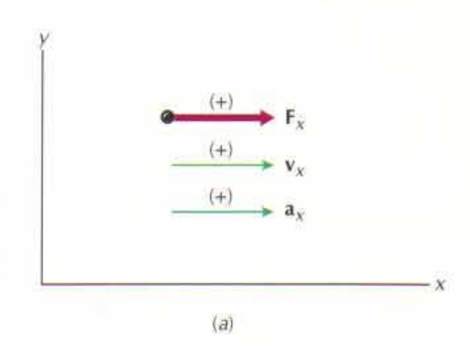
$$\begin{aligned} R_x &= \Sigma F_x = ma_x \\ R_y &= \Sigma F_y = ma_y \\ R_z &= \Sigma F_z = ma_z \end{aligned} \tag{15-8}$$

En muchos problemas de Cinética del punto conviene expresar la aceleración del punto material en función de su posición (x, y, z). En tales casos, combinando las ecuaciones 15-5 y 13-8 tenemos

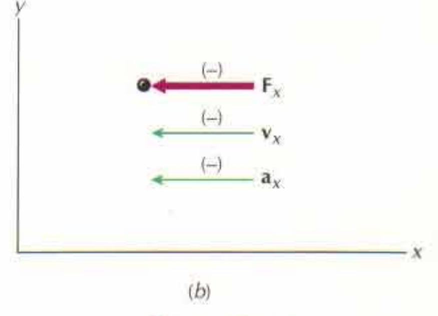
$$\Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) = m(\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k})$$

Las componentes escalares de esta ecuación vectorial son

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} \\ \Sigma F_y &= ma_y = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\ddot{y} \\ \Sigma F_z &= ma_z = m\frac{d^2z}{dt^2} = m\ddot{z} \end{aligned} \qquad (15\text{-}9)$$



(a)



(b)

Figura 15-1

Cuando se utilice alguna de estas ecuaciones del movimiento de un punto en la resolución de un problema, deberá establecerse un convenio de signos. Una vez establecido un sistema de ejes de referencia, un convenio de signos conveniente (v. fig. 15-1) indica las componentes de la fuerza, la velocidad y la aceleración con el mismo signo que el eje de referencia asociado (una componente positiva de la fuerza, la velocidad o la aceleración actúa en el sentido positivo del eje de coordenadas correspondiente). Las componentes desconocidas de la fuerza, la velocidad y la aceleración se suponen positivas y se representan como magnitudes positivas en todo diagrama de movimiento (cinético) que se utilice en la resolución del problema. Al estudiante puede resultarle útil representar los vectores $m\mathbf{a}$ en un diagrama separado próximo al diagrama de sólido libre utilizado para las fuerzas. Si la incógnita se evalúa como magnitud positiva, se verificará el sentido supuesto a aquélla.

15.2.3 Ecuaciones del movimiento de un sistema de puntos

Las ecuaciones del movimiento de un sistema de puntos materiales se pueden obtener aplicando la segunda ley de Newton a cada uno de los puntos pertenecientes al sistema. Por ejemplo, consideremos el conjunto de n partículas representado en la figura 15-2*a*. La partícula *i*-ésima tiene una masa m_i y su situación se especifica respecto a un sistema de ejes de referencia adecuado utilizando el vector de posición $\mathbf{r}_i$ con origen en el del sistema de coordenadas. Cada partícula del sistema (v. Fig. 15-2*b*) puede estar sometida a un sistema de fuerzas exteriores de resultante $\mathbf{R}_i$ y a un sistema de fuerzas interiores $\mathbf{f}_{i1}, \mathbf{f}_{i2}, \ldots, \mathbf{f}_{ij}, \ldots, \mathbf{f}_{in}$. Las fuerzas interiores se deben a las interacciones elásticas entre partículas y a efectos eléctricos o magnéticos. La fuerza interior ejercida por la partícula p_j sobre la partícula p_i se representa por $\mathbf{f}_{ij}$. Aplicando la segunda ley de Newton a la partícula *i*-ésima se tiene

$$\mathbf{R}_i + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_{ij} = m_i\mathbf{a}_i \qquad (15\text{-}10)$$

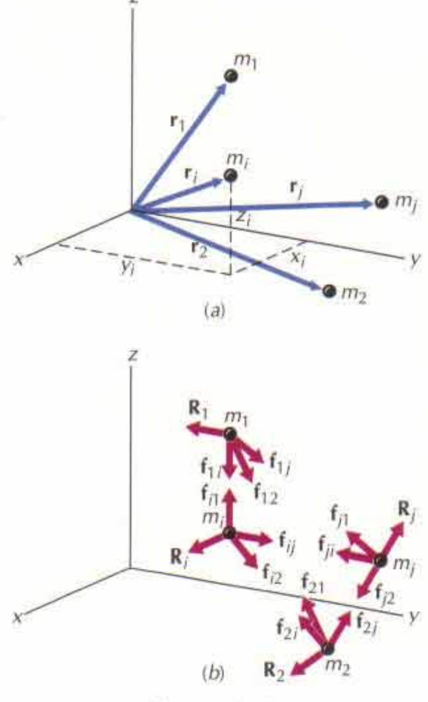


Figura 15-2

En la suma de fuerzas interiores, $\mathbf{f}_{ii}$ es nula porque la partícula p_i no se ejerce fuerza sobre sí misma.

Si una partícula p_j ejerce una fuerza $\mathbf{f}_{ij}$ sobre la partícula p_i, la tercera ley de Newton nos dice que la partícula p_i ejercerá sobre la p_j una fuerza $\mathbf{f}_{ji}$ de igual recta soporte y módulo que $\mathbf{f}_{ij}$ pero de sentido opuesto. Así pues,

$$\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji} = \mathbf{0} \tag{15-11}$$

Sumando las ecuaciones del movimiento correspondientes a las n partículas del sistema se obtiene una ecuación del movimiento para el sistema. Así pues,

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{a}_i \tag{15-12}$$

Como todas las fuerzas internas del sistema son, dos a dos, colineales, opuestas y de igual módulo, su suma será nula y la ecuación 15-12 se reduce a

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{a}_i \tag{15-13}$$

La ecuación 15-13 nos indica que la resultante $\mathbf{R}$ del sistema exterior de fuerzas aplicadas que se ejercen sobre el sistema de partículas es igual a la resultante de los vectores inercia $m\mathbf{a}$ de las partículas del sistema. A la cantidad $m\mathbf{a}$ se le llama, a veces, fuerza de inercia; ahora bien, como no es ni una fuerza de contacto ni una fuerza gravitatoria (peso), muchos evitan utilizar la palabra fuerza para designar al vector inercia $m\mathbf{a}$.

Si consideramos el centro de masa del sistema de puntos materiales, podemos escribir la ecuación 15-13 de otra forma. El centro de masa del sistema es el punto G definido por el vector de posición $\mathbf{r}_G$ que satisface la relación

$$m\mathbf{r}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i \tag{15-14}$$

donde

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

es la masa total del sistema de puntos materiales. Derivando respecto al tiempo la ecuación 15-14, tenemos

$$m\dot{\mathbf{r}}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\mathbf{r}}_i$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\mathbf{r}}_i$$

que podemos escribir

$$m\mathbf{a}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{a}_i \tag{15-15}$$

Combinando las ecuaciones 15-13 y 15-15, tenemos

$$\mathbf{R} = m\mathbf{a}_G \tag{15-16}$$

Las componentes de esta ecuación vectorial nos dan

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F}_x &= \mathbf{R}_x = m\mathbf{a}_{Gx} \\ \Sigma \mathbf{F}_y &= \mathbf{R}_y = m\mathbf{a}_{Gy} \\ \Sigma \mathbf{F}_z &= \mathbf{R}_z = m\mathbf{a}_{Gz} \end{aligned} \qquad (15\text{-}17)$$

Las ecuaciones 15-16 y 15-17 constituyen expresiones matemáticas del "principio del movimiento del centro de masa" de un sistema de puntos materiales. Las ecuaciones 15-17 para un sistema de puntos materiales son formalmente iguales a la ecuación 15-7 para un punto material único. Esta correspondencia nos indica que un sistema de puntos materiales se puede tratar como un punto material único, situado en el centro de masa G, supuesta concentrada en él toda la masa del sistema, si se supone que se aplica una fuerza igual a la resultante **R** soportada por una recta que pase por G. De hecho, todo cuerpo puede ser considerado como punto material al aplicar la ecuación 15-17. Sin embargo, en general, la recta soporte de la fuerza resultante **R** no pasará por el centro de masa del sistema y la resultante consistirá en una fuerza resultante **R** que pase por el centro de masa G y un par de momento resultante **C**. El movimiento de rotación debido a **C** se estudiará en el capítulo siguiente que trata de la Cinética del cuerpo rígido.

15.3 MOVIMIENTO RECTILÍNEO

En el apartado 13.3 se describió la Cinemática del punto material animado de movimiento rectilíneo. En tal caso, la trayectoria es una recta y si se orienta el sistema de coordenadas de manera que el eje x coincida con ella, la posición, velocidad y aceleración del punto serán descritas por completo por sus componentes x. Así,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} \\ \mathbf{a} &= \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} \end{aligned} \qquad (15\text{-}18)$$

En el caso del movimiento rectilíneo a lo largo del eje x, las ecuaciones 15-7 para el punto material se reducen a

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F}_x &= m\mathbf{a}_x \\ \Sigma \mathbf{F}_y &= 0 \\ \Sigma \mathbf{F}_z &= 0 \end{aligned} \qquad (15\text{-}19)$$

En este tipo de movimiento, podemos prescindir de la notación vectorial y utilizar el signo de una magnitud para indicar si el sentido de una magnitud vectorial es el del semieje positivo o el del negativo del eje x. Existen cuatro tipos de problema referentes al movimiento rectilíneo.

Primer caso. F = constante. En los problemas de movimiento rectilíneo en los que la fuerza sea constante, la segunda ley de Newton da

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} \qquad (a)$$

Integrando dos veces respecto al tiempo t se tiene

$$\dot{x} = \frac{F}{m} t + C_1$$
$$x = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + C_1 t + C_2$$

Las dos constantes C_1 y C_2 se pueden determinar a partir de las condiciones iniciales del problema en cuestión.

Segundo caso. F = función del tiempo. En los problemas de movimiento rectilíneo en los que la fuerza varíe con el tiempo, la aplicación de la segunda ley de Newton da

$$\ddot{x} = \frac{F(t)}{m} \qquad (b)$$

Cuando se conoce la función $F(t)$, se puede integrar dos veces respecto al tiempo la ecuación *b* para obtener las expresiones de la velocidad $\dot{x}$ y de la posición x. En dichas expresiones, aparecerán dos constantes de integración C_1 y C_2 que se podrán evaluar a partir de las condiciones iniciales del problema en cuestión.

Tercer caso. F = función de la posición. En los problemas de movimiento rectilíneo en los que la fuerza varíe en función de la posición, la aplicación de la segunda ley de Newton da

$$\ddot{x} = \frac{F(t)}{m} \qquad (c)$$

A la ecuación *c* le podemos dar una forma más útil si observamos que

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt}\frac{dx}{dt} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} \qquad (d)$$

con lo que la ecuación *c* podrá expresarse así:

$$\dot{x}\, d\dot{x} = \frac{F(x)}{m}\, dx \qquad (e)$$

Cuando se conozca la función $F(x)$, se podrá integrar la ecuación *e* para obtener $\dot{x}$ en función de x. Además, como $\dot{x} = dx/dt$, podemos volver a integrar la expresión obtenida en la primera integración para obtener una relación entre la posición x y el tiempo t. Las constantes resultantes de las integraciones se pueden evaluar a partir de las condiciones iniciales del problema en cuestión.

Cuarto caso. F = función de la velocidad. En los problemas de movimiento rectilíneo en los que la fuerza varíe en función de la velocidad, la aplicación de la segunda ley de Newton dará

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{F(\dot{x})}{m} \qquad (f)$$

o bien

$$\ddot{x} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{F(\dot{x})}{m} \qquad (g)$$

Cuando se busque una relación entre la velocidad y el tiempo, la ecuación *f* da

$$dt = \frac{m\, d\dot{x}}{F(\dot{x})}$$

Cuando se busque una relación entre la velocidad y la posición, la ecuación *g* da

$$dx = \frac{m\dot{x}\, d\dot{x}}{F(\dot{x})}$$

En uno y otro caso, las constantes resultantes de las integraciones se evalúan utilizando las condiciones iniciales del problema en cuestión.

Los ejemplos siguientes ilustran el procedimiento para resolver los problemas referentes al movimiento rectilíneo de un punto material.

PROBLEMA EJEMPLO 15.1

Un bloque de 45 kg descansa sobre una superficie horizontal, según se indica en la figura 15-3*a*. Determinar el desplazamiento, la velocidad y la aceleración del bloque 3 s después de aplicarle la fuerza **F** de 250 N, si la superficie horizontal es lisa.

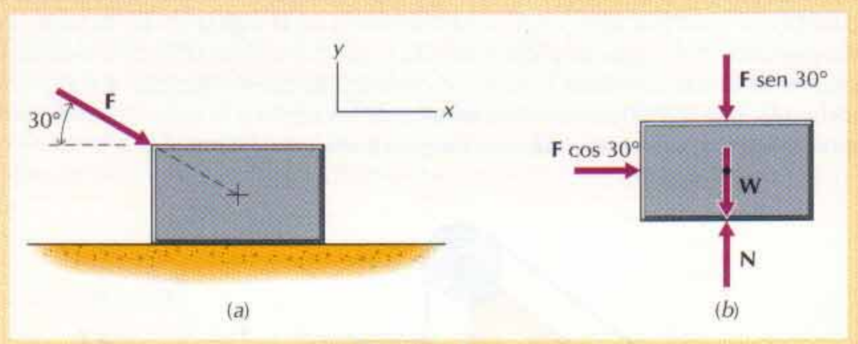


Figura 15-3

SOLUCIÓN

En la figura 15-3*b* puede verse un diagrama de sólido libre del bloque apoyado sobre una superficie lisa. La fuerza **F** está representada por sus componentes rectangulares. Las ecuaciones escalares del movimiento del bloque (ecs. 15-19) son

$$\Sigma F_x = ma_x = m\,\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \Sigma F_y = 0$$

Así pues,

$$\Sigma F_y = N - W - F \text{ sen } 30° = 0$$
$$N = W + F \text{ sen } 30° = 45(9{,}81) + 250 \text{ sen } 30° = 566{,}5 \text{ N}$$
$$\Sigma F_x = F \cos 30° = 250 \cos 30° = 216{,}5 = ma_x$$

Como la suma de las fuerzas es constante, también lo será la aceleración a_x. Así pues,

$$a_x = \frac{216{,}5}{m} = \frac{216{,}5}{45} = 4{,}81 \text{ m/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

Integrando la aceleración constante $a_x = dv_x/dt = 4{,}81 \text{ m/s}^2$, se tiene

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 4{,}81t + C_1$$

Como en $t = 0$, $v_x = 0$ (no hay velocidad inicial), $C_1 = 0$. Así pues, en $t = 3$ s,

$$v_x = 4{,}81t = 4{,}81(3) = 14{,}43 \text{ m/s} \qquad \text{Resp.}$$

Integrando la velocidad $v_x = dx/dt = 4{,}81t$ se tiene entonces

$$x = \frac{1}{2}\, 4{,}81t^2 + C_2$$

Como en $t = 0$ es $x = 0$ (no hay desplazamiento inicial), $C_2 = 0$. En $t = 3$ s,

$$x = \frac{1}{2}\, 4{,}81t^2 = \frac{1}{2}\, 4{,}81(3)^2 = 21{,}6 \text{ m} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 15.2

Dos cuerpos A y B de masas $m_A = 50$ kg y $m_B = 60$ kg están unidos mediante una cuerda que pasa por una polea, según se indica en la figura 15-4*a*. Se suponen despreciables las masas de polea y cuerda y que la longitud de ésta se mantiene constante. El coeficiente de rozamiento cinético μ_k entre el bloque A y el plano inclinado vale 0,25. Determinar la tensión de la cuerda y la aceleración del bloque A cuando se hayan soltado los bloques partiendo del reposo.

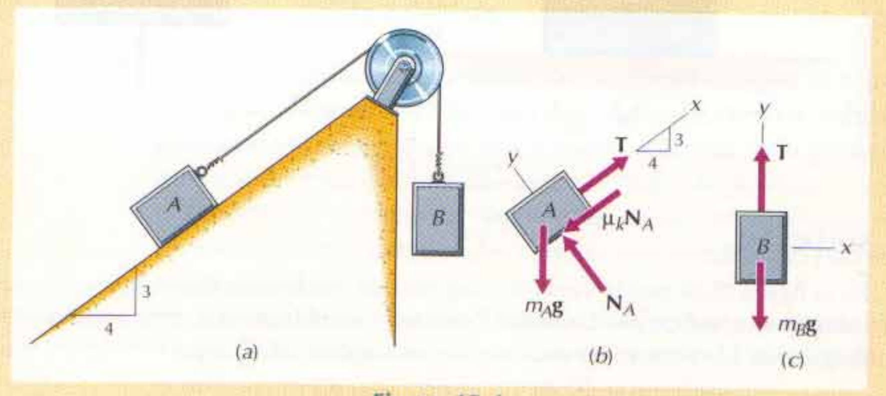


Figura 15-4

SOLUCIÓN

En las figuras 15-4*b* y 15-4*c* se han representado diagramas de sólido libre para los bloques A y B, respectivamente. Aplicando al bloque A las ecuaciones escalares del movimiento (ecs. 15-19) se tiene

$$\Sigma F_y = 0 \qquad N_A - \tfrac{4}{5}m_A g = 0$$

$$N_A = \tfrac{4}{5}(50)(9{,}81) = 392{,}4 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = m_A a_{Ax} \qquad T - \mu_k N_A - \tfrac{3}{5}m_A g = m_A a_{Ax}$$

$$T - (0{,}25)(392{,}4) - \tfrac{3}{5}(50)(9{,}81) = 50a_{Ax}$$

$$T - 392{,}4 = 50a_{Ax} \qquad (a)$$

Como la longitud de la cuerda es constante, $a_{By} = -a_{Ax}$. Aplicando las ecuaciones 15-19 al bloque B, se tiene

$$\Sigma F_y = m_B a_{By} = -m_B a_{Ax} \qquad T - m_B g = -m_B a_{Ax}$$

$$T - 60(9{,}81) = -60a_{Ax} \qquad (b)$$

$$T - 588{,}6 = -60a_{Ax}$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones a y b se tiene

$$a_{Ax} = 1{,}784 \text{ m/s}^2 \qquad T = 482 \text{ N} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 15.3

Los dos bloques representados en la figura 15-5*a* están en reposo sobre una superficie horizontal cuando se aplica una fuerza **F** al bloque *B*. Los pesos de los bloques *A* y *B* son, respectivamente, 225 N y 375 N. El coeficiente de rozamiento estático μ_s entre los bloques es 0,25 y el coeficiente de rozamiento cinético μ_k entre la superficie horizontal y el bloque *B* vale 0,20. Determinar la máxima fuerza **F** que puede aplicarse al bloque *B* antes de que los bloques dejen de moverse juntos.

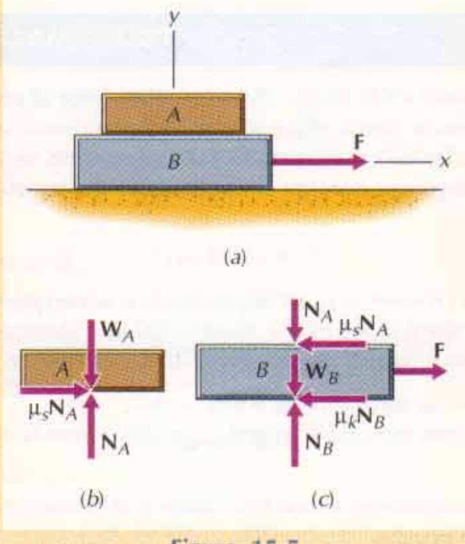


Figura 15-5

SOLUCIÓN

En las figuras 15-5*b* y 15-5*c* pueden verse diagramas de sólido libre de los bloques *A* y *B*, respectivamente. Aplicando las ecuaciones escalares del movimiento (ecs. 15-19) al bloque *A* se tiene

$$\Sigma F_y = 0 \qquad N_A - W_A = 0$$
$$N_A = W_A = 225 \text{ N}$$
$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \mu_s N_A = m_A a_x$$
$$0{,}25(225) = \frac{225}{9{,}81} a_x$$

Como $\mu_s N_A$ es la máxima fuerza de rozamiento que puede desarrollarse en la superficie de contacto entre los bloques *A* y *B*,

$$a_x(\text{máx}) = \frac{9{,}81}{225}(0{,}25)(225) = 2{,}45 \text{ m/s}^2$$

Aplicando las ecuaciones 15-19 al bloque *B* se tiene

$$\Sigma F_y = 0 \qquad N_B - N_A - W_B = 0$$
$$N_B = N_A + W_B$$
$$= 225 + 375 = 600 \text{ N}$$
$$\Sigma F_x = ma_x \qquad F - \mu_s N_A - \mu_k N_B = m_B a_x$$
$$F = m_B a_x + \mu_s N_A + \mu_k N_B$$
$$= \frac{375}{9{,}81}(2{,}45) + 0{,}25(225) + 0{,}20(600)$$
$$= 270 \text{ N} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 15.4

El trineo representado en la figura 15-6*a* se utiliza para el ensayo de pequeños cohetes propulsores de combustible sólido. La masa combinada de trineo y cohete es de 1000 kg. De las características del combustible, se sabe que el empuje que proporciona el cohete durante el movimiento del trineo puede expresarse en la forma

$$F = a + bt - ct^2$$

donde *F* se expresa en newton y *t* en segundos. Si el trineo parte del reposo cuando el empuje del cohete es de 10 kN, recorre 700 m y alcanza una velocidad de 150 m / s durante un recorrido de prueba de 10 s, determinar

a. Los valores de las constantes *a*, *b* y *c*.
b. Las aceleraciones máxima y mínima que experimenta el trineo durante el ensayo.

Despreciar la fricción entre el trineo y los raíles y la reducción de masa del combustible durante la prueba

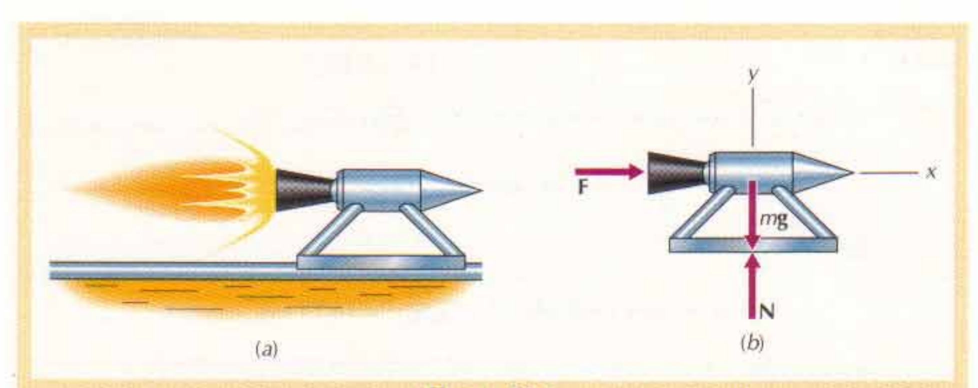


Figura 15-6

SOLUCIÓN

En la figura 15-6*b* puede verse el diagrama de sólido libre del cohete con el trineo y el sistema de referencia que se utilizará en el análisis. Aplicando la ecuación escalar del movimiento (ec. 15-19) en la dirección x se tiene

$$\Sigma F_x = ma_x = m\ddot{x} \qquad a + bt - ct^2 = m\ddot{x}$$

a. Como la fuerza se expresa en función del tiempo, la velocidad y el desplazamiento del trineo se obtendrán sin más que integrar la ecuación del movimiento en la dirección x. Así pues,

$$m\dot{x} = at + \frac{1}{2}bt^2 - \frac{1}{3}ct^3 + C_1$$

$$mx = \frac{1}{2}at^2 + \frac{1}{6}bt^3 - \frac{1}{12}ct^4 + C_1 t + C_2$$

De las condiciones iniciales:

$$\dot{x} = 0 \text{ en } t = 0 \qquad C_1 = 0$$

$$x = 0 \text{ en } t = 0 \qquad C_2 = 0$$

$$F = 10(10^3)\text{ N en } t = 0 \qquad a = 10(10^3)\text{ N} \qquad \text{Resp.}$$

De las condiciones finales del ensayo:

$$\dot{x} = 150 \text{ m/s en } t = 10 \text{ s} \qquad 1000(150) = 10(10^3)(10) + \frac{1}{2}\,b(10)^2 - \frac{1}{3}\,c(10)^3$$

que simplificando da

$$15b - 100c = 15\,000 \qquad (a)$$

$$x = 700 \text{ m en } t = 10 \text{ s} \qquad 1000(700) = \frac{1}{2}(10)(10^3)(10)^2 + \frac{1}{6}\,b(10)^3 - \frac{1}{12}\,c(10)^4$$

que simplificando da

$$b - 5c = 1200 \qquad (b)$$

Resolviendo el sistema constituido por las ecuaciones a y b se tiene

$$b = 1800 \text{ N/s} \qquad \text{Resp.}$$

$$c = 120 \text{ N/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

Por tanto

$$F = 10\,000 + 1800t - 120t^2$$

b.

$$a_x = \frac{F}{m} = 10 + 1{,}8t - 0{,}12t^2$$

Para que la aceleración sea máxima o mínima

$$\frac{da_x}{dt} = 1{,}8 - 0{,}24t = 0 \qquad t = 7{,}50 \text{ s}$$

En $t = 7{,}50$ s

$$a_x = 10 + 1{,}8(7{,}50) - 0{,}12(7{,}50)^2 = 16{,}75 \text{ m/s}^2$$

En $t = 0$ s

$$a_x = 10{,}0 \text{ m/s}^2$$

En $t = 10$ s

$$a_x = 16{,}0 \text{ m/s}^2$$

Por tanto, en $t = 7{,}50$ s

$$a_x = a_{\max} = 16{,}75 \text{ m/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

En $t = 0$ s

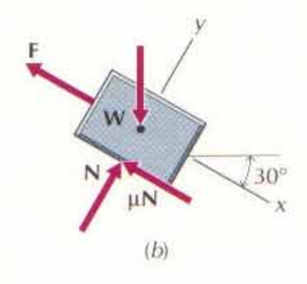
$$a_x = a_{\min} = 1000 \text{ m/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 15.5

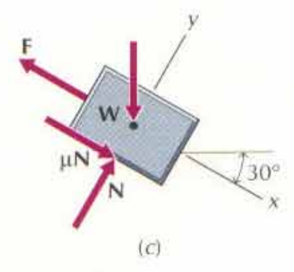
El rozamiento ($\mu = 0{,}10$) y un resorte lineal ($k = 365$ N / m) oponen resistencia al movimiento del bloque A ($W = 3580$ N). Si se suelta el bloque partiendo del reposo con el resorte indeformado, determinar, durante la primera fase del movimiento hacia abajo del plano inclinado,

a. El desplazamiento máximo del bloque a partir de su posición de reposo.
b. La velocidad del bloque cuando se halle a 4,5 m de su posición de reposo.
c. El tiempo que emplea el bloque en llegar a 4,5 m de su posición de reposo.
d. La aceleración del bloque cuando comience a subir por el plano inclinado.

(a)



(b)



(c)

Figura 15-7

SOLUCIÓN

En la figura 15-7*b* puede verse el diagrama de sólido libre del bloque en la primera fase de su movimiento (hacia abajo del plano inclinado). Las ecuaciones escalares del movimiento del bloque (ecs. 15-19) son

$$+\nearrow \ \Sigma F_y = 0 \qquad N - W\cos 30° = 0$$

$$N = 3580 \cos(30°) = 3100 \text{ N}$$

$$+\searrow \ \Sigma F_x = m\ddot{x} \qquad W \text{ sen } 30° - \mu N - F = m\ddot{x}$$

$$3580 \text{ sen } 30° - 0{,}10(3100) - 365x = \frac{3580}{9{,}81}\ddot{x}$$

que simplificando da

$$\ddot{x} = 4{,}06 - x$$

Ahora bien,

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\dot{x} = \frac{d}{dx}\dot{x}\frac{dx}{dt} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}$$

Por tanto

$$\dot{x}\ d\dot{x} = (4{,}06 - x)\ dx$$

Integrando los dos miembros se tiene

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = 4{,}06x - \frac{1}{2}x^2 + C_1$$

De la condición inicial $\dot{x} = 0$ en $x = 0$, resulta $C_1 = 0$. Así pues,

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = [8{,}12x - x^2]^{1/2}$$

a. El desplazamiento máximo tiene lugar cuando $\dot{x} = 0$. Luego

$$x(8{,}12 - x) = 0 \qquad x_{max} = 8{,}12 \text{ m} \searrow$$ Resp.

b. Cuando el desplazamiento del bloque sea igual a 4,5 m,

$$\dot{x} = [8{,}12(4{,}5) - (4{,}5)^2]^{1/2} = 4{,}04 \text{ m/s} \searrow$$ Resp.

c. El tiempo se obtiene integrando la expresión

$$dt = \frac{dx}{[8{,}12x - x^2]^{1/2}}$$

cuya solución es

$$t = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - 4{,}06}{4{,}06}\right) + C_2$$

De la condición inicial $x = 0$ en $t = 0$, resulta $C_2 = \pi/2$. Luego,

$$t = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - 4{,}06}{4{,}06}\right) + \frac{\pi}{2}$$
$$= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{4{,}5 - 4{,}06}{4{,}06}\right) + \frac{\pi}{2} = 1{,}679 \text{ s}$$ Resp.

d. En la figura 15-7*c* puede verse el diagrama de sólido libre del bloque para la segunda fase del movimiento (ascendiendo el plano inclinado). La ecuación del movimiento al principio de esta fase da

$$\Sigma F_x = m\ddot{x} \qquad W \operatorname{sen} 30° + \mu N - F = m\ddot{x}$$

$$3580 \operatorname{sen} 30° + 0{,}10(3100) - 365(8{,}12) = \frac{3580}{9{,}81}\ddot{x}$$

De donde

$$\ddot{x} = a_x = -2{,}37 = 2{,}37 \text{ m/s}^2 \nwarrow$$ Resp.

PROBLEMA EJEMPLO 15.6

Un punto material cae bajo la acción de la gravedad, a través de un medio que le ejerce una fuerza resistente proporcional a su velocidad. Desarrollar ecuaciones para la velocidad y el desplazamiento de la partícula. La velocidad y el desplazamiento valen cero en el instante $t = 0$.

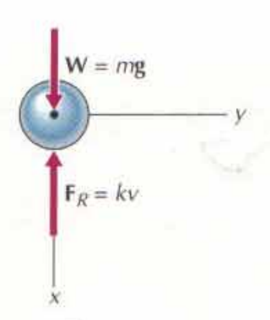


Figura 15-8

SOLUCIÓN

En la figura 15-8 pueden verse el diagrama de sólido libre del punto y el sistema de referencia que se va a utilizar. Aplicando al punto la ecuación escalar del movimiento (ec. 15-19) en la dirección x, se tiene

$$\Sigma F_x = ma_x$$
$$W - F_R = mg - kv = m\,\frac{dv}{dt}$$

Separando las variables (v y t) e integrando, se tiene

$$\ln(mg - kv) = -\,\frac{k}{m}t + C_1$$

Como $v = 0$ cuando $t = 0$,

$$C_1 = \ln(mg)$$
$$\ln(mg - kv) = -\frac{k}{m}t + \ln(mg)$$
$$\frac{mg - kv}{mg} = e^{(-kt/m)} \qquad \text{o sea} \qquad mg - kv = mge^{-kt/m}$$
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m}) \qquad \text{Resp.}$$

Integrando, se tiene

$$x = \frac{mg}{k} + \frac{m^2g}{k^2}e^{-kt/m} + C_2$$

Como $x = 0$ cuando $t = 0$,

$$C_2 = -\,\frac{m^2g}{k^2}$$

Por tanto

$$x = \frac{m^2g}{k^2}(e^{-kt/m} - 1) + \frac{mg}{k}\,t \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

En los problemas siguientes, todas las cuerdas, hilos y cables se suponen flexibles, inextensibles y de masa despreciable. Los pasadores y poleas son de masa despreciable y exentos de rozamientos.

15-1* Una caja de masa 100 kg descansa sobre el suelo de un montacargas (fig. P15-1). Determinar la fuerza que la caja ejerce sobre dicho suelo si el montacargas

a. Arranca hacia arriba con una acleración de 3 m/s^2.
b. Arranca hacia abajo con una aceleración de 2 m/s^2.

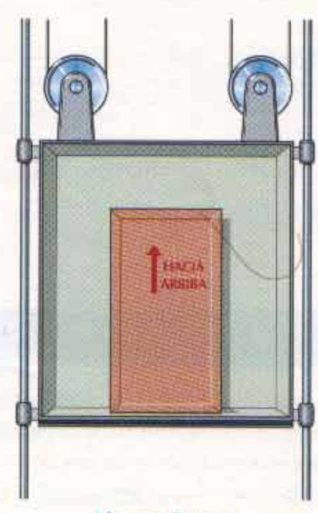


Figura P15-1

15-2* Determinar la fuerza constante **F** que se necesita para acelerar un automóvil (m = 1000 kg), por una carretera llana, desde el reposo hasta 20 m/s en 10 s (v. fig. P15-2).

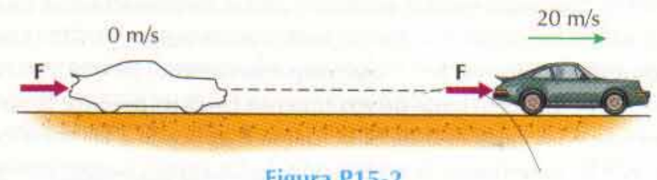


Figura P15-2

15-3* Sobre una superficie plana y horizontal se apoya un bloque que pesa 1000 N, según se indica en la figura P15-3. Determinar:

a. El módulo de la fuerza **F** que produciría una aceleración de $1{,}5 \text{ m/s}^2$ si la superficie fuese lisa.
b. La aceleración que originaría una fuerza **F** de 500 N si el coeficiente de rozamiento cinético μ_k entre bloque y suelo valiese 0,25.

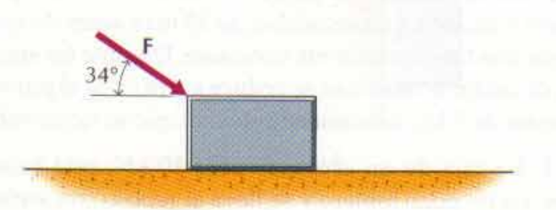


Figura P15-3

15-4* Un bloque de hielo cuya masa es de 15 kg se desliza 20 m sobre una superficie horizontal antes de pararse (fig. P15-4). Si su velocidad inicial era de 15 m/s, determinar

a. La fuerza de rozamiento entre bloque y superficie.
b. El coeficiente de rozamiento cinético μ_k.

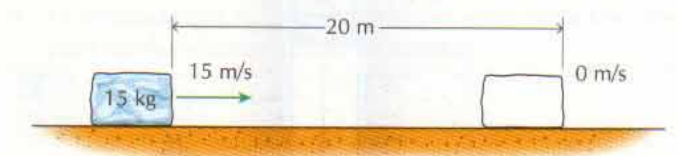


Figura P15-4

15-5 Cuando un equipo de televisión se coloca sobre una báscula de resortes situada en el suelo de un ascensor, la báscula indica 250 N cuando el ascensor está en reposo. Determinar

a. La aceleración del ascensor cuando la báscula señale un peso de 200 N.
b. El peso que señala la báscula cuando la aceleración es de 3 m/s^2 hacia arriba.

15-6 Un automóvil de masa 1500 kg se mueve por una carretera horizontal con una celeridad constante de 60 km/h (fig. P15-6). El automóvil toma ahora una aceleración constante y alcanza una velocidad de 80 km/h en 5 s. Determinar

a. La fuerza necesaria para lograr esta aceleración.
b. La distancia recorrida por el automóvil durante los 5 s que dura la aceleración.

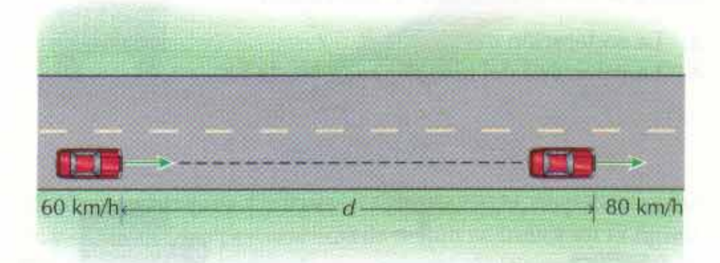


Figura P15-6

15-7* Se aplica una fuerza de 100 N a un bloque cuyo peso es de 125 N, según se indica en la figura P15-7. Sean $x = 0$ y $v = 0$ cuando $t = 0$ y determínese la velocidad y el desplazamiento del bloque en $t = 5$ s si

a. El plano inclinado que soporta al bloque fuese liso.
b. El coeficiente de rozamiento cinético μ_k entre plano y bloque valiese 0,25.

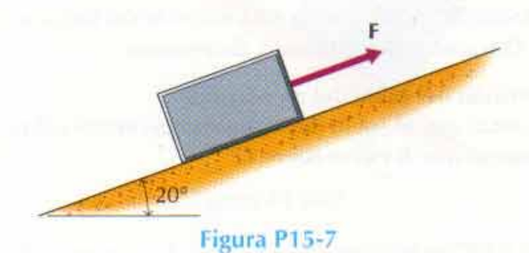


Figura P15-7

15-8* Se empuja un bloque de masa 20 kg hacia arriba por un plano inclinado con una fuerza horizontal **F** de 200 N, según se indica en la figura P15-8. El coeficiente de rozamiento cinético μ_k entre plano inclinado y bloque vale 0,10. Si $v = 0$ y $x = 0$ cuando $t = 0$, determinar

a. La aceleración del bloque.
b. El tiempo que tarda el bloque en recorrer 15 m.
c. La velocidad del bloque cuando haya recorrido 10 m.

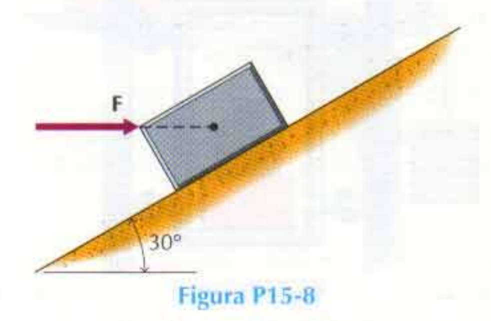


Figura P15-8

15-9 Los bloques A y B pesan, respectivamente, 150 N y 300 N y están conectados mediante una cuerda, según se indica en la figura P15-9. Los coeficientes de rozamiento cinético son 0,20 para el bloque A y 0,15 para el bloque B. Si la fuerza **F** aplicada a la cuerda es de 200 N, determinar

a. La aceleración del bloque B.
b. La velocidad del bloque A al cabo de 5 s.

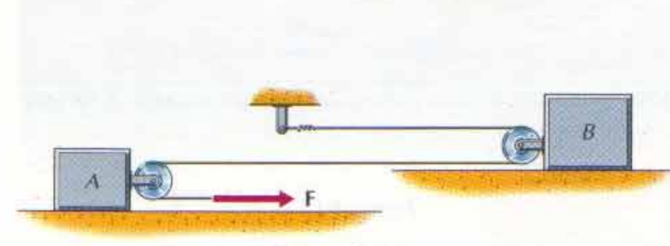


Figura P15-9

15-10 Un montacargas contiene tres bultos, según se indica en la figura P15-10. La masa de la caja del montacargas es de 750 kg y las masas de los bultos A, B y C son, respectivamente, 300 kg, 200 kg y 100 kg. Durante un corto intervalo de tiempo el montacargas experimenta una aceleración hacia arriba de 8 m/s^2. Durante dicho intervalo, determinar

a. La tensión del cable del montacargas.
b. La fuerza que el suelo del montacargas ejerce sobre A.
c. La fuerza que B ejerce sobre C.

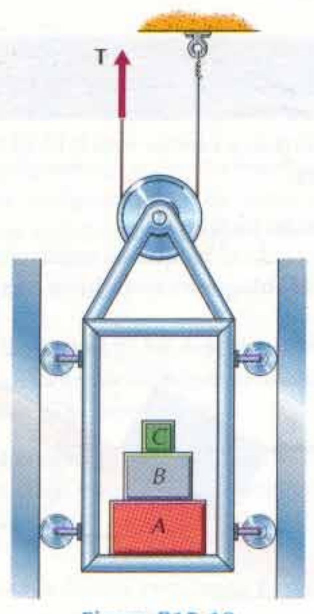


Figura P15-10

15-11* Tres cajas unidas mediante cables descansan sobre una superficie horizontal según se indica en la figura P15-11. Los pesos de las cajas A, B y C son, respectivamente, 1000 N, 750 N y 1500 N. El coeficiente de rozamiento cinético μ_k entre la superficie y las cajas es 0,20. Si la fuerza **F** aplicada a las cajas es de 875 N, determinar la aceleración de las cajas y las tensiones de los cables que las unen.

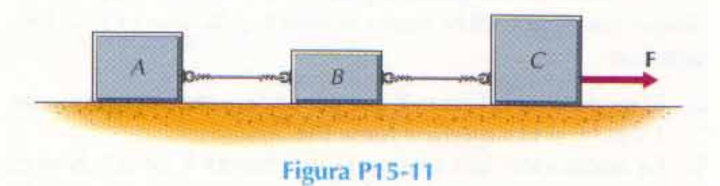


Figura P15-11

15-12* Se ha soltado un punto material desde una posición elevada y alcanza una velocidad de 10 m/s antes de que se le aplique una fuerza resistente constante. Durante los siguientes 10 m de caída, la celeridad se reduce a 5 m/s. Si el punto tiene una masa de 5 kg, determinar la fuerza que se ejerce sobre él.

15-13 La caja de un ascensor pesa 10 kN, está bajando a 7,5 m/s a un pozo minero y se lleva al reposo con aceleración constante en una distancia de 15 m (fig. P15-13). Determinar la aceleración y la tensión del cable mientras la caja disminuye su velocidad.

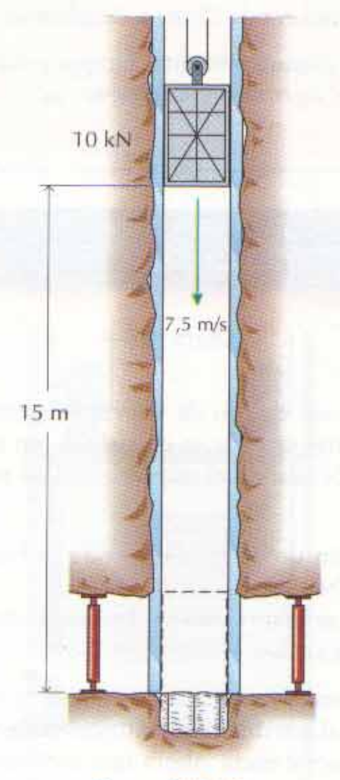


Figura P15-13

15-14 Dos cuerpos, A ($m_A = 50$ kg) y B ($m_B = 25$ kg) están unidos mediante un cable según se indica en la figura P15-14. Cinco segundos después de soltar los cuerpos partiendo del reposo, el cuerpo B lleva una velocidad de 10 m/s hacia abajo. Determinar

a. La aceleración del cuerpo A.
b. La tensión del cable.
c. El coeficiente de rozamiento cinético μ_k para el cuerpo A.

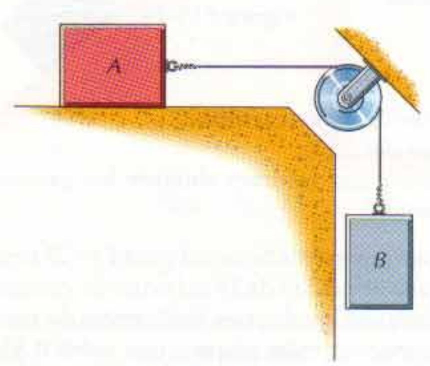


Figura P15-14

15-15* El plano inclinado de la figura P15-15 tiene una longitud de 6 m y se utiliza para bajar cajas de la calle al sótano de un almacén. El coeficiente de rozamiento cinético μ_k entre caja y plano vale 0,25. El coeficiente de rozamiento cinético μ_k entre caja y suelo del sótano vale 0,40. Si a una caja que pesa 150 N se le da una velocidad inicial de 3 m/s en lo alto del plano inclinado, determinar

a. La velocidad de la caja cuando abandone el plano inclinado.
b. La distancia que recorre la caja por el suelo del sótano después de abandonar el plano inclinado.

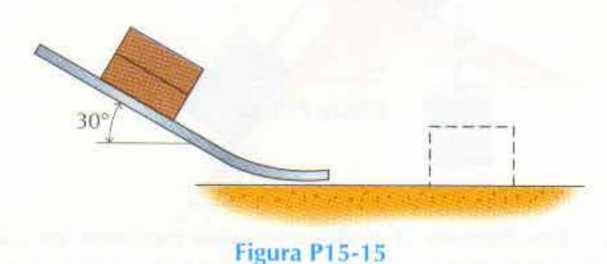


Figura P15-15

15-16* El carrito representado en la figura P15-16 tiene una masa de 200 kg y se mueve hacia la derecha con una velocidad de 5 m/s. Determinar

a. La aceleración del carrito en su subida por el plano inclinado.
b. La distancia d que ascenderá por el plano inclinado hasta llegar a detenerse.

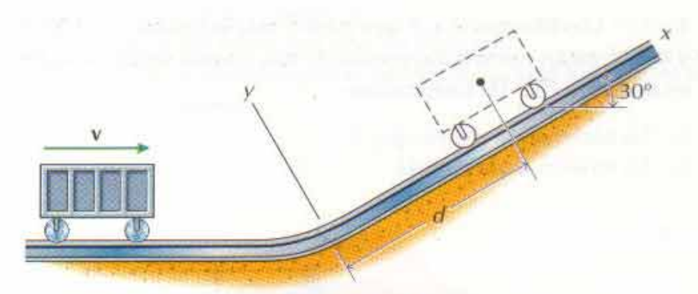


Figura P15-16

15-17 Los bloques A y B pesan 150 N y 250 N, respectivamente, y están unidos por una cuerda según se indica en la figura P15-17. Los coeficientes de rozamiento cinético μ_k valen 0,35 para el bloque A y 0,15 para el bloque B. Durante el descenso de los bloques por el plano inclinado, determinar

a. La aceleración del bloque B.
b. La tensión de la cuerda.

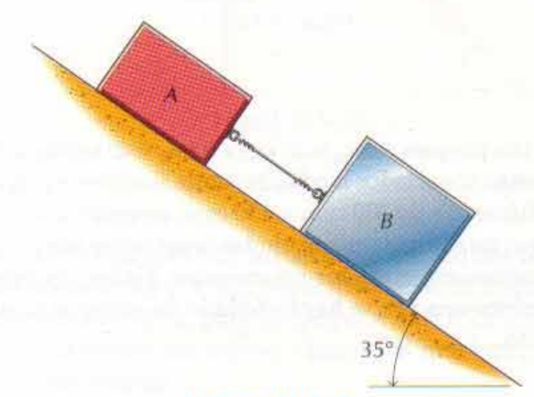


Figura P15-17

15-18 Dos cuerpos A y B, cuyas masas valen 25 kg y 30 kg, respectivamente, están dispuestos según se indica en la figura P15-18. Durante el movimiento de los cuerpos, determinar la aceleración del cuerpo A y la tensión del cable que los une si

a. La superficie horizontal es lisa.
b. El coeficiente de rozamiento cinético μ_k del cuerpo B vale 0,20.

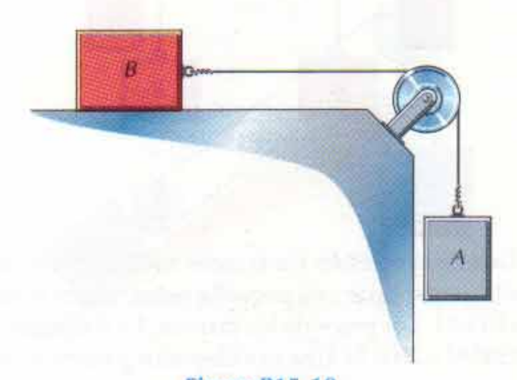


Figura P15-18

15-19* Los bloques A y B que pesan, respectivamente, 1000 N y 400 N, están conectados mediante una cuerda según se indica en la figura P15-19. Determinar

a. La aceleración del bloque B.
b. La tensión de la cuerda.

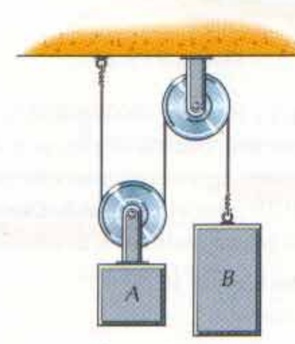


Figura P15-19

15-20* Los bloques A ($m_A = 25$ kg) y B ($m_B = 40$ kg) de la figura P15-20 están conectados mediante cables flexibles a poleas que tienen diámetros de 300 mm y 150 mm, respectivamente. Las dos poleas están rígidamente unidas una a otra y sus pesos son despreciables, así como los rozamientos. Hallar las tensiones de los cables una vez se hayan soltado los cuerpos partiendo del reposo.

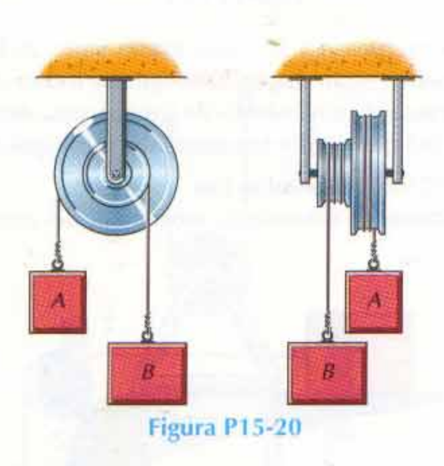


Figura P15-20

15-21 Dos carritos están conectados mediante un cable que pasa por la garganta de una pequeña polea, según se indica en la figura P15-21. Los pesos de los carritos A y B son, respectivamente, 2500 N y 2000 N. Una vez liberados partiendo del reposo, determinar

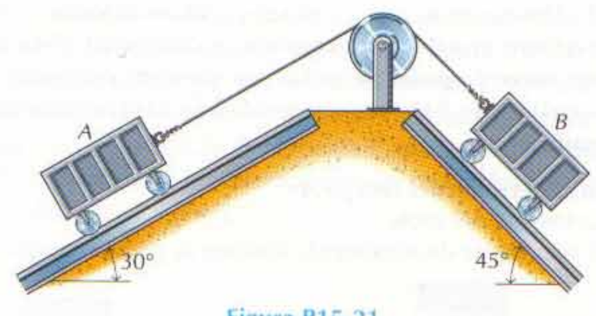


Figura P15-21

a. La aceleración de los carritos.
b. La tensión del cable
c. La distancia que recorren durante los primeros 10 s de movimiento.

15-22 La caja representada en la figura P15-22 tiene una masa de 100 kg y una velocidad de 15 m / s cuando comienza a ascender por el plano inclinado. Los coeficientes de rozamiento estático μ_s y cinético μ_k entre plano y caja valen 0,30 y 0,25, respectivamente. Determinar

a. La aceleración de la caja cuando asciende por el plano inclinado.
b. La distancia recorrida por la caja antes de pararse.
c. La velocidad de la caja cuando, a su regreso, llega al punto más bajo del plano inclinado.

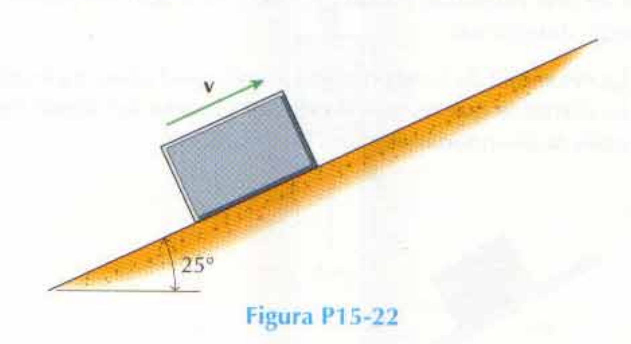


Figura P15-22

15-23* Dos bloques A y B, conectados mediante un cable flexible, se sueltan partiendo del reposo en las posiciones representadas en la figura P15-23. El coeficiente de rozamiento cinético μ_k entre el bloque A y el plano inclinado vale 0,15. El bloque B choca con la superficie horizontal 3 s después de soltarlo. Si el bloque A pesa 250 N, determinar

a. La aceleración del cuerpo B.
b. El peso del cuerpo B.
c. La tensión del cable mientras los bloques están en movimiento.

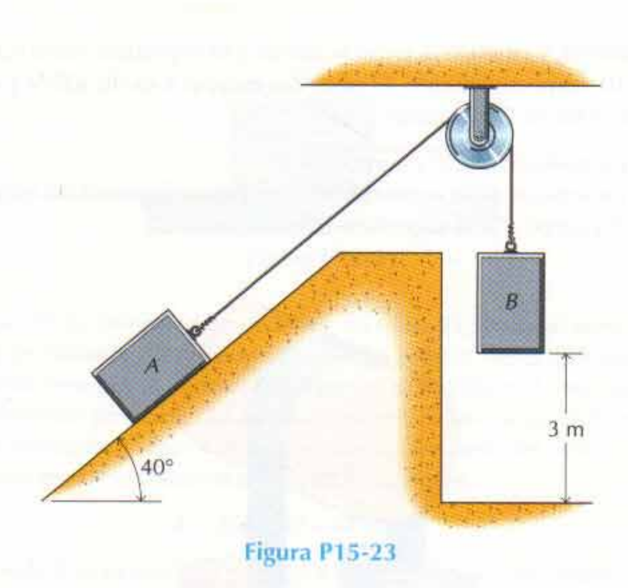


Figura P15-23

15-24* En la figura P15-24 se representan dos cuerpos A y B de masas 25 kg y 30 kg, respectivamente. El coeficiente de rozamiento cinético μ_k para el cuerpo A vale 0,20 y el sistema se libera partiendo del reposo. Durante el movimiento de los cuerpos, determinar

a. La aceleración del cuerpo A.
b. La tensión del cable que conecta los cuerpos.
c. La velocidad de los cuerpos al cabo de 5 s de iniciarse el movimiento.

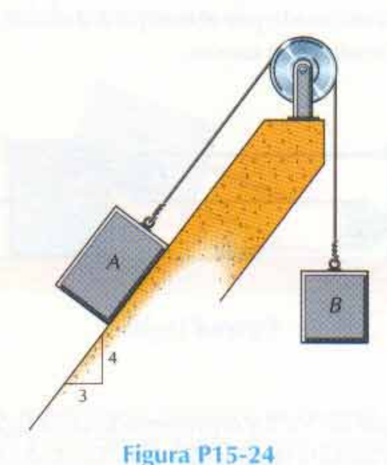


Figura P15-24

15-25 En la figura P15-25 se han representado dos cuerpos A y B, que pesan 250 N y 225 N, respectivamente. El coeficiente de rozamiento cinético μ_k para el cuerpo B vale 0,20 y el sistema se libera partiendo del reposo. Durante el movimiento de los cuerpos, determinar

a. La aceleración del cuerpo A.
b. La tensión del cable que une los cuerpos.
c. La distancia recorrida por el cuerpo B durante los primeros 5 s de movimiento.

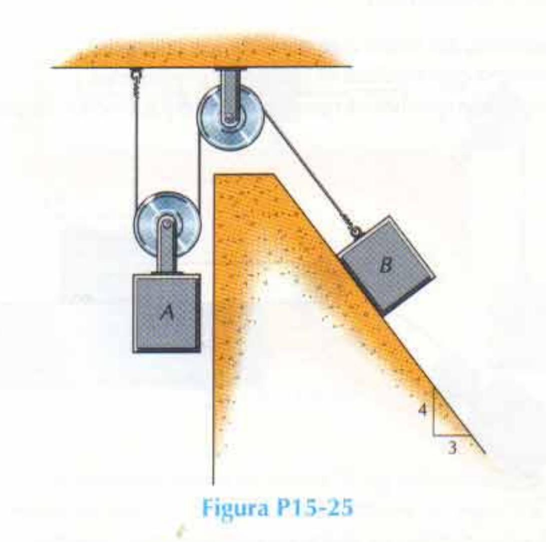


Figura P15-25

15-26 En la figura P15-26 se han representado dos cuerpos A y B de masas 40 kg y 30 kg, respectivamente. El coeficiente de rozamiento cinético μ_k para el cuerpo A vale 0,25 y el sistema se libera partiendo del reposo. Durante el movimiento de los cuerpos, determinar

a. La aceleración del cuerpo A.
b. La tensión del cable que une los cuerpos.
c. La velocidad del cuerpo B al cabo de 5 s de movimiento.

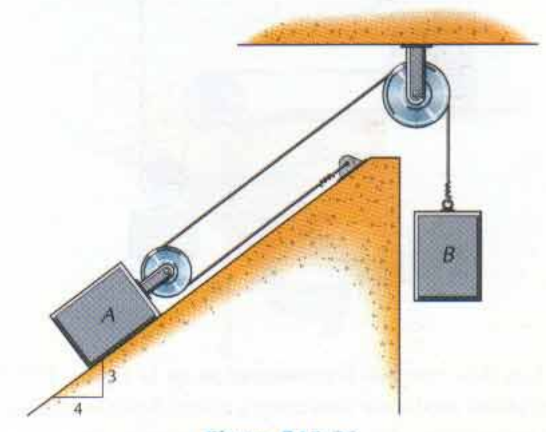


Figura P15-26

15-27* En la figura P15-27 se han representado dos cuerpos A y B, que pesan 150 N y 100 N, respectivamente. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque A y el plano inclinado vale 0,30. La superficie horizontal sobre la que se apoya el bloque B es lisa. Cuando los bloques están en la posición representada, el bloque B se mueve hacia la derecha con una velocidad de 1,5 m/s. Determinar

a. La tensión del cable que conecta los cuerpos.
b. El tiempo que tardará el bloque B en pararse.
c. La distancia que habrá recorrido el bloque B antes de pararse.

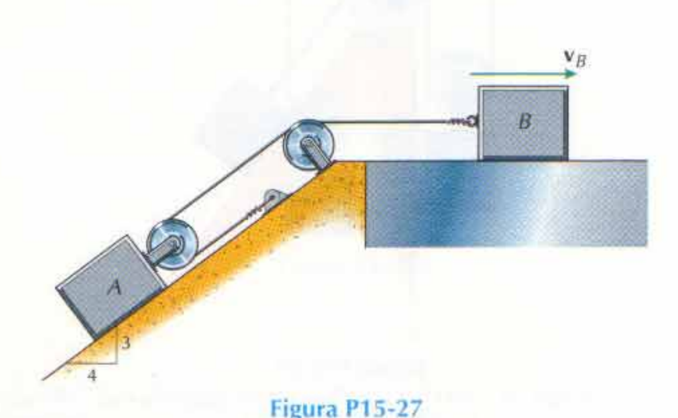


Figura P15-27

15-28* Las masas de los cuerpos A y B de la figura P15-28 son 15 kg y 10 kg, respectivamente. El coeficiente de rozamiento cinético μ_k entre el cuerpo A y la superficie horizontal vale 0,20 y los cuerpos se sueltan partiendo del reposo. Durante su movimiento, determinar

a. La tensión del cable que conecta los cuerpos.
b. La velocidad del cuerpo B a los 5 s de movimiento.
c. La distancia recorrida por el cuerpo B durante los primeros 5 s de movimiento.

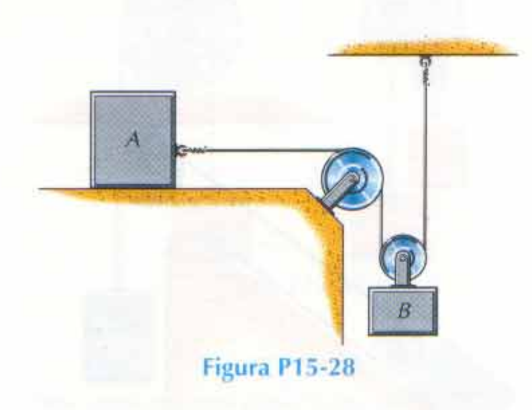


Figura P15-28

15-29 Los dos cuerpos representados en la figura P15-29 están conectados mediante una correa plana flexible que pasa sobre una superficie cilíndrica. Los coeficientes de rozamiento estático μ_s y cinético μ_k entre la correa y la superficie valen 0,15 y 0,10, respectivamente. El peso del cuerpo A es de 500 N y el de B, 1000 N. Determinar

a. La aceleración del cuerpo A.
b. La tensión de la correa en el segmento comprendido entre el cuerpo A y la superficie cilíndrica.

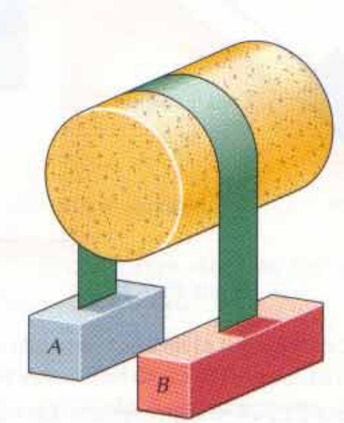


Figura P15-29

15-30* En la figura P15-30 se han representado dos cuerpos A y B cuyas masas respectivas son 25 kg y 30 kg. Los coeficientes de rozamiento estático μ_s y cinético μ_k valen 0,25 y 0,20, respectivamente. Si la fuerza **F** aplicada al cuerpo B es de 100 N, determinar

a. La aceleración del cuerpo A.
b. La tensión del cable que conecta los cuerpos.
c. La distancia recorrida por el cuerpo A durante los primeros 5 s de aplicación de la fuerza.

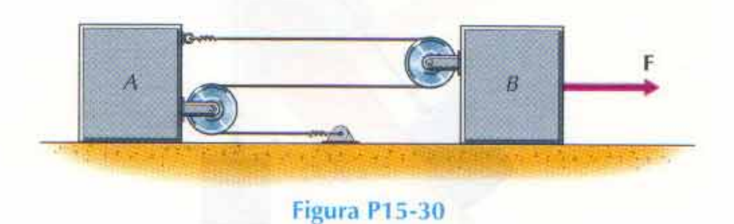


Figura P15-30

15-31 El bloque de 300 kg representado en la figura P15-31 se está moviendo hacia la izquierda a 6 m/s cuando se le aplica la fuerza **F**. El módulo de la fuerza viene dado por la expresión $F = 200 + 60t$, donde F se expresa en newton y t en segundos. Si la superficie es lisa, determinar

a. El tiempo que tarda el bloque en pararse.
b. La distancia recorrida por el cuerpo desde que se le aplica la fuerza hasta que se para.
c. La posición del cuerpo 10 s después de aplicarle la fuerza.

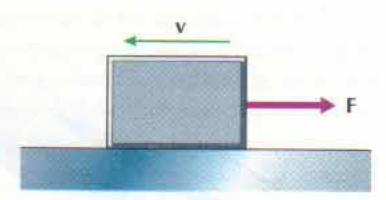


Figura P15-31

15-32* La celeridad de un avión de masa 12 500 kg al aterrizar en la cubierta de un portaaviones se reduce desde 216 km/h hasta cero por la acción de los frenos del avión y el sistema de detención por cable. La fuerza que ejercen los frenos del avión es constante e igual a 90 kN. La fuerza frenante del sistema de cable puede expresarse mediante la ecuación

$$F = 850\,000t - 425\,000t^2$$

donde F se expresa en newton y t en segundos. Determinar

a. La aceleración máxima que experimenta el piloto.
b. El tiempo que dura la operación de frenado.
c. La distancia recorrida por el avión durante el frenado.

15-33 El bloque representado en la figura P15-33 pesa 250 N. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano inclinado vale 0,20. En el instante representado, la velocidad del bloque es de 6 m/s hacia abajo del plano. Si, en este instante, se le aplica una fuerza resistente $F_R = 7{,}3v$, donde F_R se expresa en newton y v en metros por segundo, determinar

a. La velocidad del bloque al cabo de 5 s.
b. La distancia que recorre el bloque durante los primeros 5 s en que está aplicada la fuerza resistente.
c. La velocidad de régimen que alcanza el bloque.

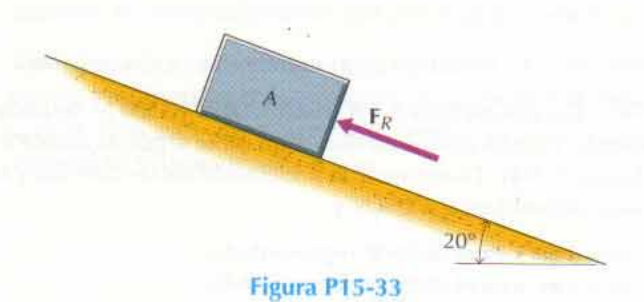


Figura P15-33

15-34 Desde la superficie terrestre, se dispara verticalmente hacia arriba un proyectil de 5 kg con una velocidad inicial de 300 m/s. Determinar

a. La altura máxima que alcanza el proyectil si se desprecia la resistencia del aire.
b. La altura máxima que alcanza el proyectil si la fuerza retardadora que le ejerce el aire es $F_R = 0{,}006v^2$, donde F_R se expresa en newton y v en metros por segundo.
c. La velocidad del proyectil cuando vuelve al suelo si se tiene en cuenta la fuerza retardadora del aire.

15-35* Los bloques A y B de la figura P15-35 pesan 125 N y 250 N, respectivamente. Los bloques están en reposo y el resorte (k = 417 N/m) está indeformado cuando los bloques se hallen en la posición representada. Determinar la velocidad y la aceleración del bloque B cuando esté 0,3 m por debajo de su posición inicial.

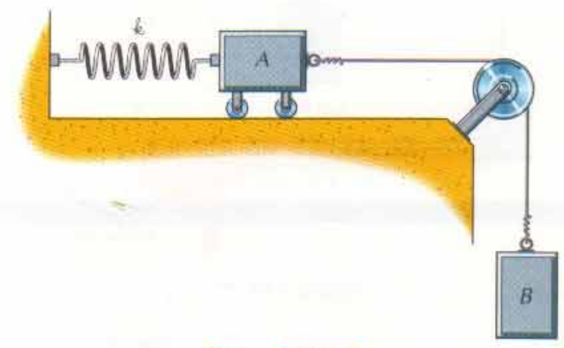


Figura P15-35

15-36* Una acróbata aérea de masa 55 kg salta desde un globo estacionario situado a una altura de 3000 m (v. fig. P15-36). La fuerza resistente que el aire ejerce sobre su cuerpo cuando tiene los brazos en cruz puede expresarse en la forma $F_R = 0{,}180v^2$, donde F_R se expresa en newton y v en metros por segundo. Determinar la velocidad de régimen que alcanza y el tiempo que tarda en alcanzar el 95% de dicha velocidad de régimen.



Figura P15-36

15-37 La cadena flexible representada en la figura P15-37 pesa 8,3 N / m. El coeficiente de rozamiento cinético entre la cadena y el plano horizontal vale 0,20. Si se suelta la cadena partiendo del reposo en la posición representada, determinar su velocidad en el instante en que toda ella alcance la posición vertical y el tiempo que tardará el extremo *A* en abandonar el plano horizontal.

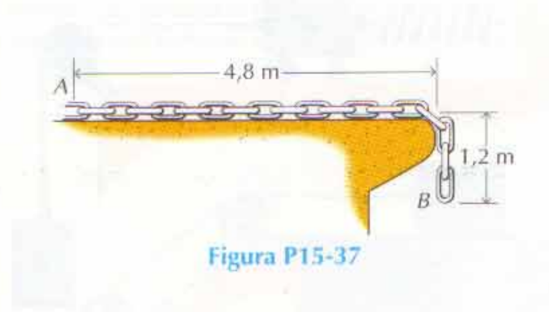


Figura P15-37

15-38* La masa del bloque *A* de la figura P15-38 es de 10 kg. El bloque está en reposo y el resorte (k = 25 N / m) indeformado en la posición representada. Un segundo después de soltar el bloque, determinar

a. La velocidad y aceleración del bloque.
b. La tensión *T* del cable.

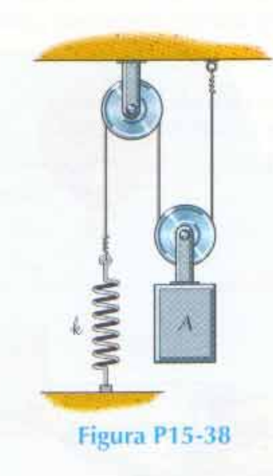


Figura P15-38

15-39 La bola representada en la figura P15-39 tiene una masa de 0,15 kg. La longitud natural del resorte (k = 1 kN / m) es de 50 cm. Si la bola se suelta a partir del reposo en la posición representada y se desprecia el rozamiento entre bola y tubo, determinar

a. La velocidad de la bola cuando sale del tubo.
b. El tiempo que tarda la bola en salir del tubo.

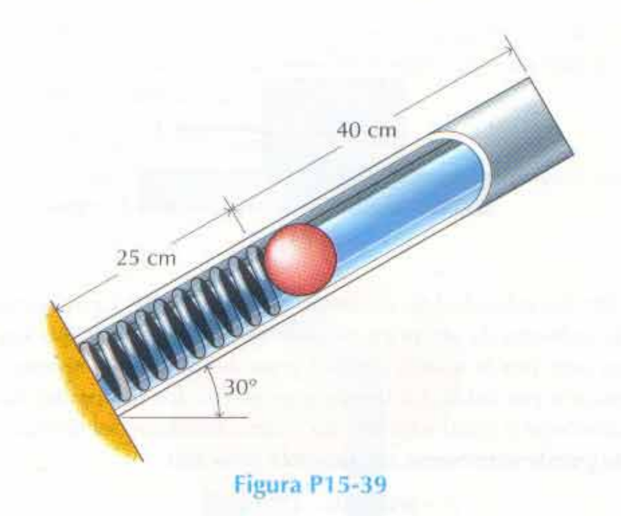


Figura P15-39

15-40* Un disco de masa 2 kg está soportado por dos resortes iguales (k = 400 N / m) según se indica en la figura P15-40. La longitud natural de cada resorte es 300 mm. Si se suelta el disco en reposo con los resortes horizontales, determinar la velocidad del disco cuando se halle 100 mm por debajo de su posición inicial.

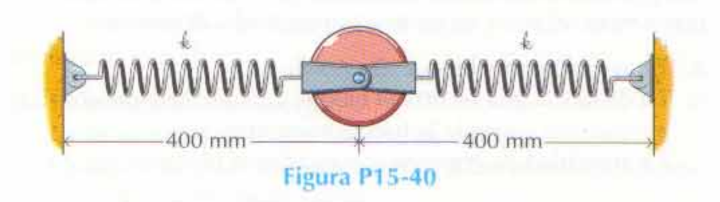


Figura P15-40

15-41 Los dos carritos *A* y *B* pesan 1000 N y 1500 N, respectivamente, y están unidos mediante un cable según se indica en la figura P15-41. Determinar la aceleración de los carritos y la tensión del cable si F = 250 N y

a. $v_B = 0$ m / s en el instante representado.
b. $v_B = 3$ m / s en el instante representado.

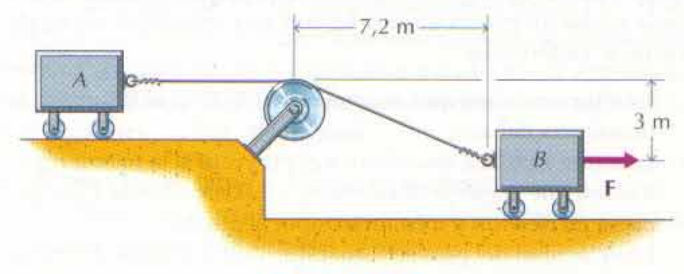


Figura P15-41

15-42 Las masas de los bloques A y B de la figura P15-42 son 30 y 20 kg, respectivamente. Las poleas son de masa despreciable y muy pequeñas. Determinar la aceleración de ambos bloques y la tensión del cable para la posición representada si

a. $v_A = 0$ m/s.
b. $v_A = 5$ m/s hacia abajo.

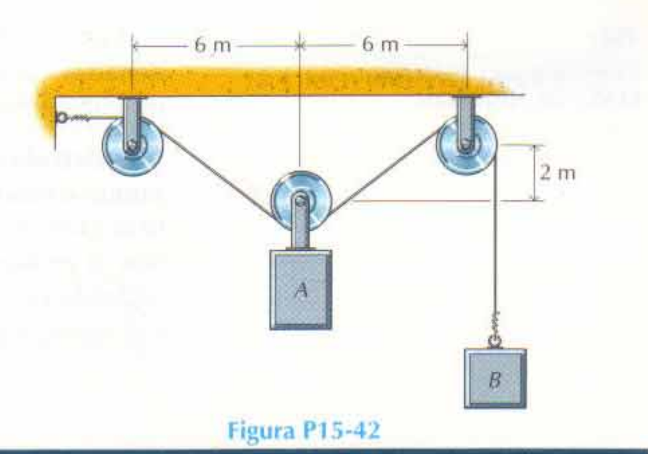


Figura P15-42

15.4 MOVIMIENTO CURVILÍNEO

En los apartados 13.5 y 13.7 se describió la Cinemática del punto animado de movimiento curvilíneo. La trayectoria, en este caso, es una curva. Si puede hallarse un sistema de coordenadas tal que sean nulas, en todo momento, las componentes z de la posición, la velocidad y la aceleración, diremos que se trata de un movimiento curvilíneo plano. Los movimientos tales que sea imposible hallar un sistema de coordenadas que haga nula, en todo momento, al menos una de las componentes de la posición, velocidad y aceleración, entran en la categoría de movimientos curvilíneos espaciales.

15.4.1 Movimiento curvilíneo plano

Cuando el movimiento tiene lugar en un plano, su descripción exigirá utilizar dos coordenadas. Para describir el movimiento curvilíneo en un plano distinguiremos tres sistemas de coordenadas: el de coordenadas cartesianas rectangulares, el de coordenadas polares y el de coordenadas normal/tangencial.

Coordenadas cartesianas rectangulares En un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, la posición de un punto se describe utilizando sus distancias a dos ejes de referencia (ejes x-y). Las ecuaciones de la posición, la velocidad y la aceleración son

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} \\ \mathbf{a} &= \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} \end{aligned} \qquad (15\text{-}20)$$

En el caso de movimiento curvilíneo plano en coordenadas polares, las ecuaciones 15-7 para el punto material se reducen a

$$\begin{aligned} \Sigma\mathbf{F}_x &= m\mathbf{a}_x \\ \Sigma\mathbf{F}_y &= m\mathbf{a}_y \\ \Sigma\mathbf{F}_z &= \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (15\text{-}21)$$

Combinando las ecuaciones 15-20 y 15-21 tenemos las ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= ma_x = m\ddot{x} \\ \Sigma F_y &= ma_y = m\ddot{y} \end{aligned} \qquad (15\text{-}22)$$

Las ecuaciones 15-22 indican que el movimiento curvilíneo plano en coordenadas cartesianas rectangulares no es más que una superposición de dos movimientos rectilíneos segun los ejes x e y.

Coordenadas polares En un sistema de coordenadas polares, la posición del punto se describe utilizando una distancia r a un punto fijo y un desplazamiento angular θ respecto a una recta fija. Los vectores unitarios $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ están dirigidos el primero radialmente y en sentido de alejamiento del punto fijo y el segundo perpendicular al primero y en el sentido de los ángulos θ crecientes. Las ecuaciones para la posición, la velocidad y la aceleración son

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\,\mathbf{e}_r \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{a} &= \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta \end{aligned} \qquad \textbf{(15-23)}$$

En el caso de movimiento curvilíneo plano en coordenadas polares, las ecuaciones 15-7 del movimiento del punto son

$$\begin{aligned} \Sigma\mathbf{F}_r &= m\mathbf{a}_r \\ \Sigma\mathbf{F}_\theta &= m\mathbf{a}_\theta \\ \Sigma\mathbf{F}_z &= \mathbf{0} \end{aligned} \qquad \textbf{(15-24)}$$

Combinando las ecuaciones 15-23 y 15-24 tenemos las ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} \Sigma F_r &= ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ \Sigma F_\theta &= ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \end{aligned} \qquad \textbf{(15-25)}$$

Coordenadas normal y tangencial En un sistema de coordenadas normal y tangencial, los vectores unitarios $\mathbf{e}_t$ y $\mathbf{e}_n$ están dirigidos tangente a la trayectoria (en el sentido de avance) y normal a la trayectoria (hacia el centro de curvatura), respectivamente, en cada punto de la trayectoria. Las ecuaciones de la velocidad y la posición s a lo largo de la trayectoria son

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{s}\,\mathbf{e}_t \\ \mathbf{a} &= \ddot{s}\,\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\mathbf{e}_n \end{aligned} \qquad \textbf{(15-26)}$$

En el caso de movimiento curvilíneo plano en coordenadas normal y tangencial, las ecuaciones 15-7 del movimiento del punto se reducen a

$$\begin{aligned} \Sigma\mathbf{F}_t &= m\mathbf{a}_t \\ \Sigma\mathbf{F}_n &= m\mathbf{a}_n \\ \Sigma\mathbf{F}_z &= \mathbf{0} \end{aligned} \qquad \textbf{(15-27)}$$

Combinando las ecuaciones 15-26 y 15-27 tenemos las ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} \Sigma F_t &= ma_t = m\ddot{s} \\ \Sigma F_n &= ma_n = m\,\frac{\dot{s}^2}{\rho} = m\,\frac{v^2}{\rho} \end{aligned} \qquad \textbf{(15-28)}$$

15.4.2 Movimiento curvilíneo en el espacio

Cuando el movimiento tiene lugar a lo largo de una curva en el espacio de tres dimensiones, su descripción precisa de tres coordenadas. Para describir este tipo de movimiento, existen tres sistemas de coordenadas: el de coordenadas cartesianas rectangulares, el de coordenadas cilíndricas y el de coordenadas esféricas.

Coordenadas cartesianas rectangulares El sistema de coordenadas cartesianas rectangulares utilizado para el movimiento curvilíneo tridimensional de un punto es una extensión directa del sistema rectangular empleado en los problemas planos. Las ecuaciones de la posición, velocidad y aceleración son

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \\ \mathbf{a} &= \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \end{aligned} \tag{15-29}$$

Para el movimiento curvilíneo en el espacio, la segunda ley de Newton para un punto material, ecuación 15-7, da

$$\begin{aligned} \Sigma\mathbf{F}_x &= m\mathbf{a}_x \\ \Sigma\mathbf{F}_y &= m\mathbf{a}_y \\ \Sigma\mathbf{F}_z &= m\mathbf{a}_z \end{aligned} \tag{15-30}$$

Combinando las ecuaciones 15-29 y 15-30 tenemos las ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= ma_x = m\ddot{x} \\ \Sigma F_y &= ma_y = m\ddot{y} \\ \Sigma F_z &= ma_z = m\ddot{z} \end{aligned} \tag{15-31}$$

Coordenadas cilíndricas El sistema de coordenadas cilíndricas utilizado para el movimiento curvilíneo tridimensional de un punto constituye una extensión directa del sistema de coordenadas polares utilizado en los problemas planos. Las ecuaciones de la posición, velocidad y aceleración son

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\mathbf{e}_r + z\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{k} \\ \mathbf{a} &= \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k} \end{aligned} \tag{15-32}$$

Para el movimiento curvilíneo en el espacio, la segunda ley de Newton aplicada a un punto material, ecuaciones 15-7, da

$$\begin{aligned} \Sigma\mathbf{F}_r &= m\mathbf{a}_r \\ \Sigma\mathbf{F}_\theta &= m\mathbf{a}_\theta \\ \Sigma\mathbf{F}_z &= m\mathbf{a}_z \end{aligned} \tag{15-33}$$

Combinando las ecuaciones 15-32 y 15-33 tenemos las ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} \Sigma F_r &= ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ \Sigma F_\theta &= ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \\ \Sigma F_z &= ma_z = m\ddot{z} \end{aligned} \tag{15-34}$$

Coordenadas esféricas En un sistema de coordenadas esféricas, la posición del punto se describe en función de una distancia radial R y dos ángulos θ y ϕ. Las ecuaciones de la posición, velocidad y aceleración son

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= R\mathbf{e}_R \\
\mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} = \dot{R}\mathbf{e}_R + R\dot{\theta}\,\text{sen}\,\phi\,\mathbf{e}_\theta + R\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi \\
\mathbf{a} &= \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\dot{\theta}^2\,\text{sen}^2\,\phi)\,\mathbf{e}_R \\
&\quad + (R\ddot{\theta}\,\text{sen}\,\phi + 2\dot{R}\dot{\theta}\,\text{sen}\,\phi + R\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi)\,\mathbf{e}_\theta \\
&\quad + (R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi} - R\dot{\theta}^2\,\text{sen}\,\phi\cos\phi)\,\mathbf{e}_\phi
\end{aligned} \tag{15-35}$$

Para el movimiento curvilíneo en el espacio, la segunda ley de Newton para un punto material, ecuaciones 15-7, da

$$\begin{aligned}
\Sigma\mathbf{F}_R &= m\mathbf{a}_R \\
\Sigma\mathbf{F}_\theta &= m\mathbf{a}_\theta \\
\Sigma\mathbf{F}_\phi &= m\mathbf{a}_\phi
\end{aligned} \tag{15-36}$$

Combinando las ecuaciones 15-35 y 15-36 tenemos las ecuaciones escalares

$$\begin{aligned}
\Sigma F_R &= ma_R = m(\ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\dot{\theta}^2\,\text{sen}^2\phi) \\
\Sigma F_\theta &= ma_\theta = m(R\ddot{\theta}\,\text{sen}\,\phi + 2\dot{R}\dot{\theta}\,\text{sen}\,\phi + R\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi) \\
\Sigma F_\phi &= ma_\phi = m(R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi} - R\dot{\theta}^2\,\text{sen}\,\phi\cos\phi)
\end{aligned} \tag{15-37}$$

Los ejemplos siguientes ilustran el procedimiento de resolución de problemas de movimiento curvilíneo de un punto material en un plano y en el espacio.

PROBLEMA EJEMPLO 15.7

Se dispara horizontalmente un proyectil de peso 150 N con una celeridad inicial de 225 m/s desde la cumbre de un ribazo situada 150 m por encima de la zona circundante. Determinar el alcance R del proyectil (distancia horizontal que recorre) y el tiempo que tarda en llegar al suelo. Despréciese la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

En la figura 15-9 puede verse el diagrama de sólido libre del proyectil. Éste se mueve en un plano vertical bajo la acción de la gravedad terrestre. Las ecuaciones del movimiento del proyectil en coordenadas rectangulares (ecs. 15-22) son

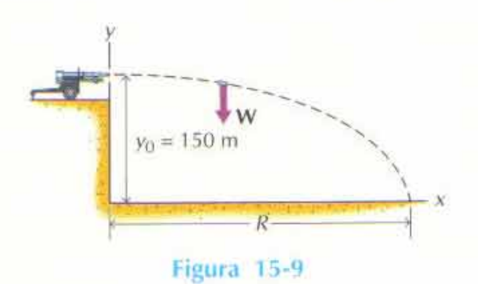


Figura 15-9

$$\Sigma F_x = ma_x = m\ddot{x} \tag{a}$$

$$\Sigma F_y = ma_y = m\ddot{y} \tag{b}$$

De la ecuación *a*

$$\Sigma F_x = m\ddot{x} = 0$$

Integrando, se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= C_1 \\
x &= C_1 t + C_2
\end{aligned}$$

De las condiciones iniciales,

$$\dot{x} = v_0 \quad \text{cuando } t = 0 \quad C_1 = v_0$$
$$x = 0 \quad \text{cuando } t = 0 \quad C_2 = 0$$

De la ecuación *b*

$$\Sigma F_y = m\ddot{y} = \frac{W}{g}\ddot{y} = -W \qquad \text{o sea} \qquad \ddot{y} = -g$$

Integrando, se tiene

$$\dot{y} = -gt + C_3$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3t + C_4$$

De las condiciones iniciales,

$$\dot{y} = 0 \quad \text{cuando } t = 0 \quad C_3 = 0$$
$$y = y_0 \quad \text{cuando } t = 0 \quad C_4 = y_0$$

Por tanto,

$$\dot{x} = v_0 \tag{c}$$
$$x = v_0 t \tag{d}$$
$$\dot{y} = -gt \tag{e}$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \tag{f}$$

El proyectil llegará al suelo cuando $y = 0$. Por tanto, de la ecuación *f*

$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2(150)}{9{,}81}} = 5{,}53 \text{ s} \qquad \text{Resp.}$$

El alcance *R* se obtiene de la ecuación *d*. Así

$$R = v_0 t = 225(5{,}53) = 1244 \text{ m} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 15.8

Una esfera de masa m está unida en el extremo superior de una varilla vertical de masa despreciable, según se indica en la figura 15-10. Al dar un pequeño desplazamiento a la esfera, se inicia la rotación del sistema en torno al pasador situado en *O*. Determinar la velocidad lineal **v** de la esfera y la fuerza **P** en la varilla cuando ésta esté en posición horizontal, si $m = 5$ kg y $R = 2$ m.

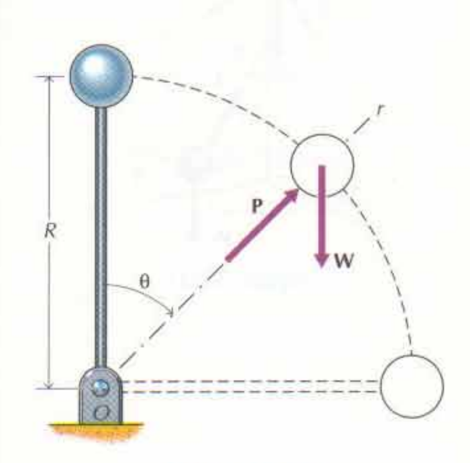


Figura 15-10

SOLUCIÓN

El diagrama de sólido libre de la esfera (fig. 15-10) muestra las dos fuerzas que se ejercen sobre la esfera: su peso **W** y la reacción **P** de la varilla. Las ecuaciones del movimiento de la esfera, en coordenadas polares (ecs. 15-25) son

$$\Sigma F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \tag{a}$$

$$\Sigma F_\theta = ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \tag{b}$$

Como la longitud de la varilla es fija, $r = R$, $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$. Así pues, de la ecuación *b*

$$mg \text{ sen } \theta = mR\ddot{\theta}$$
$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R} \text{ sen } \theta$$

Multiplicando los dos miembros por $\dot{\theta}$ e integrando, se tiene

$$\frac{1}{2}\,\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{R}\cos\theta + C$$

Como $\dot{\theta} = 0$ cuando $\theta = 0$,

$$C = \frac{g}{R}$$

Por tanto

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}(1 - \cos\theta)}$$

Cuando $\theta = \pi/2$,

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}}$$

Por tanto

$$v = R\dot{\theta} = R\sqrt{\frac{2g}{R}}$$
$$= \sqrt{2gR} = \sqrt{2(9{,}81)(2)} = 6{,}26 \text{ m/s} \downarrow \qquad \text{Resp.}$$

De la ecuación *a*

$$P - mg\cos\theta = -mR\dot{\theta}^2$$

Cuando $\theta = \pi/2$,

$$P = -mR\left(\sqrt{\frac{2g}{R}}\right)^2$$
$$= -2(5)(9{,}81) = -9{,}81 \text{ N} = 9{,}81 \text{ N} \longleftarrow \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 15.9

Un péndulo cónico consiste en una esfera que pesa 50 N sostenida por un hilo de 1,8 m de longitud que gira en torno a un eje vertical con una velocidad angular $\dot{\theta}$ constante tal que mantenga el hilo formando un ángulo de 30° con la vertical, según se indica en la figura 15-11. Determinar la tensión T del hilo y la celeridad lineal v de la esfera.

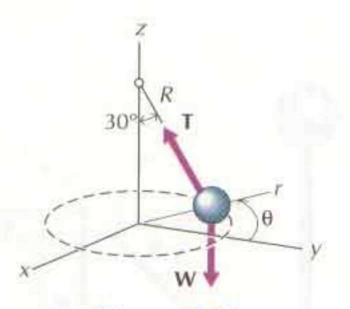


Figura 15-11

SOLUCIÓN

En la figura 15-11 puede verse el diagrama de sólido libre de la esfera. Ésta recorre una trayectoria circular en un plano horizontal bajo la influencia de las dos fuerzas **T** y **W**. Las ecuaciones del movimiento de la esfera en coordenadas cilíndricas (ecs. 15-34) son

$$\Sigma F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \qquad (a)$$

$$\Sigma F_\theta = ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \qquad (b)$$

$$\Sigma F_z = ma_z = m\ddot{z} \qquad (c)$$

Como la esfera se mueve con velocidad angular constante y trayectoria circular en un plano horizontal, $r = R$ sen $30° = 1{,}8$ sen $30° = 0{,}9$ m, $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$, $\ddot{\theta} = 0$ y $\ddot{z} = 0$. Así pues, de la ecuación *c*

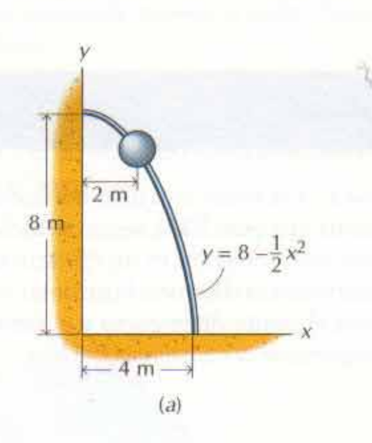
$$\Sigma F_z = -T \text{ sen } 30° - 50 = 0 \qquad T = 57{,}735 = 57{,}7 \text{ N} \qquad \text{Resp.}$$

De la ecuación *a*

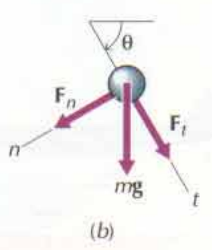
$$\Sigma F_r = -T\cos 30° = -\frac{W}{g} r\dot{\theta}^2$$
$$\dot{\theta}^2 = \frac{Tg \text{ sen } 30°}{Wr} = \frac{57{,}735(9{,}81) \text{ sen } 30°}{50(0{,}9)} = 6{,}293$$
$$\dot{\theta} = 2{,}5087 \text{ rad/s}$$
$$v = r\dot{\theta} = 0{,}9(2{,}5087) = 2{,}26 \text{ m/s} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 15.10

Una esfera de masa 3 kg se desliza por una varilla (v. fig. 15-12*a*) que está curvada en un plano vertical y cuya forma puede estar descrita por la ecuación $y = 8 - \frac{1}{2}x^2$, donde x e y se expresan en metros. Cuando $x = 2$ m, la esfera se mueve a lo largo de la varilla con una celeridad de 5 m/s que está aumentando a razón de 3 m/s². Determinar las componentes normal $\mathbf{F}_n$ y tangencial $\mathbf{F}_t$ de la fuerza que ejerce la varilla sobre la esfera en ese instante.



(*a*)



(*b*)

Figura 15-12

SOLUCIÓN

En la figura 15-12*b* puede verse el diagrama de sólido libre de la esfera. Ésta se mueve siguiendo la trayectoria curva en un plano vertical bajo la influencia de las fuerzas $\mathbf{F}_n$, $\mathbf{F}_t$ y del peso $\mathbf{W}$. Las ecuaciones del movimiento de la esfera en coordenadas normal y tangencial (ecs. 15-28) son

$$\Sigma F_t = ma_t = m\ddot{s} \qquad (a)$$
$$\Sigma F_n = ma_n = m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = m\frac{v^2}{\rho} \qquad (b)$$

Para la trayectoria curva

$$y = 8 - \frac{1}{2}x^2 \qquad \frac{dy}{dx} = -x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -1$$
$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2} = -(1 + x^2)^{3/2}$$

En el punto (2, 6)

$$\frac{dy}{dx} = -x = -2 = \text{pendiente}$$
$$\theta_x = \tan^{-1}(-2) = -63{,}43° \qquad \theta = 63{,}43°$$
$$|\rho| = (1 + x^2)^{3/2} = (1 + 2^2)^{3/2} = 11{,}180 \text{ m}$$

De la ecuación *a*, siendo $a_t = 3 \text{ m/s}^2$

$$\Sigma F_t = ma_t$$

$$F_t + mg \text{ sen } 63{,}43° = ma_t$$

$$F_t = ma_t - mg \text{ sen } 63{,}43°$$

$$= 3(3) - 3(9{,}81) \text{ sen } 63{,}43° = -17{,}32 \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_t = -17{,}32\mathbf{e}_t \text{ N}$$ Resp.

De la ecuación *b*, siendo $v_t = 5 \text{ m/s}$

$$\Sigma F_n = ma_n = m\frac{v^2}{\rho}$$

$$F_n + mg \cos 63{,}43° = m\frac{v^2}{\rho}$$

$$F_n = m\frac{v^2}{\rho} - mg \cos 63{,}43°$$

$$= 3\frac{(5)^2}{11{,}180} - 3(9{,}81)mg \cos 63{,}43° = -6{,}455 = -6{,}46 \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_n = -6{,}46\mathbf{e}_n \text{ N}$$ Resp.

PROBLEMAS

15-43* Un avión en vuelo horizontal a 9000 m deja caer una bomba que pesa 5 kN, según se indica en la figura P15-43. Si la celeridad del avión es de 720 km/h cuando suelta la bomba, determinar la distancia horizontal recorrida desde que se soltó hasta el punto de impacto y el tiempo de vuelo de la bomba. Despréciese la resistencia del aire.

Figura P15-43

15-44* Se dispara un proyectil de masa 15 kg desde una superficie horizontal con una velocidad inicial de 300 m/s que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Determinar la altura máxima *h* que alcanza el proyectil, el alcance *R* (distancia horizontal recorrida) del proyectil y el tiempo que transcurre hasta que llega al suelo. Despréciese la resistencia del aire.

15-45 Una rampa de esquí acuático tiene un ángulo de 25° y está dispuesta tal como se indica en la figura P15-45. Un esquiador que pesa 900 N lleva una velocidad de 32 km/h cuando está en la punta de la rampa y suelta la cuerda que lo remolca. Si se desprecia la resistencia del aire, determinar

a. La altura máxima *h* que alcanza el esquiador.
b. La distancia *R* entre el pie del extremo de la rampa y el punto en que entra en contacto con el agua.

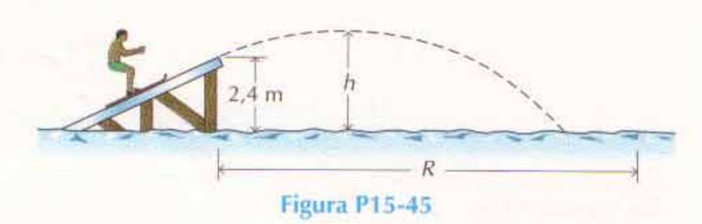


Figura P15-45

15-46 Cuando un mortero dispara un proyectil de 5 kg, se puede ajustar a voluntad el ángulo θ de inclinación (respecto a la horizontal), pero la celeridad v_0 de salida es fija (v. fig. P15-46). Si se desprecia la resistencia del aire, determinar

a. El ángulo de inclinación que daría el alcance máximo en un campo horizontal.
b. El alcance máximo y el tiempo de vuelo si $v_0 = 100 \text{ m/s}$.

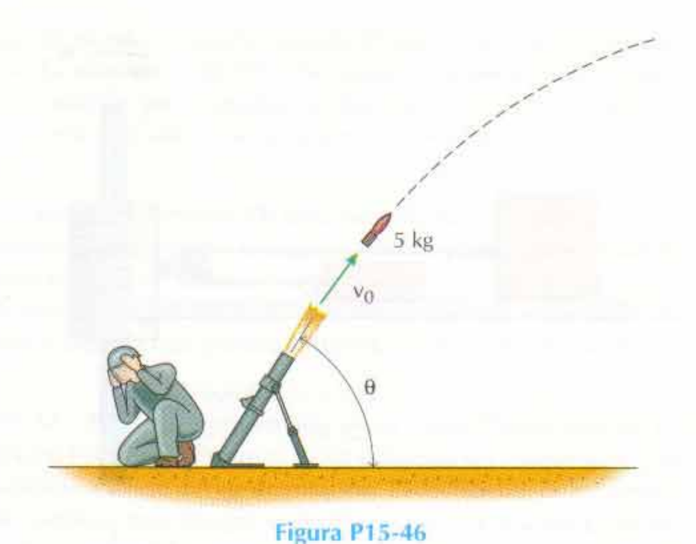


Figura P15-46

15-47* Se dispara un proyectil de 500 N de peso con una velocidad inicial de 450 m/s y un ángulo de 45° respecto a la horizontal, desde lo alto de una colina de 225 m por encima de la zona circundante. Determinar el alcance *R* (distancia horizontal recorrida) del proyectil y el tiempo que transcurre antes de llegar al suelo. Despréciese la resistencia del aire.

15-48* Un avión que está descendiendo según un ángulo de 20° respecto a la horizontal suelta una bomba (fig. P15-48). Si la altitud en el instante de soltarla es de 5000 m y la celeridad del avión es de 750 km/h, determinar el alcance (distancia horizontal recorrida) de la bomba y el tiempo que transcurre hasta que llega al suelo. Despréciese la resistencia del aire.

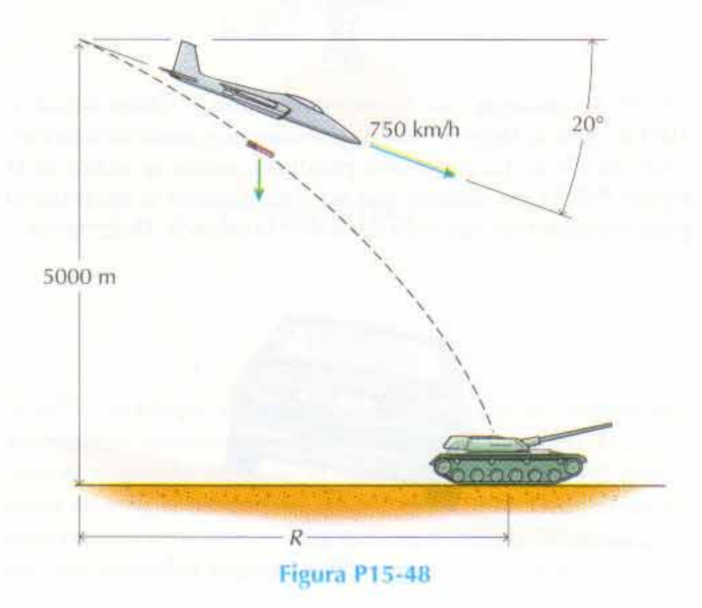


Figura P15-48

15-49 Se lanza verticalmente hacia arriba una pelota de tenis de masa 56,7 g con una celeridad inicial de 10,5 m/s. Si, sobre ella, un fuerte viento transversal ejerce una fuerza de 0,445 N, determinar la distancia horizontal que recorre antes de volver al suelo.

15-50 Una manzana de 100 g cae de una rama situada a 3 m de altura. Al caer, un fuerte viento transversal le ejerce una fuerza horizontal de 0,05 N. Determinar la distancia horizontal que recorre la manzana en su caída al suelo.

15-51* La velocidad de una partícula en un punto de su trayectoria se puede expresar en la forma $\mathbf{v}_1 = 25\mathbf{i} - 40\mathbf{j}$ m/s. Treinta segundos después, la velocidad es $\mathbf{v}_2 = -75\mathbf{i} + 82\mathbf{j}$ m/s. Si el peso de la partícula es de 250 N, determinar el módulo, dirección y sentido de la fuerza constante necesaria para originar esta variación del movimiento.

15-52* La velocidad de una partícula en un punto de su trayectoria se puede expresar en la forma $\mathbf{v}_1 = 96\mathbf{i} + 72\mathbf{j}$ m/s. Veinticinco segundos después, la velocidad es $\mathbf{v}_2 = 36\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$ m/s. Si la masa de la partícula es de 5 kg, determinar el módulo, dirección y sentido de la fuerza constante necesaria para originar esta variación del movimiento.

15-53 El pisapapeles de 1 kg de masa representado en la figura P15-53 parte del reposo en el punto *A* y se desliza por la superficie lisa del cilindro de 2 m de diámetro hasta abandonarla en el punto *B*. Determinar el ángulo *θ*.

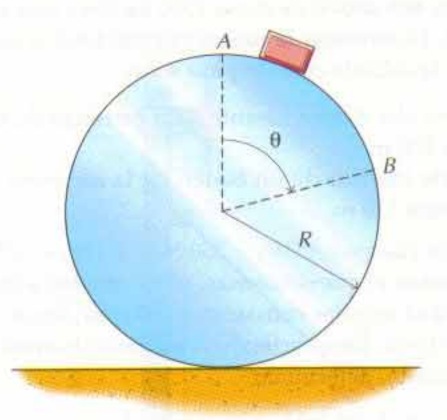


Figura P15-53

15-54* Un automóvil de masa 1600 kg pasa por la cresta de una colina que tiene un radio de curvatura de 70 m. Determinar la celeridad máxima posible para que los neumáticos se mantengan en contacto con la calzada.

15-55 Una bola de 2 kg atada al extremo de un hilo de 2 m recorre una circunferencia en un plano vertical, según se indica en la figura P15-55. Si la velocidad de la bola es de 4,5 m/s en la posición más alta, determinar la tensión del hilo y la velocidad lineal de la bola

a. Cuando el ángulo θ vale 45°.
b. Cuando el ángulo θ vale 270°.

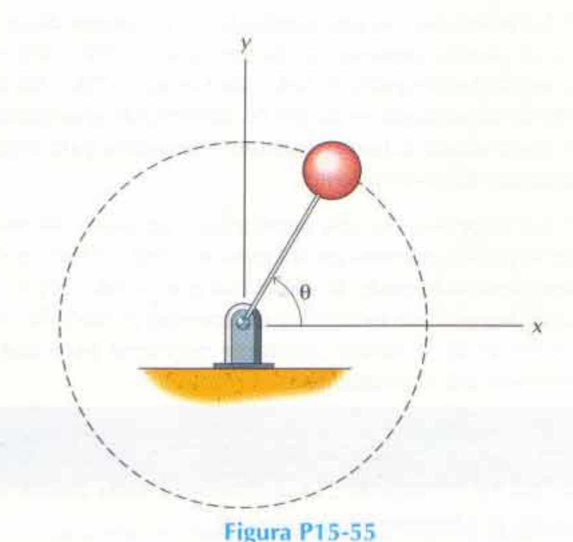


Figura P15-55

15-56* Un automóvil de masa 1500 kg lleva una velocidad de 100 km/h. Determinar la fuerza normal total N entre los neumáticos y la calzada cuando pasa sobre

a. La parte alta de una rasante de la carretera de radio de curvatura 100 m.
b. La parte inferior de un badén de la carretera de radio de curvatura 120 m.

15-57 Los cuerpos A ($W_A = 250$ N) y B ($W_B = 375$ N) y el entramado sobre el que descansan giran entorno a un eje vertical con celeridad angular constante de 50 rpm, según se indica en la figura P15-57. Despreciando el rozamiento entre los cuerpos y el entramado, determinar

a. La tensión T del cable que conecta los cuerpos.
b. La fuerza que el tope ejerce sobre el cuerpo B.

15-58 Una esfera de masa 3 kg está soportada por una varilla de masa despreciable y un hilo, según se indica en la figura P15-58. Determinar la tensión T de la varilla

a. Cuando la esfera se halla en la posición representada en la figura.
b. Inmediatamente después de cortar el hilo.
c. Cuando la esfera pasa por su posición más baja.

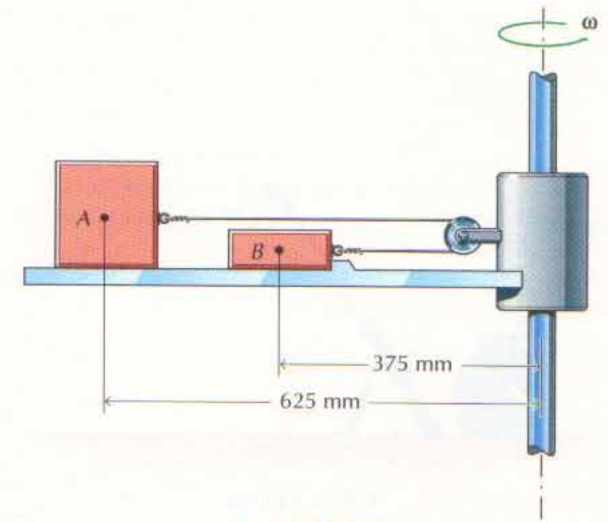


Figura P15-57

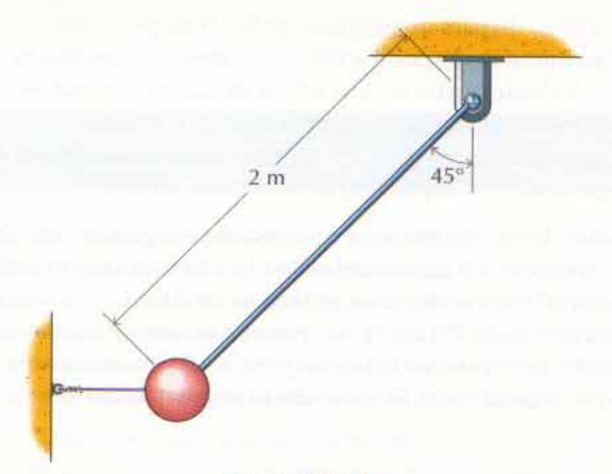


Figura P15-58

15-59* Se proyecta una carretera para que el tráfico circule a 100 km/h. A lo largo de uno de sus tramos, el radio de una curva es de 270 m. La curva está peraltada, según se indica en la figura P15-59, de manera que no sea necesario el rozamiento para mantener los automóviles sobre la calzada. Determinar

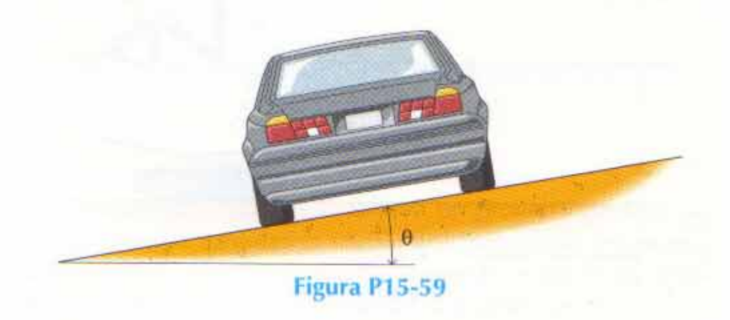


Figura P15-59

a. El ángulo de peralte (ángulo θ) que ha de tener la calzada.
b. El mínimo coeficiente de rozamiento entre neumáticos y calzada que impediría el deslizamiento del automóvil a esta celeridad si la curva no estuviera peraltada.

15-60* Una curva de 200 m de radio de una carretera en un llano está peraltada con el ángulo correcto para una celeridad de 65 km/h. Si un automóvil recorre esta curva a 100 km/h, determinar el mínimo coeficiente de rozamiento entre neumáticos y calzada que evitaría el deslizamiento del automóvil.

15-61 El disco representado en la figura P15-61 gira en un plano horizontal. Sobre el disco descansa un bloque de 1,5 kg situado a 20 cm del eje de rotación. El coeficiente de rozamiento estático entre bloque y disco vale 0,50. Si el disco parte del reposo con aceleración angular constante igual a 0,5 rad/s^2, determinar el tiempo que tardará el bloque en iniciar su deslizamiento.

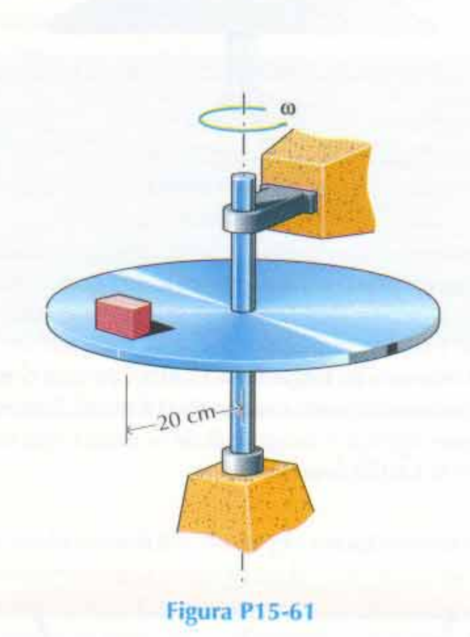


Figura P15-61

15-62* Un bloque (m = 5 kg) descansa sobre un entramado (rozamiento despreciable) que puede girar en torno a un eje vertical, según se indica en la figura P15-62. Cuando el entramado no gira, la tensión del resorte es de 80 N. Determinar la fuerza que el tope ejerce sobre el bloque cuando el entramado gire con velocidad angular constante igual a 30 rpm.

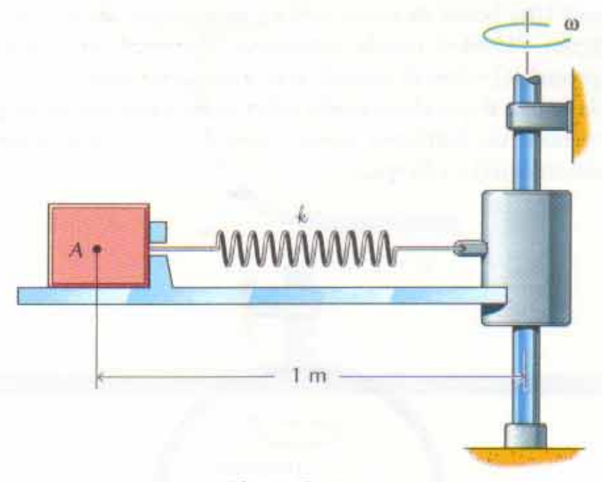


Figura P15-62

15-63 Una esfera de 5 kg está unida a una barra vertical mediante dos hilos, según se indica en la figura P15-63. Cuando el sistema gira en torno al eje de la barra, los hilos se tensan según se indica en la figura. Determinar

a. Las tensiones de los dos hilos cuando la velocidad angular del sistema es $\omega = 5$ rad/s.
b. La velocidad angular ω del sistema cuando el hilo B esté tenso pero sin carga.

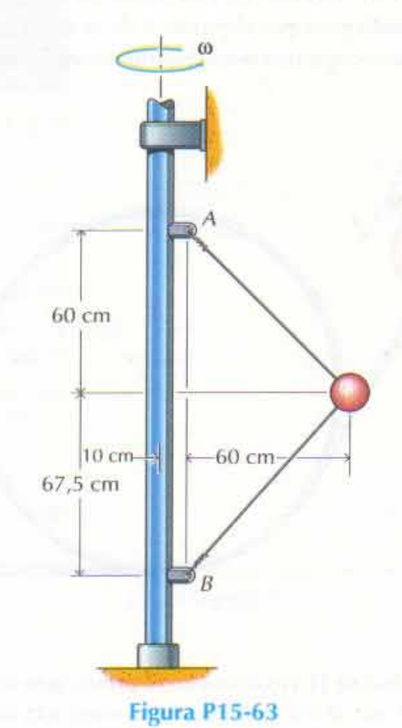


Figura P15-63

15-64* Una bolita de masa 0,50 kg está montada en el aro de la figura P15-64 y puede deslizarse libremente (rozamiento despreciable) sobre él cuando éste gire. Determinar el ángulo ω y la fuerza **F** que el aro ejerce sobre la bola cuando aquél gire en torno a un diámetro vertical con una velocidad angular constante igual a 120 rpm.

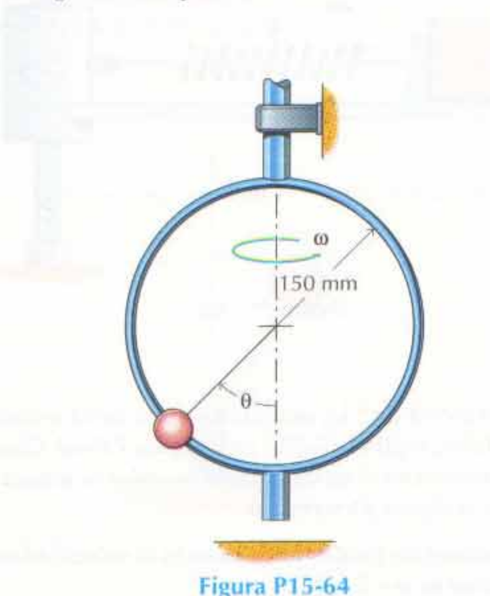


Figura P15-64

15-65 En la figura P15-65 se ha representado una vagoneta de unas montañas rusas. La vagoneta y sus cuatro ocupantes dan un peso total de 4500 N. La celeridad de la vagoneta es de 56 km/h cuando pasa por el punto A de la vía. Tratando la vagoneta con sus ocupantes como punto material, determinar

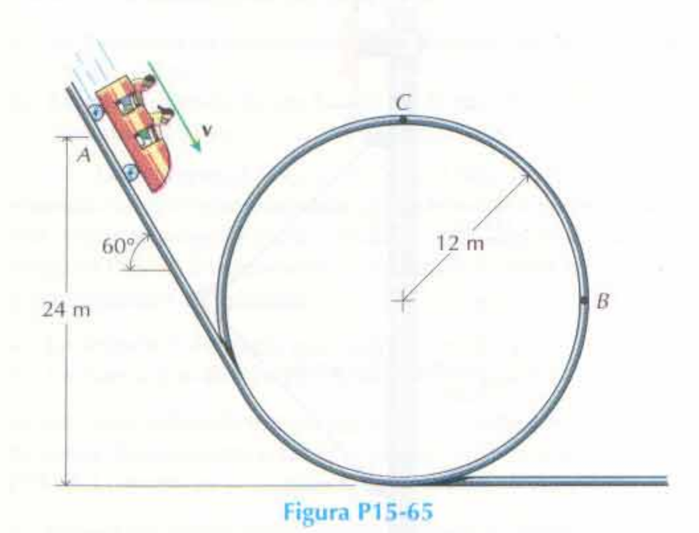


Figura P15-65

a. La celeridad de la vagoneta en el punto más bajo del rizo.
b. La fuerza que la vía ejerce sobre la vagoneta en el punto B.
c. La fuerza que la vía ejerce sobre la vagoneta en el punto C.
d. La mínima celeridad que ha de llevar la vagoneta en el punto más alto del rizo para mantenerse en contacto con la vía.

15-66* Un bloque de 5 kg de masa descansa sobre una superficie cónica lisa que gira en torno a un eje vertical con velocidad angular constante ω. El bloque está unido al eje giratorio mediante un cable, según se indica en la figura P15-66. Determinar

a. La tensión del cable cuando el sistema gira a 20 rpm.
b. La velocidad angular, en revoluciones por minuto, cuando sea nula la fuerza entre la superficie cónica y el bloque.

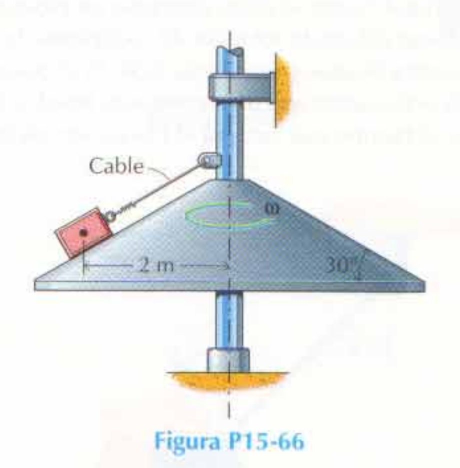


Figura P15-66

15-67 Una esfera que pesa 15 N se desliza por una varilla contenida en un plano vertical y cuya forma queda descrita por la ecuación $x^2 = 2{,}4y$, donde x e y se miden en metros. Cuando la esfera se halla en el punto (–2,4; 2,4), indicado en la figura P15-67, se mueve a lo largo de la varilla con una celeridad de 4,5 m/s, disminuyéndola a razón de 0,9 m/s^2. Determinar las componentes normal y tangencial de la fuerza que en ese instante ejerce la varilla sobre la esfera.

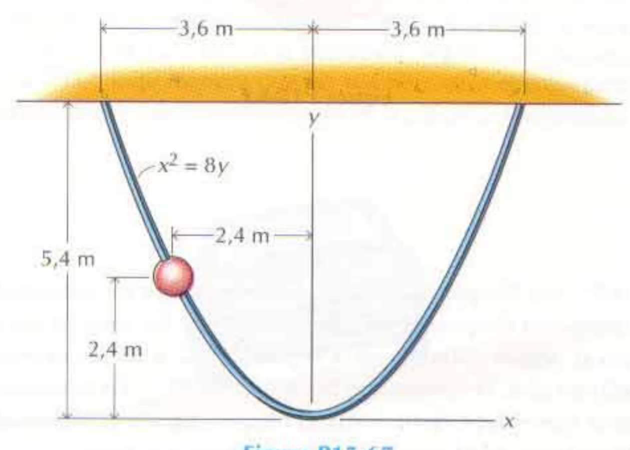
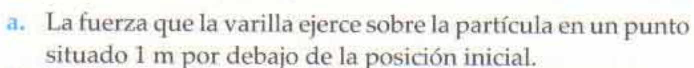


Figura P15-67

15-68* Una partícula P de masa $m = 1{,}5$ kg se suelta partiendo del reposo en la posición representada en la figura P15-68 y se desliza hacia abajo por la varilla, la cual tiene forma de arco circular de radio $R = 2$ m contenido en un plano vertical. Si es lisa la porción circular de la varilla pero el coeficiente de rozamiento cinético entre la partícula y la parte recta de la varilla vale 0,10, determinar



a. La fuerza que la varilla ejerce sobre la partícula en un punto situado 1 m por debajo de la posición inicial.
b. La distancia d que recorre la partícula a lo largo de la porción recta de varilla hasta detenerse.

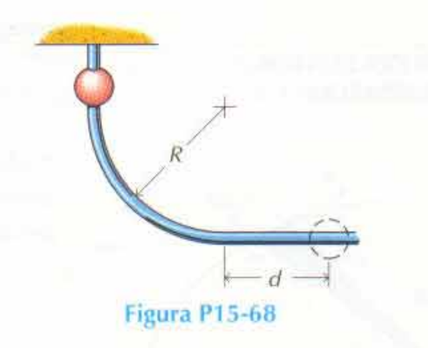


Figura P15-68

15.5 MOVIMIENTO BAJO LA ACCIÓN DE UNA FUERZA CENTRAL

Vamos a estudiar el movimiento de un punto material sometido a la acción de una fuerza siempre dirigida hacia un punto fijo. Ejemplos de este tipo de movimiento son el movimiento de los planetas alrededor del Sol y el movimiento de la Luna y de los satélites artificiales alrededor de la Tierra. A partir de observaciones del movimiento de los planetas en torno al Sol, J. Kepler (1571-1630) enunció las tres leyes siguientes que rigen el movimiento por acción de una fuerza central (dirigida a un punto)[1]

Leyes de Kepler del movimiento planetario	
Primera ley:	Los planetas describen órbitas elípticas en torno al Sol, el cual ocupa un foco.
Segunda ley:	El radio vector que une cada planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.
Tercera ley:	Los cubos de las distancias medias de los planetas al Sol son proporcionales a los cuadrados de sus periodos de revolución.

La ley de Newton de la Gravitación Universal da el módulo de la fuerza **F** que se ejercen dos masas separadas una distancia r:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \tag{15-38}$$

donde G es la constante de la gravitación universal. Consideremos el caso en que m_1 sea una masa muy grande que podamos suponerla fija en el espacio y m_2 una masa pequeña que se mueva en el plano xy bajo la acción de la fuerza **F** que le ejerce la masa m_1. Utilizando coordenadas polares cuyo origen esté fijo en la masa m_1 el movimiento de la masa m_2 vendrá dado por la ecuación 15-25 en la forma

$$\Sigma F_r = m_2 a_r = m_2(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \tag{a}$$

$$\Sigma F_\theta = m_2 a_\theta = m_2(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \tag{b}$$

[1] Dr. Ernst Mach, "The Science of Mechanics," 9ªed., The Open Court Publishing Company, LaSalle, Illinois, 1942. Publicada originalmente en alemán en 1893 y traducida al inglés por Thomas J. McCormack en 1902.

Integrando la ecuación b tenemos

$$r^2\dot{\theta} = h \quad \text{(constante)} \tag{c}$$

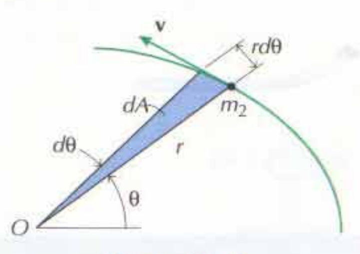


Figura 15-13

Podemos visualizar el significado físico de la ecuación c (v. fig. 15-13) considerando el área barrida por el radio vector r cuando gira un ángulo $d\theta$ en un tiempo dt. El área sombreada de la figura 15-13 es un triángulo; por tanto,

$$dA = \frac{1}{2}(r)(r\ d\theta) = \frac{1}{2}\ (r)^2\ d\theta$$

El área dA y la ecuación c están relacionadas por la expresión

$$2\,\frac{dA}{dt} = r^2\,\frac{d\theta}{dt} = r^2\dot{\theta} = h \tag{15-39}$$

La cantidad $dA/dt = h/2$ es la llamada velocidad areolar y es constante en el movimiento bajo la acción de una fuerza central. La ecuación 15-39 constituye el enunciado matemático de la segunda ley de Kepler del movimiento planetario.

La ecuación de la trayectoria de un punto sometido a una fuerza central se obtiene a partir de las ecuaciones a y c. Las derivadas se simplifican efectuando el cambio de variable $u = 1/r$. De la ecuación 15-39,

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} = hu^2 \tag{d}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -h\frac{du}{d\theta} \tag{e}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{d\dot{r}}{d\theta} = -h^2\,u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} \tag{f}$$

Aplicando las ecuaciones d y f en la ecuación a tenemos

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{Gm_1}{h^2} \tag{g}$$

La solución de esta ecuación diferencial (que puede comprobarse por sustitución directa) es

$$u = \frac{1}{r} = C\cos(\theta + \beta) + \frac{Gm_1}{h^2}$$

donde C y β son constantes de integración que habrá que determinar a partir de las condiciones iniciales del problema. Tomando el eje x de manera que $\theta = 0$ cuando r sea mínimo (u será máxima, suponiendo C positiva) se hace $\beta = 0$. Así pues,

$$\frac{1}{r} = C\cos\theta + \frac{Gm_1}{h^2} \tag{15-40}$$

Despejando r de la ecuación 15-40 tenemos

$$r = \frac{h^2/(Gm_1)}{1 + [Ch^2/(Gm_1)]\cos\theta} \tag{15-41}$$

La ecuación 15-41 es la ecuación, en forma polar, de una sección cónica (elipse, parábola o hipérbola). El origen del sistema de coordenadas (el centro de fuerzas O) es un foco de la sección cónica y el eje polar ($\theta = 0$) es un eje de simetría.

La excentricidad e de una cónica viene definida por

$$e = \frac{C}{Gm_1/\hbar^2} = \frac{C\hbar^2}{Gm_1} \tag{15-42}$$

La ecuación 15-41 de r se puede escribir en función de la excentricidad e en la forma siguiente:

$$r = \frac{\hbar^2}{Gm_1}\frac{1}{1 + e\cos\theta} \tag{15-43}$$

La ecuación 15-43 predice tres tipos de trayectoria diferentes para el punto, según sea la excentricidad e,

1. Cuando $e > 1$, el radio vector $r \to \infty$ cuando $\cos\theta \to -1/e$. La trayectoria es una hipérbola. Muchos cometas siguen trayectorias hiperbólicas al atravesar el sistema solar.
2. Cuando $e = 1$, el radio vector $r \to \infty$ cuando $\cos\theta \to -1$ ($\theta = \pm 180°$). La trayectoria es una parábola. Las naves espaciales que abandonan la Tierra para ir a otros puntos del sistema solar pueden seguir trayectorias parabólicas.
3. Cuando $e < 1$, el radio vector r se mantiene finito para todos los valores de θ. La trayectoria es una elipse. En el caso particular en que $e = 0$, el radio vector r es constante y la trayectoria es circular. Las naves espaciales y otros satélites en órbita terrestre siguen trayectorias elípticas o circulares.

En la figura 15-14 pueden verse los distintos tipos de trayectoria. La segunda rama de la hipérbola (no representada en la figura 15-14) corresponde a un campo de fuerzas centrales repulsivas en vez de a un campo de fuerzas centrales atractivas. La ecuación 15-43 constituye el enunciado matemático de la primera ley de Kepler.

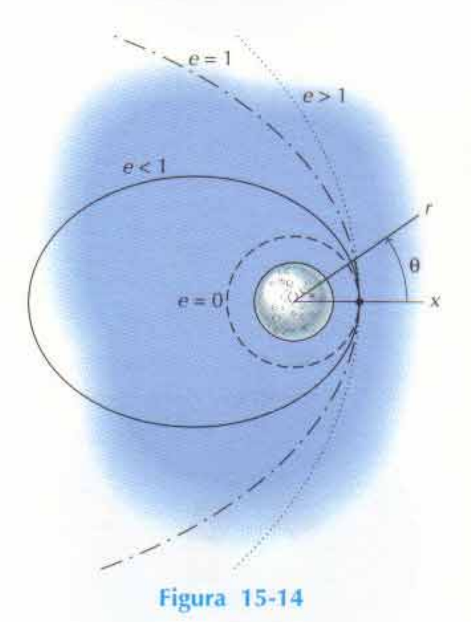


Figura 15-14

La velocidad de una partícula en un punto cualquiera de su trayectoria se obtiene derivando respecto al tiempo la ecuación 15-43. Así,

$$r = \frac{\hbar^2}{Gm_1}\frac{1}{1 + e\cos\theta}$$

$$\dot{r} = \frac{\hbar^2}{Gm_1}\frac{e\,\text{sen}\,\theta}{(1 + e\cos\theta)^2}\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\hbar}{r^2} = \frac{G^2m_1^2}{\hbar^3}(1 + e\cos\theta)^2$$

lo cual nos da

$$\dot{r} = \frac{Gm_1}{\hbar}e\,\text{sen}\,\theta$$

$$r\dot{\theta} = \frac{Gm_1}{\hbar}(1 + e\cos\theta)$$

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}$$

$$= \frac{Gm_1}{\hbar}\sqrt{e^2 + 2e\cos\theta + 1} \tag{15-44}$$

En el movimiento planetario en torno al Sol y en el de los satélites artificiales terrestres, e es menor que 1 y las órbitas son elípticas (v. fig. 15-15). La distancia mínima del foco al satélite es el llamado perigeo r_p (si fuera la distancia mínima de un planeta al Sol sería el perihelio) de la órbita y tiene lugar cuando $\theta = 0°$. La distancia máxima se denomina apogeo r_a (afhelio en el caso Sol-planeta) y tiene lugar cuando $\theta = 180°$. Así pues, según la ecuación 15-43

$$r_p = r_{\min} = \frac{\hbar^2}{Gm_1(1+e)}$$
$$r_a = r_{\max} = \frac{\hbar^2}{Gm_1(1-e)} \quad (15\text{-}45)$$

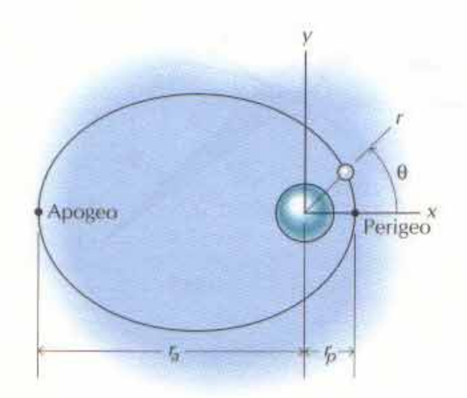


Figura 15-15

El semieje mayor a, el semieje menor b y el área A encerrada por la elipse (v. figs. 15-15 y 15-16) son

$$a = \frac{1}{2}(r_a + r_p)$$
$$= \frac{\hbar^2}{2Gm_1(1-e)} + \frac{\hbar^2}{2Gm_1(1+e)} = \frac{\hbar^2}{Gm_1(1-e^2)} \quad (15\text{-}46)$$
$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$
$$= \sqrt{a^2 - (a - r_p)^2} = a\sqrt{1-e^2} \quad (15\text{-}47)$$
$$A = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2} \quad (15\text{-}48)$$

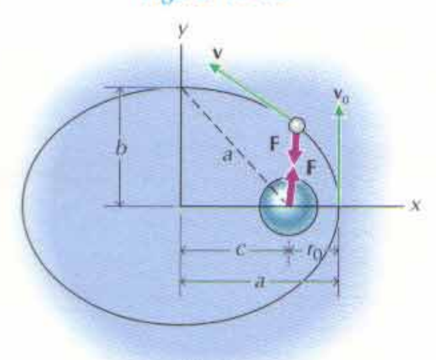


Figura 15-16

El periodo T (tiempo que se tarda en una revolución) se puede obtener utilizando la ecuación 15-39:

$$dA = \frac{\hbar}{2}\,dt$$
$$\int_0^A dA = \frac{\hbar}{2}\int_0^T dt$$
$$T = \frac{2A}{\hbar} = \frac{2\pi a^2}{\hbar}(1-e^2)^{1/2} = \frac{2\pi a^2}{\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{Gm_1 a}\right)^{1/2} \quad (15\text{-}49)$$

De donde

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_1} \qquad \text{o} \qquad T = \left[\frac{4\pi^2 a^3}{Gm_1}\right]^{1/2} \quad (15\text{-}50)$$

La ecuación 15-50 constituye el enunciado matemático de la tercera ley de Kepler.

En los casos de sondas espaciales y satélites lanzados desde la Tierra, la masa grande m_1 de las ecuaciones anteriores es la masa de la Tierra m_e. Los datos astronómicos que se necesitan para resolver los problemas ejemplo siguientes están consignados en el Apéndice B (tabla B-8).

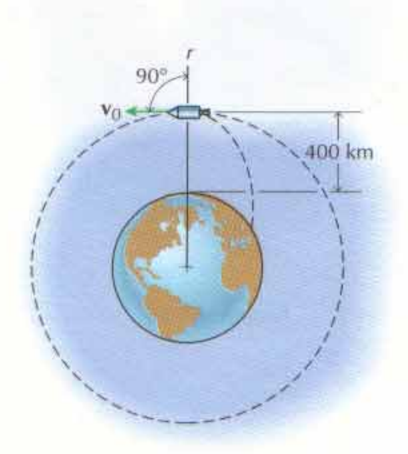


Figura 15-17

PROBLEMA EJEMPLO 15.11

Un cohete transporta un satélite a un punto situado 400 km por encima de la superficie terrestre, según se indica en la figura 15-17. Determinar la velocidad (paralela a la superficie terrestre) que se necesita para situar el satélite en órbita circular.

SOLUCIÓN

Al finalizar el vuelo propulsado del cohete y dar al satélite una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ paralela a la superficie terrestre, el satélite vuela libremente y se encuentra sometido únicamente a la atracción gravitatoria de la Tierra. El movimiento del satélite lo describe la ecuación 15-40 y la velocidad en todo punto de su vuelo viene dada por la ecuación 15-44. En el caso de órbita circular, $e = 0$ y la ecuación 15-44 queda en la forma

$$v = \frac{Gm_1}{h}\sqrt{e^2 + 2e\cos\theta + 1} = \frac{Gm_e}{h} = v_0 \qquad (a)$$

La ecuación *a* indica que la celeridad es constante e igual a la celeridad inicial v_0. La constante h se puede determinar utilizando la ecuación 15-39 y las condiciones iniciales del lanzamiento; a saber, cuando $r = r_0$, $v = v_0$. Así pues,

$$h = r^2\dot{\theta} = r_0^2\frac{v_0}{r_0} = r_0 v_0 \qquad (b)$$

De las ecuaciones *a* y *b*

$$v_0 = \frac{Gm_e}{h} = \frac{Gm_e}{r_0 v_0} \qquad \text{o sea} \qquad v_0^2 = \frac{Gm_e}{r_0}$$

donde m_e es la masa de la Tierra.

A una altura $h = 400$ km, como el radio de la Tierra es $r_e = 6370$ km,

$$r_0 = r_e + h = 6370 + 400 = 6770 \text{ km}$$

Por tanto,

$$v_0 = \left[\frac{Gm_e}{r_0}\right]^{1/2} = \left[\frac{6{,}673(10^{-11})(5{,}976)(10^{24})}{6\ 770\ 000}\right]^{1/2} = 7675 \text{ m/s}$$

$$= 27\ 630 \text{ km/h} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 15.12

Un cohete transporta un satélite a un punto situado a 800 km por encima de la superficie terrestre. Determinar la velocidad (paralela a la superficie terrestre) necesaria para colocar al satélite

a. En una órbita elíptica de altitud máxima 8000 km.
b. En una órbita parabólica que lo saque del campo gravitatorio terrestre.

SOLUCIÓN

Una vez el satélite esté en vuelo libre y sometido solamente al campo gravitatorio terrestre, el movimiento vendrá descrito por la ecuación 15-40 y su velocidad en un punto cualquiera de la trayectoria vendrá dada por la ecuación 15-44.

a. Llamando h_p a la altura corresondiente al perigeo, h_a a la correspondiente al apogeo y r_e al radio de la Tierra, para una órbita elíptica con

$$r_p = r_e + h_p = 6{,}371(10^6) \text{ m} + 0{,}800(10^6) \text{ m} = 7{,}171(10^6) \text{ m}$$
$$r_a = r_e + h_a = 6{,}371(10^6) \text{ m} + 8{,}000(10^6) \text{ m} = 14{,}371(10^6) \text{ m}$$

las ecuaciones 15-45 dan

$$r_a = \frac{h^2}{Gm_1(1-e)} \qquad r_p = \frac{h^2}{Gm_1(1+e)}$$

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = \frac{14{,}37(10^6) - 7{,}171(10^6)}{14{,}37(10^6) + 7{,}171(10^6)} = 0{,}3342$$

En $\theta = 0°$, la ecuación 15-44 queda en la forma

$$v = \frac{Gm_1}{h}\sqrt{e^2 + 2e\cos\theta + 1} = \frac{Gm_e}{h}(1+e) = v_0 \qquad (a)$$

La constante h se puede determinar utilizando la ecuación 15-39 y las condiciones iniciales del lanzamiento; a saber, cuando $r = r_0$, $v = v_0$. Así pues,

$$h = r^2\dot{\theta} = r_0^2\frac{v_0}{r_0} = r_0 v_0 \qquad (b)$$

De las ecuaciones *a* y *b*

$$v_0 = \frac{Gm_e}{h}(1+e) = \frac{Gm_e}{r_0 v_0}(1+e) \qquad \text{o sea} \qquad v_0^2 = \frac{Gm_e}{r_0}(1+e)$$

Con $r_0 = r_p = 7{,}171(10^6)$ m,

$$v_0 = \left[\frac{Gm_e}{r_0}(1+e)\right]^{1/2} = \left[\frac{6{,}673(10^{-11})(5{,}976)(10^{24})}{7{,}171(10^6)}(1+0{,}3342)\right]^{1/2}$$

$$= 8{,}614(10^3) \text{ m/s} = 8{,}61 \text{ km/s}$$ Resp.

b. Para una trayectoria parabólica, $e = 1$; por tanto,

$$v_0 = \left[\frac{Gm_e}{r_0}(1+e)\right]^{1/2} = \left[\frac{2Gm_e}{r_0}\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{2(6{,}673)(10^{-11})(5{,}976)(10^{24})}{7{,}171(10^6)}\right]^{1/2}$$

$$= 10{,}546(10^3) \text{ m/s} = 10{,}55 \text{ km/s}$$ Resp.

La celeridad v_0 asociada a una trayectoria parabólica es la mínima celeridad necesaria para escapar del campo gravitatorio terrestre y recibe el nombre de velocidad de escape v_{esc}.

PROBLEMA EJEMPLO 15.13

La celeridad máxima de un satélite en órbita elíptica ($e = 0{,}25$) es 25 700 km/h. Determinar

a. Las distancias máxima y mínima (en km) de la superficie terrestre a la trayectoria del satélite.

b. El periodo de la órbita elíptica.

SOLUCIÓN

a. Para una órbita elíptica, la celeridad máxima se tiene en el perigeo (a distancia r_p del centro de la Tierra), punto en el cual la velocidad es paralela a la superficie terrestre. Así pues, según la ecuación 15-39,

$$\hbar = r^2\dot{\theta} = r_p^2\frac{v_p}{r_p}$$
$$= r_p v_p = r_p v_{max}$$

Entonces, siendo r_a la distancia del centro de la Tierra al apogeo y r_e el radio de la Tierra, de las ecuaciones 15-45 con $v_{máx} = 25\,700$ km/h = 7139 m/s se tiene:

$$r_p = \frac{Gm_e(1+e)}{v_{max}^2}$$
$$= \frac{6{,}673(10^{-11})(5{,}976)(10^{24})(1+0{,}25)}{(7139)^2}$$
$$= 9{,}781(10^6)\text{ m} = 9781\text{ km}$$
$$r_a = \frac{1+e}{1-e}r_p$$
$$= \frac{1+0{,}25}{1-0{,}25}\,9781 = 16\,300\text{ km}$$
$$h_p = r_p - r_e$$
$$= 9781 - 6370 = 3411\text{ km} \qquad \text{Resp.}$$
$$h_a = r_a - r_e$$
$$= 16\,300 - 6370 = 9930\text{ km} \qquad \text{Resp.}$$

b. Para la elipse

$$a = \frac{1}{2}(r_a + r_p)$$
$$= \frac{1}{2}[\,16{,}300(10^6) + 9{,}781(10^6)]$$
$$= 13{,}041(10^6)\text{ m}$$

De la ecuación 15-50

$$T = \left[\frac{4\pi^2 a^3}{Gm_e}\right]^{1/2}$$
$$= \left\{\frac{4\pi^2[\,13{,}041(10^6)]^3}{6{,}673(10^{-11})(5{,}976)(10^{24})}\right\}^{1/2}$$
$$= 14\,818\text{ s} = 4{,}12\text{ h} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 15.14

Una sonda espacial lanzada desde la superficie terrestre (v. fig. 15-18) se mueve paralelamente a ésta cuando finaliza la fase propulsada de su vuelo a una altura de 1200 km con una velocidad de 12,00 km/s. Determinar

a. La excentricidad e de la trayectoria.
b. La velocidad de la sonda espacial cuando su distancia al centro de la Tierra sea de 100 000 km.
c. El máximo ángulo θ de esta trayectoria.

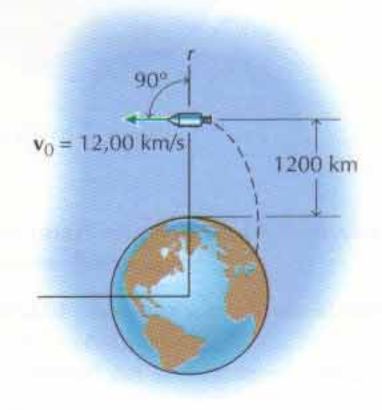


Figura 15-18

SOLUCIÓN

a. Como la sonda espacial está moviéndose paralelamente a la superficie terrestre al finalizar la fase propulsada de su vuelo, las condiciones iniciales de éste (cuando $\theta = 0°$), siendo r_e el radio de la Tierra, son

$$r_0 = r_e + h_0 = 6{,}371(10^6) + 1{,}200(10^6) = 7{,}571(10^6)\text{ m}$$
$$v_0 = 12{,}00\text{ km/s} = 12{,}00(10^3)\text{ m/s}$$

De la ecuación 15-39

$$\hbar = r^2\dot{\theta} = r_0^2\frac{v_0}{r_0} = r_0 v_0 = 7{,}571(10^6)12{,}00(10^3)$$
$$= 9{,}085(10^{10})\text{ m}^2/\text{s}$$

De la ecuación 15-43, siendo $r = r_0$ cuando $\theta = 0°$

$$e = \frac{\hbar^2}{Gm_e r_0} - 1$$
$$= \frac{[9{,}085(10^{10})]^2}{6{,}673(10^{-11})(5{,}976)(10^{24})(7{,}571)(10^6)} - 1 = 1{,}734$$

b. La velocidad se determina utilizando las ecuaciones 15-43 y 15-44. De la ecuación 15-43

$$\cos\theta = \frac{\hbar^2 - Gm_e r}{Gm_e re}$$
$$= \frac{[9{,}085(10^{10})]^2 - 6{,}673(10^{-11})(5{,}976)(10^{24})(100)(10^6)}{6{,}673(10^{-11})(5{,}976)(10^{24})(100)(10^6)(1{,}734)}$$
$$= -0{,}4573 \qquad \theta = 117{,}2°$$

De la ecuación 15-44

$$v = \frac{Gm_e}{\hbar}\sqrt{e^2 + 2e\cos\theta + 1}$$
$$= \frac{6{,}673(10^{-11})(5{,}976)(10^{24})}{9{,}085(10^{10})}$$
$$= 6{,}830(10^3)\text{ m/s} = 6{,}83\text{ km/h} \qquad \text{Resp.}$$

c. El ángulo máximo $\theta_{máx}$ se tiene cuando $r \to \infty$. Según la ecuación 15-43, $r \to \infty$. cuando

$$1 + e\cos\theta \to 0$$

Por tanto,

$$\cos\theta_{max} = -\frac{1}{e} = -\frac{1}{1{,}734}$$
$$\theta_{max} = 125{,}2° \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

Los datos astronómicos que se necesitan para resolver los problemas siguientes están consignados en el Apéndice B (tabla B-8).

15-69* Un cohete transporta un satélite hasta un punto situado 800 km por encima de la superficie terrestre. Determinar la velocidad (paralela a la superficie terrestre) que se necesita para situar el satélite

a. En órbita circular.
b. En una trayectoria parabólica.

15-70* Un cohete transporta un satélite hasta un punto situado 900 km por encima de la superficie terrestre (fig. P15-70). Determinar la velocidad (paralela a la superficie terrestre) que se necesita para situar el satélite

a. En órbita circular.
b. En una trayectoria hiperbólica de excentricidad 1,25.

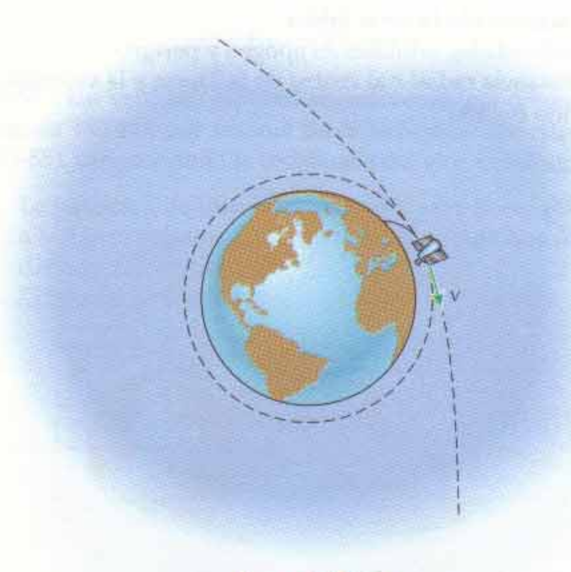


Figura P15-70

15-71 Se desea situar un satélite en una órbita circular polar tal que las sucesivas trazas en el suelo , en el ecuador, estén separadas 3200 km. Determinar qué altitud debe tener la órbita circular.

15-72* Se desea situar un satélite en una órbita circular ecuatorial tal que siempre se encuentre sobre un mismo punto de la superficie terrestre. Determinar el radio de la órbita y la celeridad orbital del satélite.

15-73 Un cohete recorre una órbita circular situada 960 km por encima de la superficie terrestre. Determinar el mínimo cambio de celeridad que permita al cohete escapar del campo gravitatorio terrestre.

15-74* Un cohete recorre una órbita circular situada a una altura de 500 km. Durante un intervalo de tiempo muy corto, los motores aumentan la velocidad (tangente a la órbita) en 1000 m/s. Determinar

a. La excentricidad e de la nueva órbita.
b. La altitud y celeridad orbital del cohete en el punto más alto de esta nueva órbita.

15-75 A una altitud de 800 km por encima de la superficie terrestre, se coloca un satélite en órbita con una celeridad de 32 000 km/h paralela a la superficie terrestre. Determinar

a. La excentricidad e de la órbita.
b. Las altitudes máxima y mínima del satélite en su trayectoria.

15-76* La altitud de un satélite en órbita elíptica alrededor de la Tierra es de 1600 km en el apogeo y 600 km en el perigeo (v. fig. P15-76). Determinar

a. La excentricidad e de la órbita.
b. Las celeridades orbitales en apogeo y perigeo.
c. El periodo de la órbita.

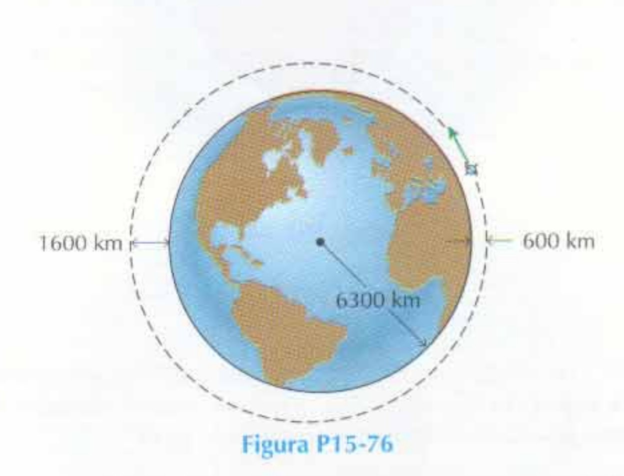


Figura P15-76

15-77 Un satélite recorre una órbita circular a 800 km por encima de la superficie terrestre. Determinar

a. La variación de velocidad necesaria para situar el satélite en una órbita elíptica de excentricidad 0,30.
b. La altitud y celeridad orbital del satélite en el punto más alto de su nueva órbita.

15-78* La distancia máxima de un satélite al centro de la Tierra, siguiendo una órbita elíptica, es de 15 000 km. Determinar

a. La altitud del satélite en el perigeo.
b. Las velocidades del satélite en el apogeo y el perigeo.
c. El periodo de la órbita elíptica.

15-79 La altitud de un satélite en órbita elíptica alrededor de la Tierra es de 2400 km en el apogeo y 1440 km en el perigeo. Determinar

a. La excentricidad e de la órbita.
b. Las celeridades orbitales en apogeo y perigeo.
c. El periodo de la órbita.

15-80* El módulo lunar del Apolo está en órbita alrededor de la Luna con una altitud sobre la superficie lunar de 50 km en el perigeo y de 500 km en el apogeo (v. fig. P15-80). Determinar

a. La excentricidad de la órbita.
b. La velocidad del módulo en su perigeo.
c. El periodo orbital del módulo.



Figura P15-80

15-81 Un satélite está en órbita circular a 400 km por encima de la superficie terrestre. Determinar las nuevas altitudes de apogeo y perigeo si un motor incorporado en él:

a. Aumenta la celeridad del satélite en 240 m/s.
b. Da al satélite una componente radial (hacia afuera) de la velocidad igual a 240 m/s.

15-82* Un satélite está en órbita elíptica con una altitud de perigeo igual a 1000 km y una altitud de apogeo igual a 9000 km. Determinar las componentes r y q (radial y transversa) de su velocidad cuando cruza el eje menor de la elipse (punto B de la fig. P15-82).

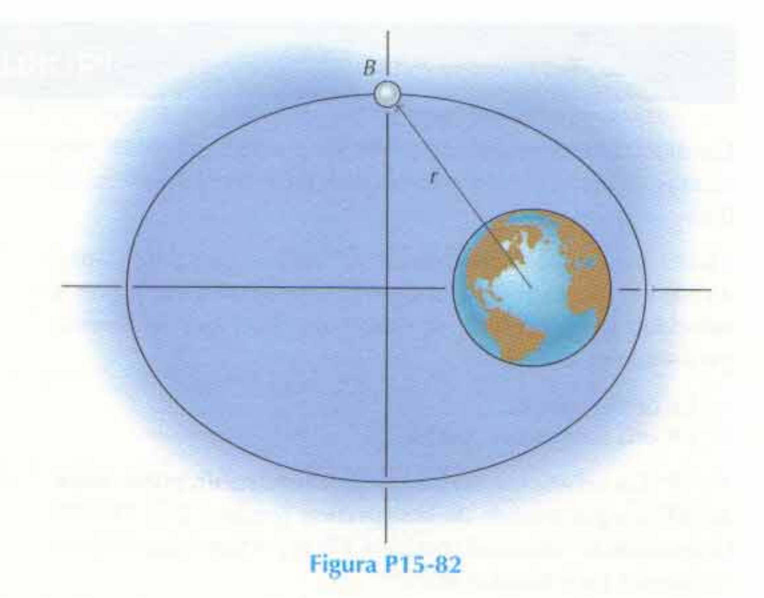


Figura P15-82

15-83 La altitud de un satélite en órbita elíptica alrededor de la Tierra es de 33 600 km en el apogeo y de 4000 km en el perigeo (v. fig. P15-83). Determinar

a. La excentricidad e de la órbita.
b. Las celeridades orbitales en apogeo y perigeo.
c. La distancia radial r al centro de la Tierra y la velocidad v cuando $\theta = 150°$.

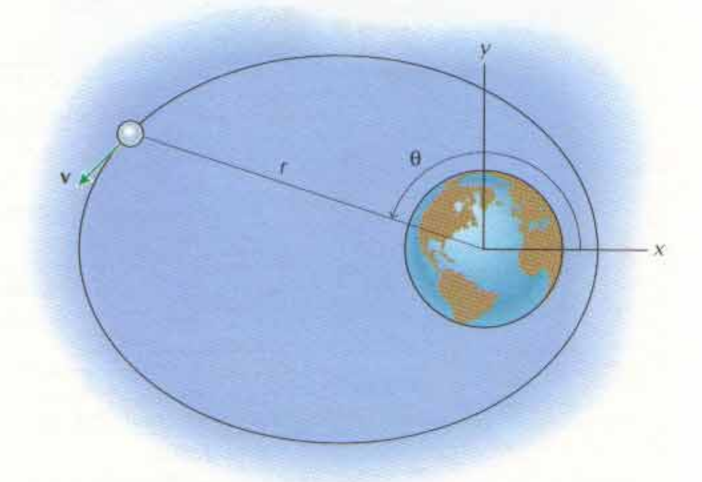


Figura P15-83

15-84* Un satélite recorre una órbita circular situada 5000 km por encima de la superficie terrestre, según se indica en la figura P15-84. En el punto A, se aumenta la velocidad para poner el satélite en órbita elíptica cuya altitud máxima sea de 10 000 km en el punto B. Determinar

a. La excentricidad e de la órbita elíptica.
b. La variación de velocidad que ha de producirse en el punto A para situar el satélite en la órbita elíptica.
c. La variación de velocidad que ha de producirse en el punto B para pasar de la órbita elíptica a la circular mayor.

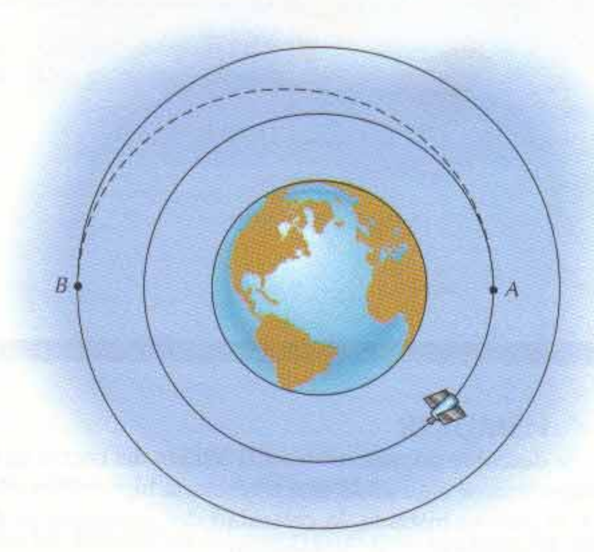


Figura P15-84

15-85 Un vehículo espacial se mueve en una órbita circular situada 480 km por encima de la superficie terrestre (v. fig. P15-85). Despreciando la resistencia del aire, determinar

a. La variación de celeridad necesaria para llevar el vehículo a la Tierra en un punto a 180° del punto en que se enciendan los cohetes de freno.
b. El tiempo empleado en el descenso.



Figura P15-85

15-86* Los satélites A y B siguen órbitas circulares situadas sobre la superficie terrestre a 200 km y 800 km, respectivamente (v. fig. P15-86). Si el satélite A ha de encontrarse con el B en el punto C siguiendo la órbita elíptica que se indica, determinar

a. En cuánto se ha de aumentar la celeridad del satélite A para ponerlo en la órbita elíptica.
b. En cuánto se ha de aumentar la celeridad del satélite A en el punto C para completar la maniobra.

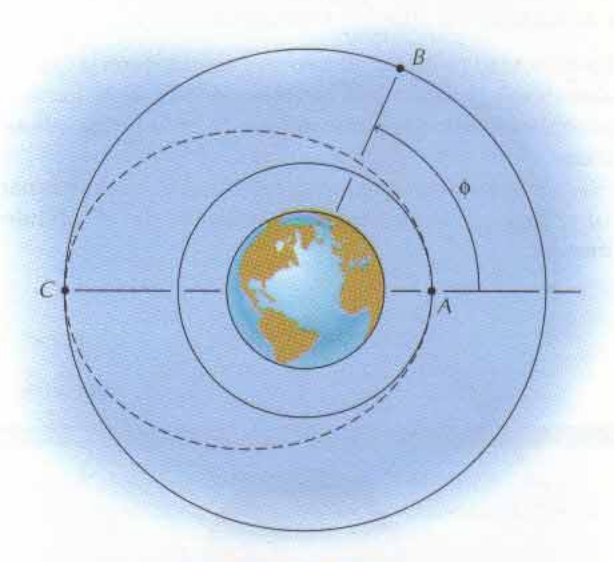


Figura P15-86

15-87 El módulo lunar sigue una órbita circular situada 80 km por encima de la superficie de la Luna (fig. P15-87). Determinar

a. En cuánto ha de reducirse la velocidad para alunizar al cabo de un cuarto de órbita (en B).
b. La celeridad con que el módulo chocaría contra la Luna si no utilizara los cohetes retropropulsores para frenar su descenso.
c. El ángulo que la velocidad del apartado b forma con la dirección radial.

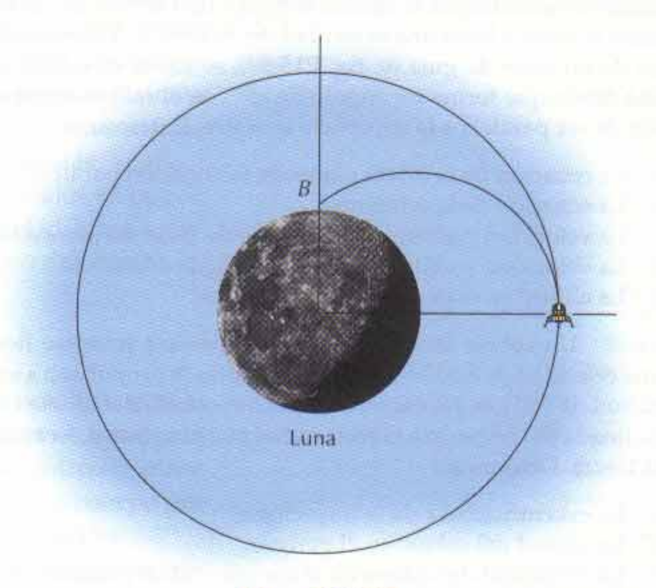


Figura P15-87

15-88* El módulo lunar, que se halla en reposo sobre la superficie de la Luna, ha de volver al módulo de mando que está recorriendo una órbita circular 80 km por encima de la superficie de la Luna (fig. P15-88). Determinar

a. La velocidad (módulo, dirección y sentido) con la que ha de abandonar el módulo lunar la superficie de la Luna para encontrarse con el módulo de mando en la forma que se indica.
b. En cuánto ha de aumentar su celeridad el módulo lunar en su apogeo para completar su encuentro con el módulo de mando.

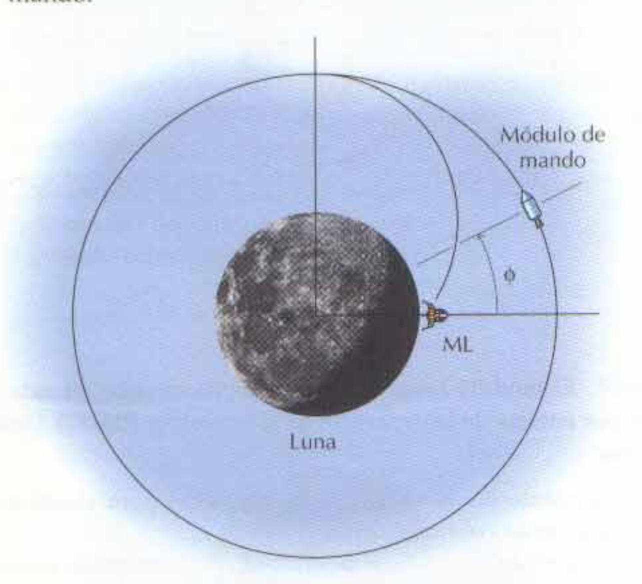


Figura P15-88

15-89 Un vehículo de lanzamiento pone a un satélite en una órbita baja alrededor de la Tierra. Cuando apaga sus cohetes el vehículo de lanzamiento, el satélite se halla a una altitud de 128 km sobre el suelo y lleva una velocidad de 7800 m / s. A consecuencia de un error de guía (v. fig. P15-89), se suelta el satélite en una órbita que forma un ángulo de 85° con el radio vector, en vez de ser paralela a la superficie terrestre. Determinar

a. La ecuación de la órbita planeada (colocación paralela).
b. La ecuación de la órbita real.
c. La velocidad y altitud en el apogeo de la órbita planeada.
d. La velocidad y altitud en el apogeo de la órbita real.
e. La altitud en el perigeo de la órbita real.

15-90* Un cohete lanzado desde la superficie terrestre lleva una celeridad de 8,85 km / s cuando finaliza la propulsión a una altitud de 550 km. En ese instante, la trayectoria del cohete está inclinada 84° respecto a la recta radial que pasa por el centro de la Tierra. Determinar

a. La excentricidad e de la trayectoria.
b. La altitud del cohete en el perigeo.
c. La velocidad del cohete en el apogeo y en el perigeo.
d. El periodo de la órbita.

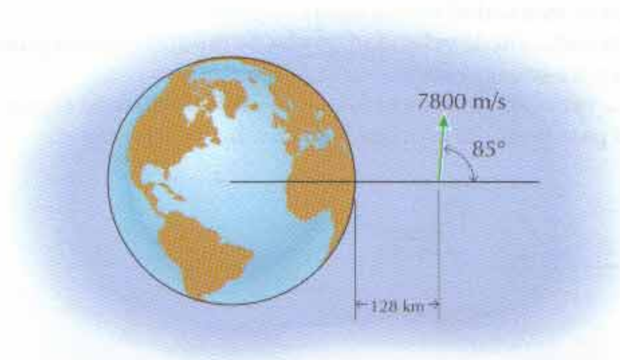


Figura P15-89

15-91 Se descubre un meteorito a 400 000 km del centro de la Tierra acercándose siguiendo una trayectoria hiperbólica (fig. P15-91). Si, en ese instante, la celeridad del meteorito es de 8000 km / h, siendo $\theta = 150°$, determinar

a. La excentricidad e de la trayectoria.
b. La mínima distancia del meteorito a la superficie terrestre.
c. La velocidad del meteorito cuando esté más próximo a la superficie terrestre.

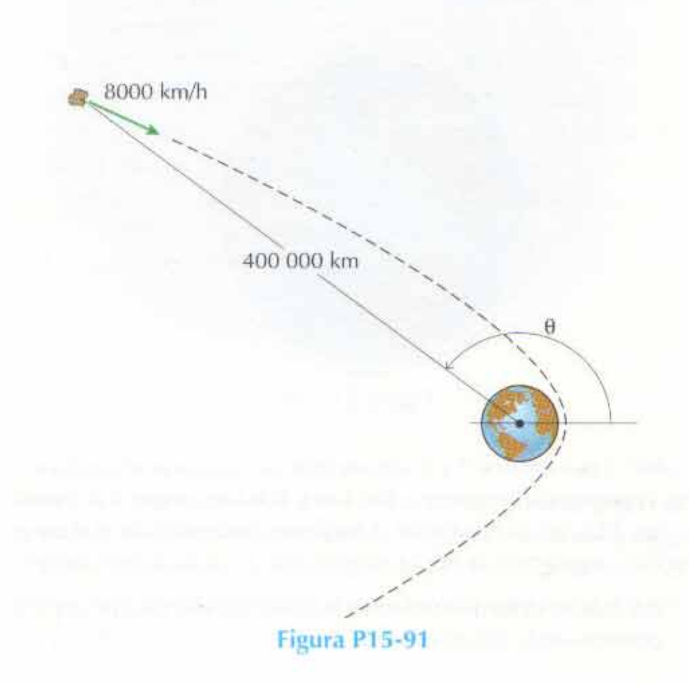


Figura P15-91

15-92 Dos satélites recorren una misma órbita circular situada 1000 km por encima de la superficie terrestre, yendo el satélite A 2500 km por delante del satélite B (fig. P15-92). El satélite B se propone "alcanzar" al satélite A "frenando" para pasar a la órbita elíptica representada. Determinar en cuánto ha de disminuir su velocidad el satélite B para alcanzar al A al cabo de

a. Un periodo en la órbita elíptica.
b. Dos periodos en la órbita elíptica.

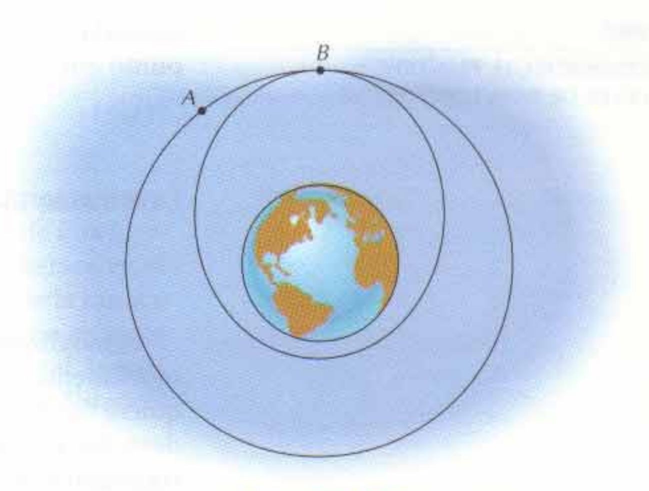


Figura P15-92

RESUMEN

La ley fundamental que rige el movimiento de un punto material es la segunda ley de Newton, la cual relaciona el movimiento acelerado de un punto con las fuerzas que originan el movimiento. Matemáticamente, la segunda ley de Newton se expresa en la forma

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{15-2}$$

La ecuación 15-2 expresa el hecho de que los módulos de **F** y **a** son proporcionales y que estos vectores tienen la misma dirección y sentido. La ecuación 15-2 es válida tanto para fuerzas constantes como para fuerzas que varíen con el tiempo. El sistema de ejes que se utilice para medir las aceleraciones debe ser un sistema inercial primario. Todo *sistema de ejes no giratorio* que se traslade con velocidad constante respecto al sistema primario es igualmente satisfactorio. En la mayoría de los problemas técnicos *en la superficie terrestre*, las correcciones a efectuar para compensar la aceleración de la Tierra respecto al sistema primario son despreciables y las aceleraciones medidas respecto a ejes solidarios a la superficie terrestre pueden tratarse como si fueran absolutas.

La ecuación del movimiento de un sistema de puntos materiales se puede obtener aplicando la segunda ley de Newton a cada punto del sistema y sumando los resultados para obtener la ecuación del movimiento del centro de masa G del sistema. Resulta así

$$\mathbf{R} = m\mathbf{a}_G \tag{15-16}$$

La ecuación 15-16 es válida para todo tipo de movimiento y nos dice que la ecuación del movimiento para un sistema de puntos materiales es igual a la ecuación del movimiento de un punto material situado en el centro de masa del sistema y que tuviera una masa igual a la total del sistema. Todo cuerpo podrá considerarse como punto material cuando se aplique esta ecuación.

El movimiento de un punto a lo largo de una recta se denomina movimiento rectilíneo y si se orienta el sistema de coordenadas de manera que el eje x

coincida con la recta de movimiento, la posición, velocidad y aceleración del punto quedarán determinadas por sus componentes x:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} \qquad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} \qquad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i}$$

La ecuación 15-2 para un punto material se reduce entonces a

$$\Sigma\mathbf{F}_x = m\mathbf{a}_x \qquad \Sigma\mathbf{F}_y = \mathbf{0} \qquad \Sigma\mathbf{F}_z = \mathbf{0} \tag{15-19}$$

El movimiento de un punto a lo largo de una trayectoria curva se denomina movimiento curvilíneo. Cuando tiene lugar en un plano, su descripción requiere dos coordenadas. Los tres sistemas de coordenadas que se utilizan para describir un movimiento curvilíneo plano son el de coordenadas cartesianas rectangulares, el de coordenadas polares y el de coordenadas normal / tangencial.

Con un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, la posición del punto se decribe mediante sus distancias a dos ejes de referencia (ejes x e y). Las ecuaciones de la posición, la velocidad y la aceleración son

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \qquad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} \qquad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}$$

La ecuación 15-2 para el punto material se reduce entonces a

$$\Sigma\mathbf{F}_x = m\mathbf{a}_x \qquad \Sigma\mathbf{F}_y = m\mathbf{a}_y \qquad \Sigma\mathbf{F}_z = \mathbf{0} \tag{15-21}$$

En un sistema de coordenadas polares, la posición del punto se describe utilizando su distancia r a un punto fijo y un desplazamiento angular θ respecto a una recta fija. El vector unitario $\mathbf{e}_r$ está dirigido radialmente en el sentido de alejamiento del punto fijo y el vector unitario $\mathbf{e}_\theta$ es perpendicular al anterior y dirigido en el sentido de los ángulos θ crecientes. Las ecuaciones de la posición, la velocidad y la aceleración son

$$\begin{gathered}\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r \qquad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\theta)\,\mathbf{e}_\theta\end{gathered} \tag{15-23}$$

La ecuación 15-2 para el punto material se reduce entonces a

$$\begin{aligned}\Sigma\mathbf{F}_r &= m\mathbf{a}_r = m\,(r - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_r \\ \Sigma\mathbf{F}_\theta &= m\mathbf{a}_\theta = m\,(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta \\ \Sigma\mathbf{F}_z &= \mathbf{0}\end{aligned} \tag{15-24}$$

En un sistema de coordenadas normal y tangencial, los vectores unitarios $\mathbf{e}_t$ y $\mathbf{e}_n$ están dirigidos tangente a la trayectoria (en el sentido de avance) y normal a ella (hacia el centro de curvatura), respectivamente, en cada punto de la trayectoria. Las ecuaciones de la velocidad y la aceleración en la posición s a lo largo de la trayectoria son

$$\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{e}_t \qquad \mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_n \tag{15-26}$$

La ecuación 15-2 para el punto material se reduce entonces a

$$\Sigma \mathbf{F}_t = m\mathbf{a}_t = m\ddot{s}\mathbf{e}_t \qquad \Sigma \mathbf{F}_n = m\mathbf{a}_n = m\,\frac{\dot{s}}{\rho}\,\mathbf{e}_n \qquad \Sigma \mathbf{F}_z = \mathbf{0} \qquad (15\text{-}27)$$

El movimiento de un punto material sometido a una fuerza dirigida siempre hacia un punto fijo se dice que es un movimiento bajo la acción de una fuerza central. Ejemplos corrientes de este tipo de movimiento los tenemos en el movimiento de los planetas alrededor del Sol y en el movimiento de la Luna y los satélites artificiales en torno a la Tierra. La fuerza que interviene en estos ejemplos viene dada por la ley de Newton de la gravitación universal, la cual dice que la fuerza **F** que se ejercen dos masas m_1 y m_2 separadas una distancia r tiene por módulo

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \qquad (15\text{-}38)$$

donde G es la constante de la gravitación universal.

PROBLEMAS DE REPASO

15-93* Un avión de caza de 125 kN de peso se lanza desde un portaaviones y aumenta su celeridad de 32 km/h (celeridad del portaaviones) a 240 km/h en 2,2 s. Determinar

a. La fuerza constante que aplica la catapulta.
b. La distancia que recorre el avión durante su lanzamiento.

15-94* Un cohete Saturno V tiene una masa de $2{,}75(10^6)$ kg y un empuje de $33(10^6)$ N. Determinar

a. La aceleración vertical inicial del cohete.
b. La velocidad del cohete 10 s después del arranque.
c. El tiempo que tarda en ascender 10 000 m.

15-95 La velocidad de una pelota de béisbol ($m = 150$ g) al ser golpeada por el bate pasa de 129 km/h en una dirección a 145 km/h en igual dirección pero sentido opuesto. Si pelota y bate están en contacto 0,005 s, ¿qué fuerza constante debe ejercer el bate sobre la pelota?

15-96* Un paracaidista, de masa 80 kg, cae a 85 m/s en el instante en que abre su paracaídas. Su celeridad se reduce a 5 m/s durante los siguientes 60 m de caída. Determinar la fuerza media que, durante este intervalo de tiempo, ejerce el paracaídas sobre su cuerpo.

15-97 Los bloques A y B de la figura P15-97 pesan 300 N y 200 N, respectivamente. Si se sueltan los bloques partiendo del reposo en la posición representada, determinar

a. La velocidad del bloque B cuando haya recorrido 3 m.
b. La tensión del cable que soporta al bloque A.

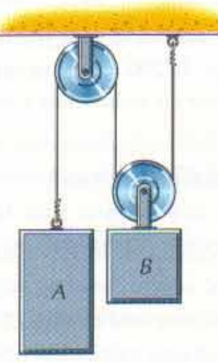


Figura P15-97

15-98* Se suelta, partiendo del reposo, el bloque A de 10 kg que está situado sobre una cuña B de 20 kg, según se indica en la figura P15-98. Si todas las superficies son lisas (exentas de rozamiento), determinar

a. La fuerza normal entre bloque y cuña.
b. La aceleración del bloque.
c. La aceleración de la cuña.

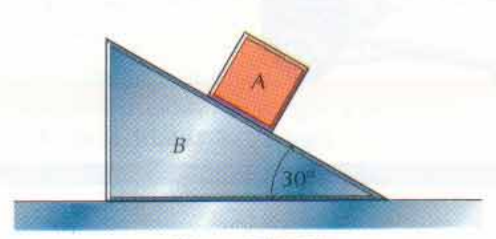


Figura P15-98

15-99 El peso del bloque A de la figura P15-99 es de 250 N. El bloque está en reposo y el resorte (k = 17 N/m) tiene su longitud natural en el instante en que se suelta el bloque e inicia su movimiento. Determinar

a. La velocidad del bloque cuando haya recorrido 0,9 m.
b. La distancia máxima que recorrerá el bloque a partir de su posición inicial.

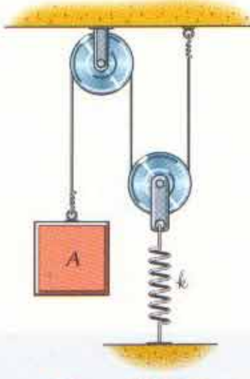


Figura P15-99

15-100 El motor a reacción de un misil de masa 15 000 kg proporciona un empuje de 200 kN. Si se lanza el misil en dirección vertical, determinar su velocidad y la altura alcanzada al cabo de 1 min si

a. Se desprecia la resistencia del aire.
b. La resistencia del aire origina una fuerza resistiva $F_R = 0{,}25v^2$, donde F_R se expresa en newton y v en metros por segundo.

15-101* Se dispara un proyectil de peso 250 N, según se indica en la figura P15-101, con una velocidad inicial de 450 m/s. Si se puede despreciar la resistencia del aire, determinar el radio de curvatura de la trayectoria del proyectil en su punto más alto.

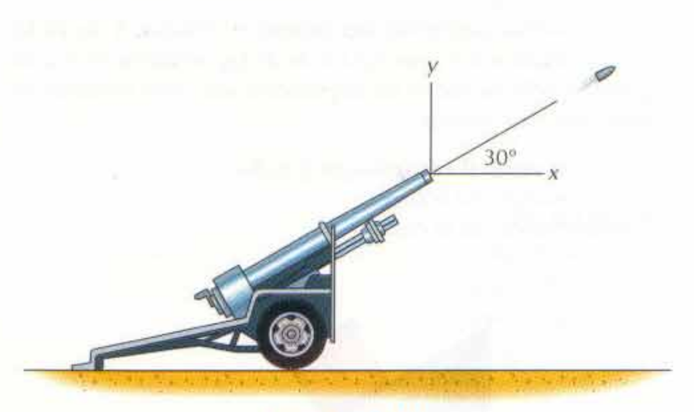


Figura P15-101

15-102* El disco representado en la figura P15-102 gira en un plano vertical. Al movimiento del cuerpo A (m = 1 kg) en la guía radial lisa se opone un resorte unido al cubo del disco. Cuando el disco está en la posición representada, su velocidad angular es de 100 rad/s en sentido horario y su aceleración angular es de 25 rad/s^2 en sentido antihorario. Determinar, en ese instante,

a. La fuerza que el disco ejerce sobre el cuerpo A
b. La constante k del resorte si la posición de reposo del cuerpo A está a 350 mm del eje del disco.

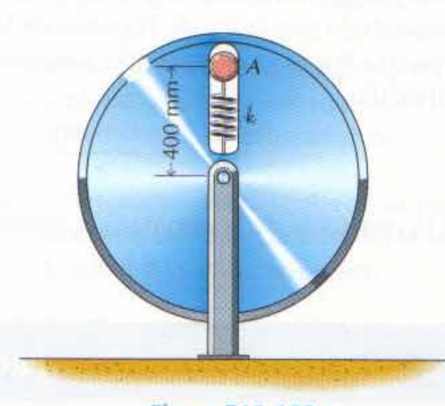


Figura P15-102

15-103 Una barra ranurada, que gira alrededor de un punto fijo A según se indica en la figura P15-103, lleva un punto material P a lo largo de una guía circular. La velocidad angular de la barra es de 25 rad/s en sentido horario y su aceleración angular es de 20 rad/s^2 en sentido antihorario. Si todas las superficies son lisas, determinar las fuerzas que se ejercen sobre el punto material cuando (a) $\theta = 60°$ y $\theta = 120°$.

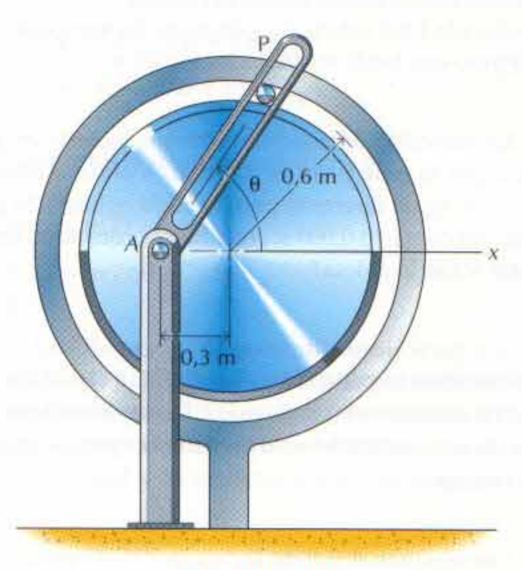


Figura P15-103

15-104 Una esfera S de masa 5 kg está unida a un bloque B de 1 kg que se desliza libremente por una guía horizontal lisa según se indica en la figura P15-104. La masa de la varilla que une la esfera al bloque es despreciable. Si se suelta el sistema partiendo del reposo en la posición representada, determinar

a. La tensión de la varilla al empezar el movimiento.
b. La aceleración del bloque al empezar el movimiento.

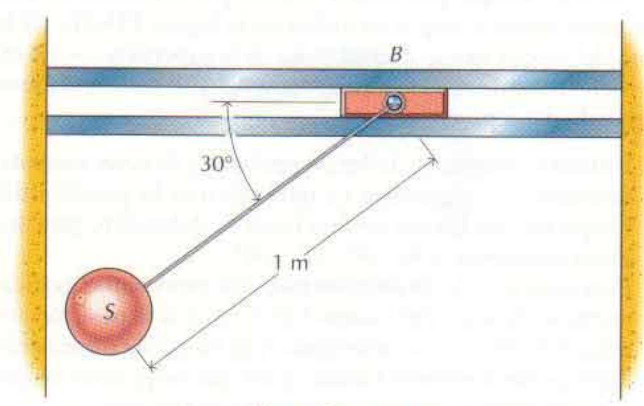


Figura P15-104

15-105 Una esfera de 1 kg se desliza por una varilla lisa contenida en un plano vertical y cuya forma puede describirse mediante la ecuación $y = \sqrt{0,3x}$, donde x e y se miden en metros. Cuando la esfera se encuentra en la posición A o la B de la figura P15-105, su celeridad es de 3 m/s hacia la izquierda. Si el resorte (k = 50 N/m) tiene una longitud natural de 0,6 m, determinar la aceleración de la esfera y la fuerza que ejerce sobre ella la varilla

a. Cuando la esfera pase por la posición A.
b. Cuando la esfera pase por la posición B.

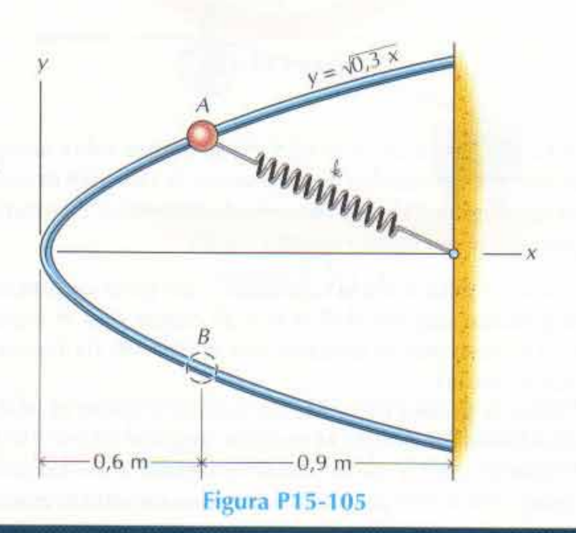


Figura P15-105

15-106 El bloque B (m = 0,50 kg) se mueve por una guía circular lisa contenida en un plano vertical, según se indica en la figura P15-106. Cuando el bloque se halla en la posición representada, su celeridad es de 20 m/s hacia arriba y la izquierda. Si la longitud natural del resorte (k = 25 N/m) es 300 mm, determinar la aceleración del bloque y la fuerza que sobre él ejerce la superficie de la guía.

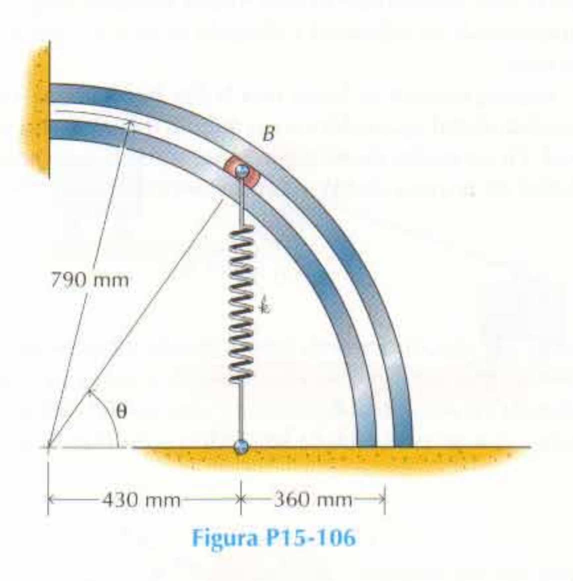


Figura P15-106

15-107* Determinar la celeridad orbital y el periodo de un satélite en órbita circular situada a 1600 km de la superficie terrestre.

15-108* Un cohete transporta un satélite hasta un punto situado 1500 km por encima de la superficie terrestre. Determinar la velocidad (paralela a la superficie terrestre) que se necesita para poner el satélite

a. En órbita circular.
b. En una trayectoria parabólica.
c. En una trayectoria hiperbólica de excentricidad 1,40.

15-109 A una altitud de 1200 km sobre la superficie terrestre se pone en órbita un satélite con una velocidad de 28 800 km/h paralela a la superficie terrestre. Determinar

a. La excentricidad e de la órbita.
b. Las altitudes máxima y mínima de la trayectoria del satélite.

15-110 La altitud de un satélite en una órbita elíptica alrededor de la Tierra vale 3600 km en el apogeo y 900 km en el perigeo. Determinar

a. La excentricidad e de la órbita.
b. Las celeridades orbitales en apogeo y perigeo.
c. El periodo de la órbita.

C15-111 Cuando se desprecia la resistencia del aire, es fácil demostrar que las trayectorias de los cuerpos que se mueven en la proximidad de la superficie terrestre son parabólicas. Sin embargo, al moverse los cuerpos en el seno de un fluido (tal como el aire) experimentan una fuerza resistiva proporcional al cuadrado de su celeridad y dirigida en sentido opuesto a su velocidad.

Supóngase que se lanza una bolita hacia arriba con una velocidad inicial v_0 que forma un ángulo inicial θ_0 con la horizontal. En un punto de su trayectoria, sobre la bola se ejercen la fuerza de la gravedad W y la resistencia del aire

$$D = C_D \frac{1}{2} \rho v^2 A$$

donde C_D es el coeficiente de forma (puede tomarse aproximadamente igual a un medio en el caso de esferas de celeridad moderada), ρ es la densidad del aire a través del cual se mueve la bola y $A = \pi r^2$ es el área de su sección recta (fig. P15-111).

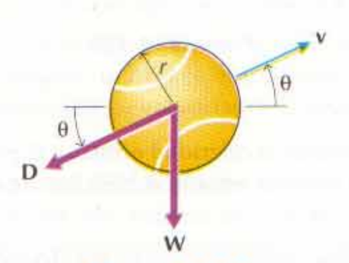


Figura P15-111

a. Si se lanza una pelota de tenis ($W = 0{,}556$ N, $r = 3{,}175$ cm) con una celeridad inicial $v_0 = 18$ m/s a través del aire ($\rho = 1{,}293$ kg/m^3), utilizar el método de Euler de resolución de ecuaciones diferenciales (v. Apéndice C) para calcular la posición de la bola en función del tiempo hasta que vuelva a caer al suelo, para los ángulos iniciales $\theta_0 = 15°, 30°, 45°$ y $60°$.
b. Representar gráficamente la trayectoria (y en función de x) para cada uno de los ángulos iniciales, en una misma gráfica. En la misma gráfica, representar la trayectoria de la bola, para cada ángulo inicial, en el caso de prescindir de la resistencia del aire
c. Calcular y representar gráficamente el alcance (distancia horizontal entre los puntos inicial y final de la trayectoria) para distintos ángulos iniciales θ_0 ($30° \leq \theta_0 \leq 60°$). Cuando se desprecia la resistencia del aire, el alcance máximo se logra para $\theta_0 = 45°$. ¿Qué ángulo da el máximo alcance cuando se incluye la resistencia del aire?
d. Repítanse los cálculos para el caso de una velocidad inicial $v_0 = 9$ m/s. El ángulo que da el alcance máximo, ¿depende de la celeridad inicial cuando se incluye la resistencia del aire?

C15-112 Un bloque pequeño se desliza por el interior de una superficie esférica, según se indica en la figura P15-112. Si la masa del bloque es $m = 2$ kg, el radio de la superficie $r = 1{,}5$ m, los coeficientes de rozamiento $\mu_s = \mu_k = 0{,}3$ y se suelta el bloque partiendo del reposo con $\theta = \theta_0$,

a. Utilizar el método de Euler de resolución de ecuaciones diferenciales (v. Apéndice C) para calcular la posición del bloque en función del tiempo hasta su detención, para ángulos iniciales $\theta_0 = 80°, 60°, 45°$ y $30°$.
b. Para cada uno de los ángulos iniciales, representar gráficamente en función del tiempo t ($0 \leq t \leq 5$ s) la posición angular θ del bloque, su celeridad v y la fuerza de rozamiento F que se ejerce sobre el bloque. (Hay que asegurarse de que el rozamiento se oponga siempre al movimiento.)
c. ¿Para qué ángulo inicial θ_0 se detendrá el bloque justo cuando llegue al punto más bajo de la superficie? ¿Para qué ángulo inicial θ_0 se detendrá el bloque en el punto más alto del otro lado de la superficie? ¿Para qué ángulo inicial θ_0 se detendrá el bloque en el punto más alto del mismo lado de la superficie? (Posiblemente después de rebasar el punto más bajo y regresar) ¿Dependen los resultados del peso del cuerpo?

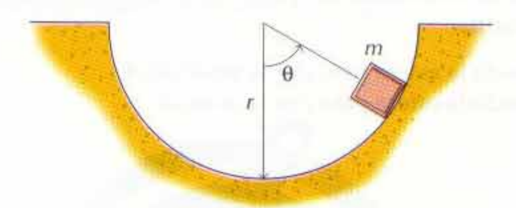


Figura P15-112

C15-113 Un pisapapeles ($W = 12{,}5$ N) se desliza sobre la superficie exterior de un cilindro de revolución de radio 0,6 m según se indica en la figura P15-113. Si se puede despreciar el rozamiento y el peso parte del reposo cuando $\theta = 0°$,

a. Trazar la gráfica de la celeridad v del peso en función de la posición angular θ ($0 \leq \theta \leq \beta$) donde β es el ángulo al cual el peso pierde contacto con el cilindro (la fuerza normal se anula).
b. Trazar la gráfica de la fuerza normal N entre el peso y el cilindro en función de la posición angular θ ($0 \leq \theta \leq \beta$).
c. Trazar la gráfica de la posición angular θ en función del tiempo t ($0 \leq t \leq t_\beta$). (Puede ser necesario utilizar el método

de Euler de resolución de ecuaciones diferenciales. Véase el Apéndice C.)

d. Repetir el problema para el caso $\mu_s = \mu_k = 0{,}3$ y ($\phi_s \leq \theta \leq \beta$) donde $\phi_s = \tan^{-1}\mu_s$ es el ángulo de rozamiento estático. (Supóngase que el peso parte del reposo en $\theta = \phi_s$.)

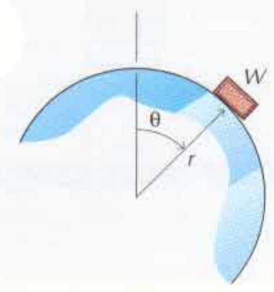


Figura P15-113

C15-114 Se tira hacia la izquierda del carrito de 10 kg representado en la figura P15-114 aplicando una fuerza constante $P = 10$ N al extremo del hilo. Si el carrito parte del reposo cuando $x = 8$ m, calcular y representar gráficamente

a. La celeridad v del carrito en función de su posición x ($-3 \leq x \leq 8$ m).
b. La posición x del carrito en función del tiempo t ($0 \leq t \leq 5$ s).
(Puede ser necesario utilizar el método de Euler de resolución de ecuaciones diferenciales. Véase Apéndice C.)

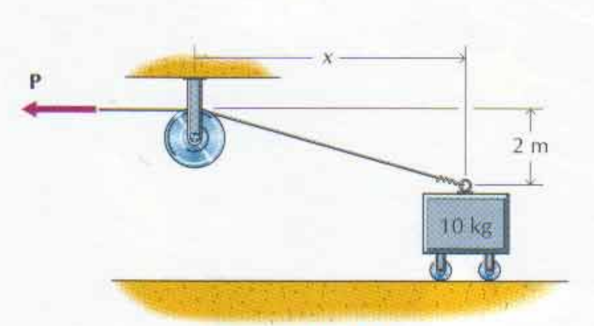


Figura P15-114

C15-115 Se tira hacia la izquierda de la pareja de carritos representada en la figura P15-115 aplicando una fuerza constante $P = 10$ N. El carrito A pesa 50 N, el B 100 N y el sistema parte del reposo cuando $x = 7{,}2$ m. Utilizar el método de Euler de resolución de ecuaciones diferenciales (v. Apéndice C) para calcular la posición y velocidad de ambos carritos en función del tiempo. Después, representar gráficamente:

a. Las velocidades v_A y v_B de los carritos en función de x ($-1{,}5 \leq x \leq 7{,}2$ m).
b. La tensión T del hilo que los une en función de x ($-1{,}5 \leq x \leq 7{,}2$ m).
c. La posición del carrito B en función del tiempo t ($0 \leq t \leq 5$ s).

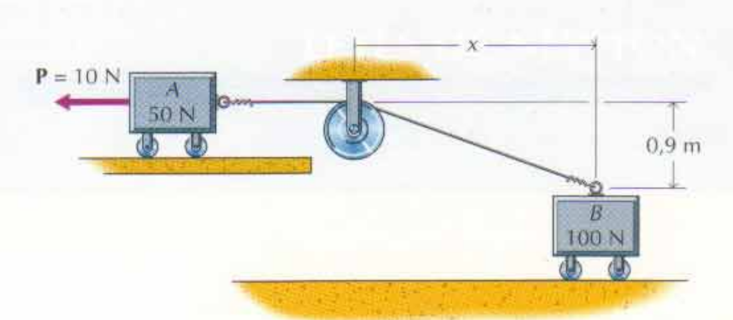


Figura P15-115

C15-116 Una masa de 30 kg está sostenida por un hilo que pasa por tres poleas pequeñas, según se indica en la figura P15-116. Al otro extremo del hilo se aplica una fuerza constante $P = 200$ N. Si el sistema parte del reposo cuando $y = 2$ m, utilizar el método de Euler de resolución de ecuaciones diferenciales (v. Apéndice C) para calcular la posición y la velocidad de la masa en función del tiempo. Después, representar gráficamente

a. La posición y de la masa en función del tiempo t ($0 \leq t \leq 10$ s).
b. La velocidad v de la masa en función del tiempo t ($0 \leq t \leq 10$ s).

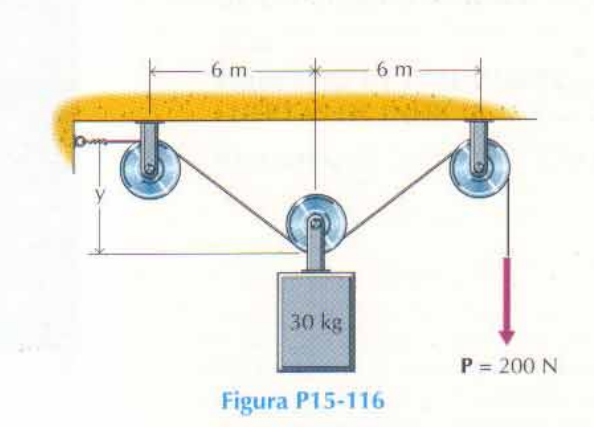


Figura P15-116

C15-117 La pareja de bloques representada en la figura P15-117 penden de un hilo que pasa por tres poleas pequeñas. El peso del bloque A es de 300 N, el de B 200 N y el sistema parte del reposo cuando $y = 1{,}8$ m. Utilizar el método de Euler de resolución de ecuaciones diferenciales (v. Apéndice C) para calcular la posición y la velocidad de los bloques en función del tiempo. Después, representar gráficamente

a. La posición y del bloque A en función del tiempo t ($0 \leq t \leq 15$ s).
b. Las velocidades v_A y v_B de los bloques en función del tiempo t ($0 \leq t \leq 15$ s).
c. La tensión T del hilo que los une en función del tiempo t ($0 \leq t \leq 15$ s).

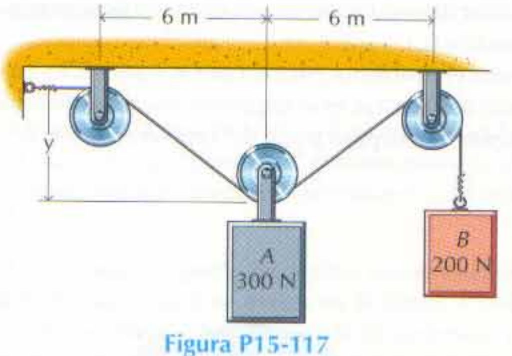


Figura P15-117

16 CINÉTICA DEL CUERPO RÍGIDO: LEYES DE NEWTON



Para orientar el telescopio espacial se requieren fuerzas y momentos antes de su despliegue por la tripulación del Discovery.

16.1 INTRODUCCIÓN

Podemos considerar que un cuerpo rígido es un conjunto de puntos materiales; por tanto, en el caso de un cuerpo rígido, podremos utilizar las relaciones desarrolladas en el capítulo 15 para el movimiento de un sistema de puntos materiales. En este capítulo vamos a aplicar muchas veces la ecuación 15-16 que relaciona la resultante **R** de las fuerzas aplicadas exteriormente con la aceleración $\mathbf{a}_G$ del centro de masa G en el caso particular en que la recta soporte de la resultante **R** pase por el centro de masa G del sistema. En el caso más general en que la resultante del sistema de fuerzas exteriores consista en una fuerza resultante **R** que pase por el centro de masa G más un par de momento **C**, el cuerpo experimentará rotación y traslación y se necesitarán ecuaciones adicionales para relacionar los momentos de las fuerzas exteriores con el movimiento angular del cuerpo.

16.2 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO PLANO

Las leyes de Newton sólo son aplicables al movimiento (traslación) de un punto material; por tanto, no son adecuadas para describir el movimiento completo de un cuerpo rígido, el cual puede ser de traslación y de rotación. En este apartado, vamos a extender las leyes de Newton para que cubran el movimiento plano de un cuerpo rígido. Más adelante, en el apartado 16.5, extenderemos aún más las leyes de Newton para que cubran el caso general del movimiento tridimensional de un cuerpo rígido. Estas leyes (para el movimiento plano o para el tridimensional) proporcionan ecuaciones diferenciales que relacionan el movimiento acelerado lineal y angular del cuerpo con las fuerzas y momentos que lo originan. Dichas ecuaciones pueden utilizarse para determinar

1. Las aceleraciones instantáneas ocasionadas por fuerzas y momentos conocidos, o
2. Las fuerzas y momentos que se necesitan para originar un movimiento prefijado.

En el capítulo 15 se desarrolló el "principio del movimiento del centro de masa". Como un cuerpo rígido se puede considerar como un conjunto de puntos materiales que mantienen invariables sus distancias mutuas, el movimiento del centro de masa G de un cuerpo rígido vendrá dado por la ecuación 15-16

$$\mathbf{R} = m\mathbf{a}_G \qquad (15\text{-}16)$$

donde

R es la resultante de las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo en un instante dado.
m es la masa del cuerpo.
$\mathbf{a}_G$ es la aceleración lineal instantánea del centro de masa del cuerpo rígido en la dirección de la fuerza resultante **R**.

Esta ecuación vectorial se puede escribir en forma escalar según las tres ecuaciones correspondientes a sus componentes:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= R_x = ma_{Gx} \\ \Sigma F_y &= R_y = ma_{Gy} \\ \Sigma F_z &= R_z = ma_{Gz} \end{aligned} \qquad (15\text{-}17)$$

Como la ecuación 15-16 se obtuvo sumando fuerzas, simplemente, no se tiene ninguna información acerca de la situación de la recta soporte de la fuerza resultante **R**. El centro de masa G de un cuerpo rígido se mueve (traslada) como si dicho cuerpo fuese un punto material de masa m sometido a la fuerza resultante **R**. El movimiento real de la mayoría de los cuerpos rígidos consiste en la superposición de la traslación originada por la fuerza resultante **R** y la rotación debida al momento de esta fuerza cuando su recta soporte no pasa por el centro de masa G del cuerpo.

Consideremos el cuerpo rígido de forma arbitraria representado en la figura 16-1a. El sistema de coordenadas XYZ está fijo en el espacio. El sistema de coordenadas xyz es solidario al cuerpo en el punto A. El desplazamiento de un elemento de masa dm respecto al punto A viene dado por el vector $\boldsymbol{\rho}$ y respecto al origen O del sistema de coordenadas XYZ viene dado por el vector **R**. El desplazamiento del punto A respecto al origen O del sistema XYZ lo da el vector **r**. Las resultantes de las fuerzas exteriores e interiores que se ejercen sobre el elemento de masa dm son **F** y **f**, respectivamente. El momento respecto al punto A de las fuerzas **F** y **f** es

$$d\mathbf{M}_A = \boldsymbol{\rho} \times (\mathbf{F} + \mathbf{f}) \qquad (a)$$

Pero, según la segunda ley de Newton,

$$\mathbf{F} + \mathbf{f} = dm\,\mathbf{a}_{dm} = dm\,\ddot{\mathbf{R}} \qquad (b)$$

Así pues, de las ecuaciones a y b,

$$d\mathbf{M}_A = \boldsymbol{\rho} \times (\mathbf{F} + \mathbf{f}) = (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{a}_{dm})\,dm \qquad (c)$$

La aceleración $\mathbf{a}_{dm}$ de un cuerpo rígido en movimiento plano o en movimiento tridimensional cualquiera puede escribirse en la forma

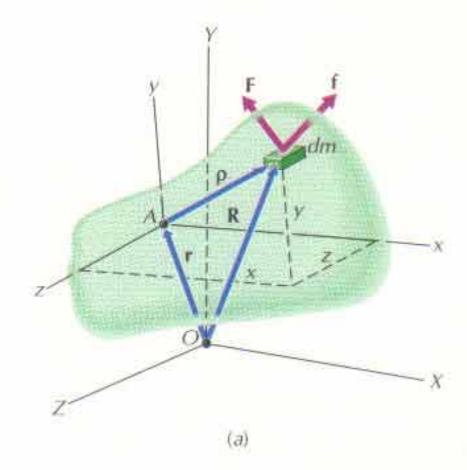
$a_{dn} = a_A + \alpha \wedge A\vec{d}m + W^2 \wedge A\vec{d}m$

$$\mathbf{a}_{dm} = \mathbf{a}_A + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho}) + [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})] \qquad (14\text{-}29)$$

Sustituyendo la ecuación 14-29 en la ecuación c e integrando, tenemos

$$\mathbf{M}_A = \int_m (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{a}_A)\,dm + \int_m [\boldsymbol{\rho} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho})]\,dm + \int_m \{\boldsymbol{\rho} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})]\}\,dm \qquad (d)$$

El movimiento plano de un cuerpo rígido lo definimos diciendo que es un movimiento en el cual todos los elementos del cuerpo se mueven en planos paralelos. Al plano paralelo que contiene el centro de masa G del cuerpo le llamamos "plano del movimiento". Así pues, según se ve en la figura 16-1b, los vectores velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ serán paralelos entre sí y perpendiculares al plano del movimiento. Si tomamos el sistema de coordenadas xyz de manera que el movimiento sea paralelo al plano xy, será $a_{Az} = \omega_x = \omega_y = 0$. La velocidad angular del cuerpo será $\omega_z = \omega$ y la aceleración angular será $\dot{\omega}_z = \alpha$. Para el movimiento en el plano xy, los diferentes términos



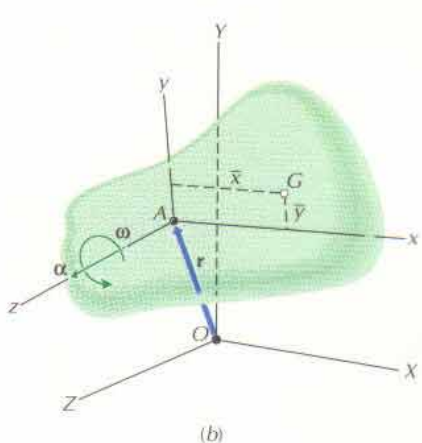


Figura 16-1

que aparecen en la ecuación d, cuando el punto A está situado en el plano del movimiento, se evalúan de la manera siguiente:

$$\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{a}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ a_{Ax} & a_{Ay} & 0 \end{vmatrix} = -za_{Ay}\mathbf{i} + za_{Ax}\mathbf{j} + (xa_{Ay} - ya_{Ax})\,\mathbf{k} \quad (e)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \alpha \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\alpha\,\mathbf{i} + x\alpha\,\mathbf{j}$$

Análogamente

$$\boldsymbol{\rho} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho}) = -xz\alpha\,\mathbf{i} - yz\alpha\,\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\,\alpha\mathbf{k} \quad (f)$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = -y\omega\mathbf{i} + x\omega\mathbf{j}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) = -x\omega^2\mathbf{i} - y\omega^2\mathbf{j}$$

$$\boldsymbol{\rho} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})] = yz\omega^2\mathbf{i} - zx\omega^2\mathbf{j} \quad (g)$$

Consideremos ahora las componentes cartesianas del momento $\mathbf{M}_A$.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= M_{Ax}\mathbf{i} + M_{Ay}\mathbf{j} + M_{Az}\mathbf{k} \\ &= \int_m (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{a}_A)\,dm + \int_m [\boldsymbol{\rho} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho})]\,dm \\ &\quad + \int_m \{\boldsymbol{\rho} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho})]\}\,dm \end{aligned} \quad (h)$$

Aplicando las ecuaciones e, f y g en la ecuación h tenemos las siguientes expresiones generales de las tres componentes del momento en el punto A:

$$\begin{aligned} M_{Ax} &= -a_{Ay}\int_m z\,dm - \alpha\int_m zx\,dm + \omega^2\int_m yz\,dm \\ M_{Ay} &= a_{Ax}\int z\,dm - \alpha\int_m yz\,dm + \omega^2\int_m zx\,dm \\ M_{Az} &= a_{Ay}\int x\,dm - a_{Ax}\int_m y\,dm + \alpha\int_m (x^2 + y^2)\,dm \end{aligned} \quad (16\text{-}1)$$

Las integrales de la forma $\int_m x\,dm$ son las expresiones de los momentos primeros que suelen estudiarse en detalle en la mayoría de los cursos de Estática. Las integrales de la forma $\int_m x^2\,dm$ y $\int_m xy\,dm$ son semejantes a las expresiones encontradas anteriormente en Estática para los momentos segundos de superficie y los momentos segundos mixtos de superficie. Las integrales de las ecuaciones 16-1 representan las propiedades inerciales del cuerpo rígido y reciben el nombre de momentos de inercia y productos de inercia, respectivamente. En el Apéndice A de este libro se ofrece un estudio completo de los momentos y pro-

ductos de inercia, junto con algunos ejemplos resueltos y una extensa selección de problemas para resolver en casa. Para aquéllos que hayan estudiado el tema con cierto detalle en algún curso de Estática previo, en el apartado siguiente se da un breve repaso de los momentos y productos de inercia. Quienes tengan un buen conocimiento del tema pueden prescindir del apartado que sigue.

Los momentos primeros, momento de inercia y productos de inercia que figuran en las ecuaciones 16-1 son

$$\begin{aligned} &\int_m x\,dm = \bar{x}m && \int_m zx\,dm = I_{Azx} \\ &\int_m y\,dm = \bar{y}m && \int_m yz\,dm = I_{Ayz} \\ &\int_m z\,dm = \bar{z}m && \int_m (x^2+y^2)\,dm = I_{Az} \end{aligned} \qquad \text{(16-2)}$$

Las ecuaciones 16-1 escritas en función de los momentos primeros y los momentos y productos de inercia dados en las ecuaciones 16-2 quedan en la forma

$$\begin{aligned} M_{Ax} &= -\alpha\, I_{Azx} + \omega\, I_{Ayz} \\ M_{Ay} &= -\alpha\, I_{Ayz} + \omega^2\, I_{Azx} \\ M_{Az} &= a_{Ay}\,\bar{x}m - a_{Ax}\,\bar{y}m + \alpha\, I_{Az} \end{aligned} \qquad \text{(16-3)}$$

Este sistema de ecuaciones relaciona los momentos de las fuerzas exteriores que se ejercen sobre el cuerpo rígido con las velocidades angulares y las propiedades inerciales del cuerpo. Los momentos de las fuerzas y los momentos y productos de inercia lo son respecto a los ejes xyz que pasan por el punto A y están fijos en el cuerpo. En el caso en que dichos ejes no estuvieran fijos en el cuerpo, los momentos y productos de inercia serían funciones del tiempo. Las ecuaciones 16-2 muestran claramente cómo depende el momento respecto a un eje dado de la velocidad angular ω en torno al eje z. Dicho de otro modo, las ecuaciones muestran que pueden ser necesarios los momentos M_{Ax} y M_{Ay} para mantener el movimiento plano en torno al eje z.

En la mayoría de los problemas de Dinámica referentes al movimiento plano, se pueden simplificar considerablemente las ecuaciones 16-3. Cuando el cuerpo sea simétrico respecto al plano del movimiento, los términos producto de inercia se anulan ($I_{Ayz} = I_{Azx} = 0$) y las ecuaciones 16-3 se reducen a

$$\begin{aligned} M_{Ax} &= 0 \\ M_{Ay} &= 0 \\ M_{Az} &= a_{Ay}\,\bar{x}m - a_{Ax}\,\bar{y}m + \alpha\, I_{Az} \end{aligned} \qquad \text{(16-4)}$$

Por último, tomando el origen del sistema de coordenadas xyz en el centro de masa G del cuerpo $\bar{x} = \bar{y} = 0$ y las ecuaciones 16-4 se reducen a

$$\begin{aligned} M_{Gx} &= 0 \\ M_{Gy} &= 0 \\ M_{Gz} &= I_{Gz}\,\alpha \end{aligned} \qquad \text{(16-5)}$$

Las ecuaciones 16-3 a 16-5 junto con las ecuaciones 15-17 proporcionan las relaciones que se necesitan para resolver una amplia variedad de problemas de movimiento plano. Este tema se tratará extensamente en el apartado 16.4 a continuación del estudio de los momentos y productos de inercia de los apartados siguientes.

16.3 MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA

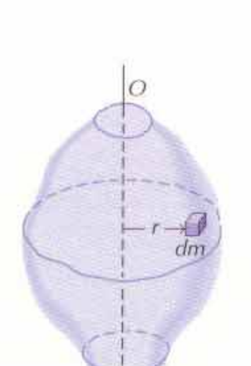


Figura 16-2

En el anterior estudio del movimiento de un cuerpo rígido, hemos encontrado integrales que contenían el producto de la masa de un pequeño elemento del cuerpo por el cuadrado de su distancia a una recta de interés. A tal producto se le llama momento segundo de la masa del elemento o, más corrientemente, momento de inercia del elemento.

16.3.1 Momento de inercia

El momento de inercia dI del elemento de masa dm representado en la figura 16-2 respecto al eje OO es, por definición,

$$dI = r^2\ dm$$

El momento de inercia de todo el cuerpo respecto al eje OO es, por definición,

$$I = \int_m r^2\ dm \tag{16-6}$$

Como tanto la masa del elemento como el cuadrado de su distancia al eje son positivos, el momento de inercia de una masa será siempre una cantidad positiva.

Las dimensiones de un momento de inercia son las de una masa multiplicada por el cuadrado de una longitud, ML^2. Las unidades de medida del momento de inercia son: en el sistema SI el $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ y en el U.S. Customary System, como las magnitudes fundamentales son fuerza, longitud y tiempo, la masa tiene por dimensiones FT^2L^{-1} y la unidad de momento de inercia será $\text{lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{ft}$. Si la masa W/g del cuerpo se expresa en slugs ($\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$), la unidad de medida del momento de inercia en el U.S. Customary System será el $\text{slug} \cdot \text{ft}^2$.

Los momentos de inercia de un cuerpo respecto a un sistema de coordenadas xyz se pueden determinar considerando un elemento de masa, según se indica en la figura 16-3. De la definición de momento de inercia,

$$dI_x = r_x^2\ dm = (y^2 + z^2)\ dm$$

Para los ejes y y z pueden escribirse expresiones análogas. Así pues,

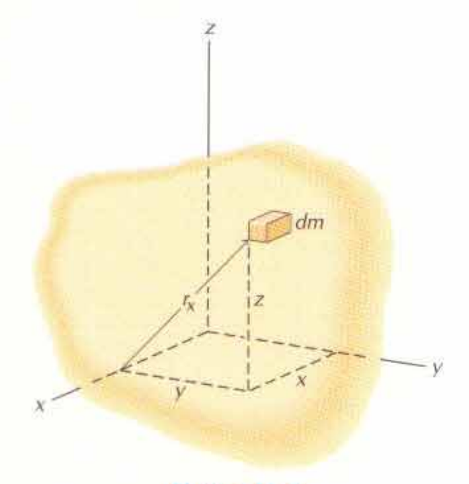


Figura 16-3

$$\begin{aligned} I_x &= \int_m r_x^2\ dm = \int_m (y^2 + z^2)\ dm \\ I_y &= \int_m r_y^2\ dm = \int_m (z^2 + x^2)\ dm \\ I_z &= \int_m r_z^2\ dm = \int_m (x^2 + y^2)\ dm \end{aligned} \tag{16-7}$$

Cuando se utilicen métodos de integración para determinar el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje, la masa de dicho cuerpo se puede des-

componer de diversas formas en elementos. Según cómo se tomen los elementos, será necesaria una integral simple, doble o triple. La configuración geométrica del cuerpo suele determinar que se utilicen coordenadas cartesianas o coordenadas polares.

En ciertos casos, el cuerpo puede considerarse como un sistema de puntos materiales. El momento de inercia de un sistema de puntos materiales respecto a una recta de interés es la suma de los momentos de inercia de dichos puntos respecto a la recta en cuestión. Así pues, si representamos por $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ las masas de los puntos materiales y por $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ sus distancias a una recta dada, el momento de inercia del sistema respecto de ésta se podrá expresar en la forma

$$I = \sum mr^2 = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots + m_nr_n^2$$

Los momentos de inercia de placas delgadas se pueden determinar con relativa facilidad. Por ejemplo, consideremos la placa delgada representada en la figura 16-4. Tiene una densidad uniforme ρ, un grosor uniforme t y una área de la sección recta A. Los momentos de inercia respecto a los ejes x, y y z son, por definición,

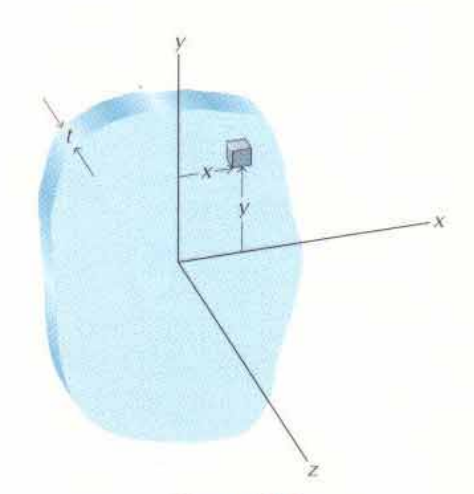


Figura 16-4

$$\begin{aligned} I_{xm} &= \int_m y^2\,dm = \int_V y^2\rho\,dV = \int_A y^2\rho t\,dA = \rho t\int_A y^2\,dA = \rho t\,I_{xA} \\ I_{ym} &= \int_m x^2\,dm = \int_V x^2\rho\,dV = \int_A x^2\rho t\,dA \\ &= \rho t\int_A x^2\,dA = \rho t\,I_{yA} \\ I_{zm} &= \int_m (x^2+y^2)\,dm = \rho t\,I_{yA} + \rho t\,I_{xA} = \rho t\,(I_{yA} + I_{xA}) \end{aligned} \tag{16-8}$$

donde los subíndices m y A significan momentos de inercia y momentos segundos de superficie, respectivamente. Como las ecuaciones de los momentos de inercia de placas delgadas contienen las expresiones de los momentos segundos de superficie, los resultados que se consignan en el Apéndice B (tabla B-3) para los momentos segundos de superficie se podrán utilizar para los momentos de inercia sin más que multiplicar por ρt los resultados consignados en la tabla.

Los momentos de inercia respecto a los ejes x, y y z de un cuerpo tridimensional cualquiera se pueden determinar utilizando las ecuaciones 16-7. Si la densidad del cuerpo es uniforme, el elemento de masa dm se puede expresar en función del elemento de volumen dV del cuerpo en la forma $dm = \rho\,dV$. Las ecuaciones 16-7 quedan entonces en la forma

$$\begin{aligned} I_x &= \rho\int_V (y^2+z^2)\,dV \\ I_y &= \rho\int_V (z^2+x^2)\,dV \\ I_z &= \rho\int_V (x^2+y^2)\,dV \end{aligned} \tag{16-9}$$

Si la densidad del cuerpo no fuese uniforme, debería expresarse en función de la posición y mantenerse dentro del signo integral.

En la práctica, frecuentemente, el cuerpo de interés se puede descomponer en varias formas sencillas tales como cilindros, esferas, placas o varillas, para las cuales se han calculado y tabulado sus momentos de inercia. El momento de inercia de un cuerpo compuesto, respecto a un eje cualquiera, es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a dicho eje de las distintas partes que constituyen el cuerpo. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} I_x &= \int_m (y^2+z^2)\,dm \\ &= \int_{m_1} (y^2+z^2)\,dm_1 + \int_{m_2} (y^2+z^2)\,dm_2 + \ldots + \int_{m_n} (y^2+z^2)\,dm_n \\ &= I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} + \ldots + I_{xn} \end{aligned}$$

Cuando una de las partes componentes sea un agujero, su momento de inercia deberá restarse del momento de inercia de la parte mayor a fin de obtener el momento de inercia del cuerpo compuesto. En el Apéndice B (tabla B-5) se da una lista de momentos de inercia de formas que se encuentran frecuentemente tales como varillas, placas, cilindros, esferas y conos.

16.3.2 Radio de giro

La definición de momento de inercia (ec. 16-6) nos indica que las dimensiones del momento de inercia son las de una masa multiplicada por el cuadrado de una longitud. A consecuencia de ello, podremos expresar el momento de inercia de un cuerpo como producto de su masa m por el cuadrado de una longitud k. Esta longitud k es, por definición, el radio de giro del cuerpo. Así pues, el momento de inercia I de un cuerpo respecto a un eje dado se puede expresar en la forma

$$I = mk^2 \qquad \text{o sea} \qquad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{16-10}$$

El radio de giro de la masa de un cuerpo respecto a un eje podemos considerar que es la distancia al eje de un punto en donde habría que concentrar toda la masa para obtener el mismo momento de inercia respecto al eje que el que se tiene con la distribución real de la masa.

El radio de giro de masas es muy parecido al radio de giro de superficies estudiado en el apartado 10.2.3. El radio de giro de masas no es la distancia al eje del centro de masa del cuerpo. El radio de giro de la masa de un cuerpo respecto a un eje cualquiera es siempre mayor que la distancia del centro de masa del cuerpo a dicho eje. El radio de giro no tiene ninguna interpretación física útil; no es más que una manera conveniente de expresar el momento de inercia de la masa de un cuerpo en función de su masa y de una longitud.

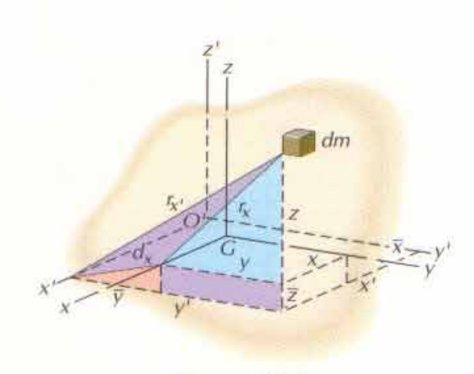


Figura 16-5

16.3.3 Teorema de Steiner

El teorema de Steiner para momentos de inercia es muy parecido al teorema de igual nombre para los momentos segundos de superficie estudiado en el apartado 10.2.1. Consideremos el cuerpo representado en la figura 16-5, con un sis-

tema de ejes de coordenadas cartesianas rectangulares xyz de origen en el centro de masa G del cuerpo y otro sistema de ejes paralelos a los anteriores $x'y'z'$ y origen en el punto O'. Observamos en la figura que

$$x' = \bar{x} + x$$
$$y' = \bar{y} + y$$
$$z' = \bar{z} + z$$

La distancia d_x entre los ejes x' y x es

$$d_x = \sqrt{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}$$

El momento de inercia del cuerpo respecto a un eje x' paralelo al eje x es, por definición,

$$I_{x'} = \int_m r_{x'}^2\, dm = \int_m [(\bar{y} + y)^2 + (\bar{z} + z)^2]\, dm$$
$$= \int_m (y^2 + z^2)\, dm + \bar{y}^2 \int_m dm + 2\bar{y} \int_m y\, dm + \bar{z}^2 \int_m dm + 2\bar{z} \int_m z\, dm$$

Sin embargo,

$$\int_m (y^2 + z^2)\, dm = I_{xG}$$

y como los ejes x e y pasan por el centro de masa G del cuerpo,

$$\int_m y\, dm = 0 \qquad \int_m z\, dm = 0$$

Por tanto,

$$I_{x'} = I_{xG} + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)\, m = I_{xG} + d_x^2 m$$
$$I_{y'} = I_{yG} + (\bar{z}^2 + \bar{x}^2)\, m = I_{yG} + d_y^2 m \qquad \text{(16-11)}$$
$$I_{z'} = I_{zG} + (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\, m = I_{zG} + d_z^2 m$$

La ecuación 16-11 constituye el teorema de Steiner para momentos de inercia. El subíndice G indica que el eje x pasa por el centro de masa G del cuerpo. Así pues, si se conoce el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje que pasa por su centro de masa, se podrá hallar el momento de inercia del cuerpo respecto a otro eje paralelo a aquél sin necesidad de integrar; bastará aplicar las ecuaciones 16-11.

Entre los radios de giro de los dos ejes existe una relación similar. Así, si representamos por k_x y $k_{x'}$ los radios de giro correspondientes a los dos ejes paralelos, la ecuación anterior podrá escribirse en la forma

$$k_{x'}^2 m = k_{xG}^2 m + d_x^2 m$$

Luego

$$k_{x'}^2 = k_{xG}^2 + d_x^2$$
$$k_{y'}^2 = k_{yG}^2 + d_y^2 \qquad \text{(16-12)}$$
$$k_{z'}^2 = k_{zG}^2 + d_z^2$$

Nota: Las ecuaciones 16-11 y 16-12 sólo son válidas para pasar de ejes xyz que pasen por el centro de masa a otros paralelos o viceversa. **No son válidas para pasar de unos ejes que no pasen por el centro de masa a otros que tampoco pasen por él.**

16.3.4 Producto de inercia

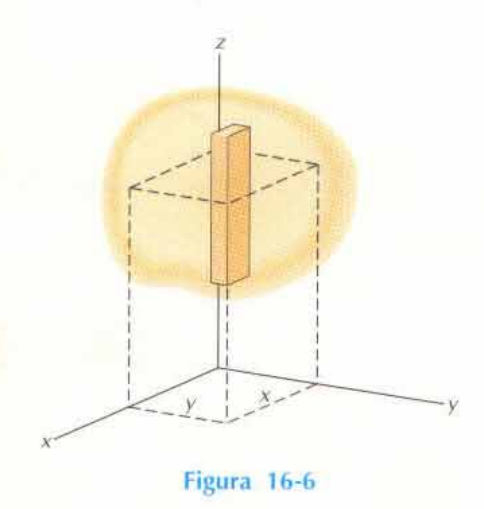


Figura 16-6

En los estudios del movimiento de cuerpos rígidos, se encuentran a veces expresiones en las que interviene el producto de la masa de un pequeño elemento por las distancias a un par de planos de coordenadas ortogonales. Este producto, que es análogo al momento segundo mixto de una superficie, se denomina producto de inercia del elemento. Por ejemplo, el producto de inercia del elemento representado en la figura 16-6 respecto a los planos xz e yz es, por definición,

$$dI_{xy} = xy\ dm \tag{16-13}$$

La suma de los productos de inercia de todos los elementos de masa del cuerpo respecto a los planos ortogonales mencionados es, por definición, el producto de inercia del cuerpo. Los tres productos de inercia del cuerpo representado en la figura 16-6 son

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_m xy\ dm \\ I_{yz} &= \int_m yz\ dm \\ I_{zx} &= \int_m zx\ dm \end{aligned} \tag{16-14}$$

Los productos de inercia, como los momentos de inercia, tienen las dimensiones de una masa multiplicada por el cuadrado de una longitud ML^2. La unidad de medida de los productos de inercia en el sistema SI es el $kg \cdot m^2$. En el U.S. Customary System es el $slug \cdot ft^2$.

El producto de inercia de un cuerpo puede ser positivo, negativo o nulo, ya que las dos distancias coordenadas tienen signos independientes. El producto de inercia será positivo cuando las coordenadas sean de igual signo y negativo cuando sean de signos contrarios. El producto de inercia será nulo cuando uno de los dos planos sea un plano de simetría ya que los elementos a uno y otro lado de éste se podrán emparejar de manera que sus productos de inercia respectivos sean uno positivo y otro negativo, siendo nula su suma.

Los métodos de integración que se utilizan para determinar momentos de inercia son igualmente aplicables a la determinación de productos de inercia. Según cómo se hayan tomado los elementos, podrá ser necesario calcular una integral simple, doble o triple. Los momentos de inercia de placas delgadas estaban relacionados con los momentos segundos de las placas. Análogamente, los productos de inercia se pueden relacionar con los momentos segundos mixtos de las placas. Si la placa tiene una densidad uniforme ρ, un grosor uniforme t y una área de la sección recta A, los productos de inercia serán, por definición:

$$I_{xym} = \int_m xy\ dm = \int_v xy\ \rho\ dV = \int_A xy\ \rho t\ dA = \rho t \int_A xy\ dA = \rho t\ I_{xyA}$$
$$I_{yzm} = \int_m yz\ dm = 0 \qquad (16\text{-}15)$$
$$I_{zxm} = \int_m zx\ dm = 0$$

donde el subíndice m corresponde a productos de inercia másicos y el subíndice A corresponde a momentos segundos mixtos de superficie. Los productos de inercia I_{yzm} e I_{zxm} de una placa delgada son nulos ya que se supone que los ejes x e y se hallan en el plano medio de la placa (plano de simetría).

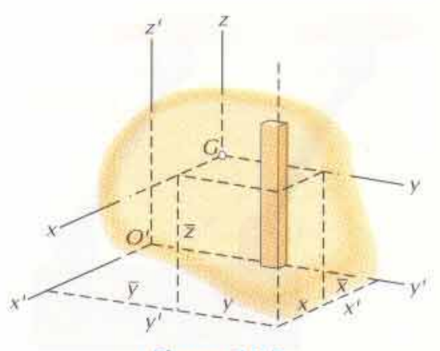


Figura 16-7

Podemos desarrollar un teorema de Steiner para productos de inercia muy parecido al aplicable a los momentos segundos mixtos estudiado en el apartado 10.2.5. Consideremos el cuerpo representado en la figura 16-7 y un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares xyz con origen en el centro de masa G del cuerpo, y otro sistema de ejes paralelos a los anteriores $x'\ y'\ z'$ con origen en el punto O' del cuerpo. Vemos en la figura que

$$x' = \bar{x} + y$$
$$y' = \bar{y} + y$$
$$z' = \bar{z} + z$$

El producto de inercia $I_{x'y'}$ del cuerpo respecto al par de planos $x'z'$ e $y'z'$ es, por definición,

$$I_{x'y'} = \int_m x'y'\ dm = \int_m (\bar{x} + x)(\bar{y} + y)\ dm$$
$$= \int_m \bar{x}\bar{y}\ dm + \int_m \bar{x}y\ dm + \int_m \bar{y}x\ dm + \int_m xy\ dm$$

Como $\bar{x}$ e $\bar{y}$ son las mismas para todo elemento de masa dm,

$$I_{x'y'} = \bar{x}\bar{y}\int_m dm + \bar{x}\int_m y\ dm + \bar{y}\int_m x\ dm + \int_m xy\ dm$$

Sin embargo,

$$\int_m xy\ dm = I_{xy}$$

y como los ejes x e y pasan por el centro de masa G del cuerpo,

$$\int_m y\ dm = 0 \qquad \int_m x\ dm = 0$$

Por tanto,

$$I_{x'y'} = I_{xyG} + \bar{x}\bar{y}\ m$$
$$I_{y'z'} = I_{yzG} + \bar{y}\bar{z}\ m \qquad (16\text{-}16)$$
$$I_{z'x'} = I_{zxG} + \bar{z}\bar{x}\ m$$

Las ecuaciones 16-16 constituyen el teorema de Steiner para productos de inercia. El subíndice G indica que los ejes x e y pasan por el centro de masa G del cuerpo. Así pues, si se conoce el producto de inercia de un cuerpo respecto a un par de planos ortogonales que pasan por el centro de masa, se podrá hallar el producto de inercia respecto a cualquier otro par de planos paralelos a los primeros, sin necesidad de integrar, utilizando las ecuaciones 16-16.

16.3.5 Momentos de inercia principales

En ciertos casos, en el estudio dinámico de los cuerpos, hay que determinar ejes principales y momentos de inercia máximos y mínimos, que son análogos a los momentos segundos de superficie máximos y mínimos. De nuevo, el problema es el de transformar momentos o productos de inercia, conocidos o de fácil cálculo, respecto a un sistema de coordenadas (tal como un sistema de ejes de coordenadas xyz dirigidos según las aristas de un prisma rectangular) a un segundo sistema de coordenadas $x'y'z'$ que tenga el mismo origen O pero que esté inclinado respecto al sistema xyz. En el Apéndice A se ofrece un desarrollo completo de las ecuaciones que se necesitan para determinar los momentos principales de inercia. En el mismo apéndice se incluye también una selección de problemas ejemplo resueltos y algunos problemas para resolver en casa que entrañan determinaciones de momentos de inercia, radios de giro, productos de inercia y momentos principales de inercia.

16.4 TRASLACIÓN, ROTACIÓN Y MOVIMIENTO PLANO CUALQUIERA DE UN CUERPO RÍGIDO

Los problemas de movimiento plano se pueden clasificar en tres categorías, las cuales dependen de la naturaleza del movimiento: (1) traslación, (2) rotación en torno a un eje fijo y (3) movimiento plano cualquiera. Las ecuaciones del movimiento plano cualquiera se han desarrollado en el apartado 16.2. La traslación y la rotación en torno a un eje fijo son casos particulares del movimiento plano cualquiera.

Para un cuerpo de forma arbitraria, las ecuaciones del movimiento plano cualquiera desarrolladas en el apartado 16.2 vienen dadas por las ecuaciones 15-17 y 16-3 en la forma

$$\begin{aligned}
\Sigma F_x &= ma_{Gx} & \Sigma M_{Ax} &= -\alpha I_{Azx} + \omega^2 I_{Ayz} \\
\Sigma F_y &= ma_{Gy} & \Sigma M_{Ay} &= (-\alpha I_{Ayz}) - \omega^2 I_{Azx} \\
\Sigma F_z &= 0 & \Sigma M_{Az} &= a_{Ay}\bar{x}m - a_{Ax}\bar{y}m + \alpha I_{Az}
\end{aligned} \tag{16-17}$$

16.4.1 Traslación

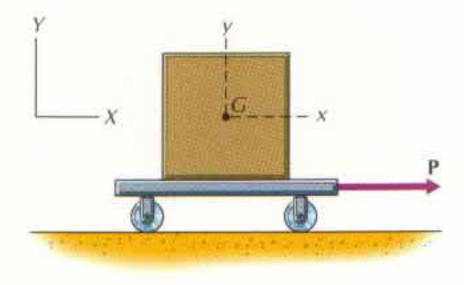


Figura 16-8

Diremos que un cuerpo rígido está animado de movimiento de traslación cuando todo segmento rectilíneo del cuerpo se mantenga paralelo a su posición inicial a lo largo del movimiento. Durante la traslación, no hay movimiento angular ($\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$); por tanto, todas las partes del cuerpo tienen la misma aceleración lineal **a**. La traslación sólo puede tener lugar cuando la resultante de las fuerzas exteriores que se ejercen sobre el cuerpo sea una fuerza **R** cuya recta soporte pase por el centro de masa G del citado cuerpo. En el caso de la traslación, con el origen del sistema de coordenadas xyz en el centro de masa

G del cuerpo ($\bar{x} = \bar{y} = 0$), las ecuaciones 16-17 para un movimiento plano cualquiera se reducen a

$$\Sigma F_x = ma_{Gx} \qquad \Sigma F_y = ma_{Gy} \qquad \Sigma M_{Gz} = 0 \tag{16-18}$$

Cuando un cuerpo está animado de una traslación del tipo ilustrado en la figura 16-8, podremos tomar el eje x paralelo a la aceleración $\mathbf{a}_G$, en cuyo caso la componente a_{Gy} de la aceleración será nula. Cuando el centro de masa del cuerpo siga una curva plana, como se ilustra en la figura 16-9, suele ser conveniente tomar los ejes x e y en las direcciones de las componentes instantáneas normal y tangencial de la aceleración. Si se suman los momentos de las fuerzas exteriores respecto a un punto que no sea el centro de masa (p. ej. el punto A), deberá modificarse la ecuación de momentos a fin de tener en cuenta los efectos de a_{Gx} y a_{Gy}. Así

$$\Sigma M_{Az} = a_{Gy}\, \bar{x} m - a_{Gx}\, \bar{y} m \tag{16-19}$$

En los ejemplos siguientes se ilustra el método de resolución de problemas en los que interviene la traslación.

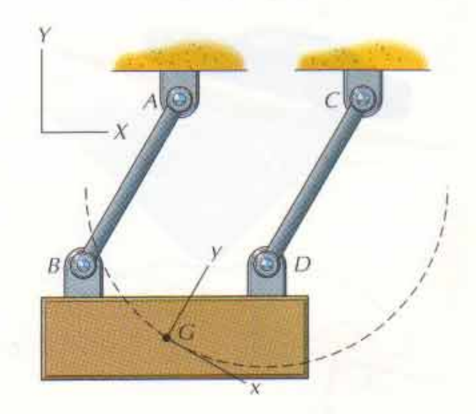


Figura 16-9

PROBLEMA EJEMPLO 16.1

La puerta de un hangar tiene por dimensiones 4,8 × 6,0 m, pesa 4 kN y está sostenida por dos rodillos según se indica en la figura 16-10*a*. Para abrirla, se aplica una fuerza **F** de 1,5 kN. Determinar la aceleración de la puerta y las fuerzas de sustentación que sobre ella ejercen los rodillos. Despréciense los rozamientos y la masa de los rodillos

SOLUCIÓN

En la figura 16-10*b* puede verse el diagrama de sólido libre de la puerta. Se ha situado el origen de un sistema de coordenadas xyz en el centro de masa G de la puerta. Como el movimiento de éste tiene lugar a lo largo de una recta horizontal, el tipo de movimiento será de traslación ($\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{a}_{Gy} = \mathbf{0}$) mientras los dos rodillos se mantengan en contacto con el raíl. Las ecuaciones del movimiento (ecs. 16-18) son

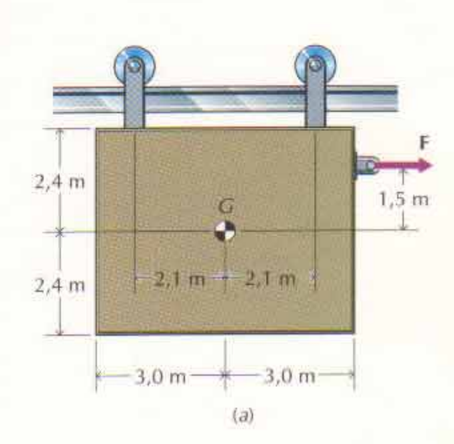
$+\rightarrow \Sigma F_x = ma_{Gx} \qquad 1500 = \dfrac{4000}{9{,}81} a_{Gx} \qquad a_{Gx} = 3{,}68 \text{ m/s}^2$ Resp.

$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad R_A + R_B - 4000 = 0$ (*a*)

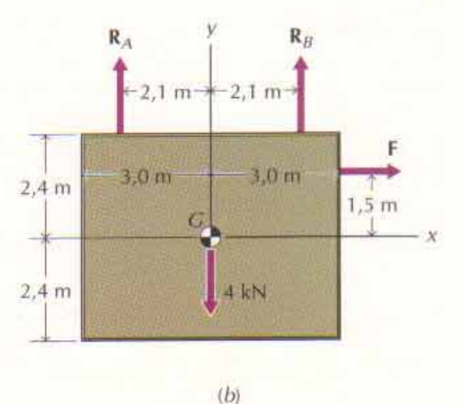
$+\circlearrowright \Sigma M_{Gz} = 0 \qquad R_B(2{,}1) - R_A(2{,}1) - 1500(1{,}5) = 0$ (*b*)

Resolviendo el sistema que constituyen las ecuaciones *a* y *b*:

$R_A = 1464 \text{ N} \qquad R_B = 2536 \text{ N}$ Resp.



(*a*)



(*b*)

Figura 16-10

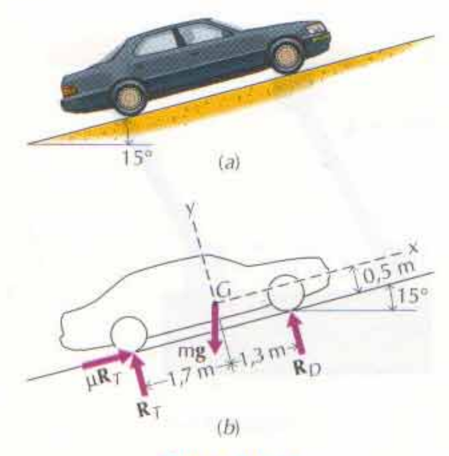


Figura 16-11

PROBLEMA EJEMPLO 16.2

El automóvil de 1400 kg representado en la figura 16-11*a* tiene una distancia entre ejes de 3 m. Su centro de masa está situado 1,30 m detrás del eje anterior y 0,5 m por encima del suelo. Si el automóvil es de tracción trasera y el coeficiente de rozamiento entre los neumáticos y la calzada vale 0,80, determinar la máxima aceleración que puede desarrollar el vehículo al ascender por la pendiente de 15°.

SOLUCIÓN

En la figura 16-11*b* puede verse el diagrama de sólido libre del automóvil. Se ha tomado en el centro de masa *G* el origen del sistema de coordenadas *xyz*. Como el vehículo es de tracción trasera, la fuerza de rozamiento impulsora sólo se indica en las ruedas traseras. El movimiento del centro de masa del automóvil tendrá lugar a lo largo de una recta inclinada 15° respecto a la horizontal; por tanto, el movimiento será de traslación ($\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{a}_{Gy} = \mathbf{0}$) mientras las ruedas estén en contacto con la calzada. Las ecuaciones del movimiento (ecs. 16-18) son

$$+\nwarrow \Sigma F_y = 0 \qquad R_D + R_T - mg\cos 15° = 0$$

$$R_D + R_T = 1400(9{,}81)\cos 15° = 13\,266 \text{ N} \qquad \textbf{(a)}$$

$$+\circlearrowright \Sigma M_{Gz} = 0 \qquad R_D(1{,}3) - R_T(1{,}7) + 0{,}80R_T(0{,}5) = 0$$

$$R_D - R_T = 0 \qquad \textbf{(b)}$$

Resolviendo el sistema constituido por las ecuaciones *a* y *b:*

$$R_D = R_T = 6633 \text{ N}$$

$$+\nearrow \Sigma F_x = ma_{Gx} \qquad \mu R_T - mg \operatorname{sen} 15° = ma_{Gx}$$

$$0{,}80(6633) - 1400(9{,}81)\operatorname{sen} 15° = 1400a_{Gx}$$

$$a_{Gx} = 1{,}251 \text{ m/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 16.3

Una placa triangular que pesa 450 N está sostenida por dos cables, según se indica en la figura 16-12*a*. Cuando la placa pasa por la posición representada, la velocidad angular de los cables es de 4 rad/s en sentido antihorario. Determinar, en ese instante,

a. La aceleración del centro de masa de la placa.
b. La tensión de cada cable.

SOLUCIÓN

En la figura 16-12*b* puede verse el diagrama de sólido libre de la placa, en donde se ha tomado en el centro de masa *G* el origen del sistema de coordenadas *xyz* que se utilizará. Como los puntos *B* y *D* de la placa recorren trayectorias circulares paralelas, el movimiento de aquélla será de traslación curvilínea. Las ecuaciones del movimiento (ecs. 16-18) son

$$\Sigma F_x = ma_{Gx} \qquad \Sigma F_y = ma_{Gy} \qquad \Sigma M_{Gz} = 0$$

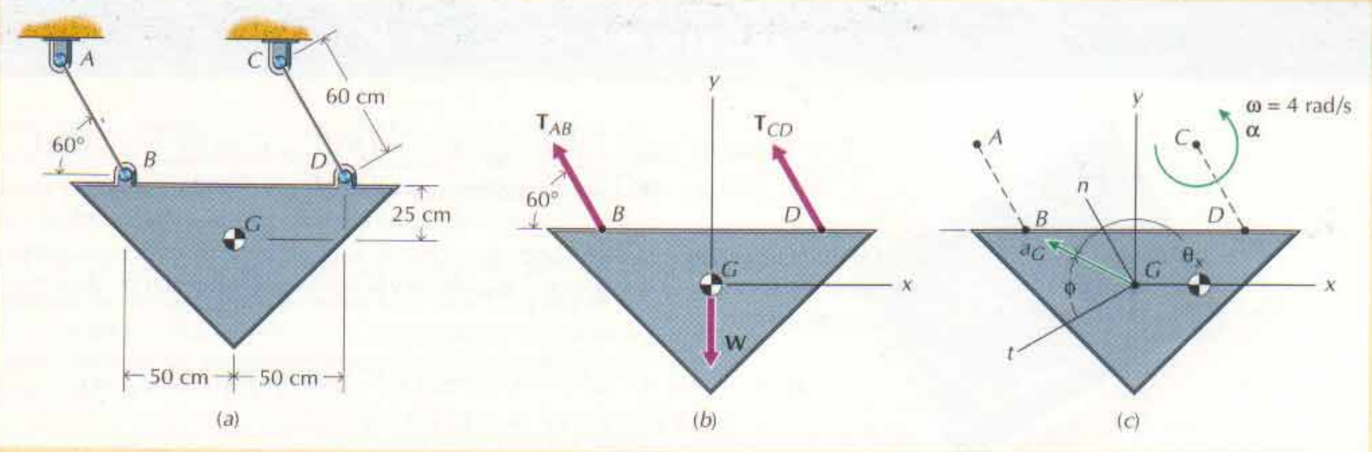


Figura 16-12

o bien, en función de las coordenadas normal y tangencial (v. fig. 16-12*c*)

$$\Sigma F_n = ma_{Gn} \qquad \Sigma F_t = ma_{Gt} \qquad \Sigma M_{Gz} = 0$$

a. La aceleración del centro de masa de la placa se obtiene de las componentes normal y tangencial ($\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_D = \mathbf{v}_G$ y $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_D = \mathbf{a}_G$). Así pues

$$a_{Gn} = r\omega^2 = 60(4)^2 = 960 \text{ cm/s}^2 = 9{,}60 \text{ m/s}^2$$

$$+\swarrow \Sigma F_t = ma_{Gt} \qquad W \text{ sen } 30° = \frac{W}{g} a_{Gt}$$

$$a_{Gt} = g \text{ sen } 30° = 9{,}81 \text{ sen } 30° = 4{,}91 \text{ m/s}^2$$

Por tanto

$$a_G = \sqrt{(a_{Gn})^2 + (a_{Gt})^2} = \sqrt{(9{,}60)^2 + (4{,}91)^2} = 10{,}78 \text{ m/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{a_{Gn}}{a_{Gt}} = \tan^{-1} \frac{9{,}60}{4{,}91} = 62{,}9° \qquad \text{Resp.}$$

b. Las tensiones de los cables se obtienen de las ecuaciones $\Sigma F_n = ma_{Gn}$ y $\Sigma M_{Gz} = 0$. Así pues,

$$+\nwarrow \Sigma F_n = ma_{Gn} \qquad T_{AB} + T_{CD} - W \cos 30° = \frac{W}{g} a_{Gn}$$

$$T_{AB} + T_{CD} = 450 \cos 30° + \frac{450}{9{,}81}(9{,}60)$$

$$T_{AB} + T_{CD} = 830 \qquad \textbf{(a)}$$

$$+\circlearrowright \Sigma M_{Gz} = 0 \qquad T_{AB} \text{ sen } 30° (25) - T_{AB} \cos 30° (50)$$

$$+ T_{CD} \text{ sen } 30° (25) + T_{CD} \cos 30° (50) = 0$$

$$T_{AB} - 1{,}8817\, T_{CD} = 0 \qquad \textbf{(b)}$$

De las ecuaciones *a* y *b*, resulta

$$T_{AB} = 535 \text{ N} \qquad \text{Resp.}$$

$$T_{CD} = 295 \text{ N} \qquad \text{Resp.}$$

Solución utilizando coordenadas rectangulares y análisis vectorial
La fuerza resultante **R** se puede escribir en forma vectorial cartesiana de la manera siguiente:

$$\mathbf{R} = (-\cos 60°T_{AB} - \cos 60°T_{CD})\,\mathbf{i} + (\text{sen } 60°T_{AB} + \text{sen } 60°T_{CD} - 450)\,\mathbf{j}$$
$$= (-0{,}5T_{AB} - 0{,}5T_{CD})\,\mathbf{i} + (0{,}866T_{AB} + 0{,}866T_{CD} - 450)\,\mathbf{j}$$

De manera análoga, la aceleración $\mathbf{a}_G$ se puede escribir en forma vectorial cartesiana (en función de la velocidad angular ω y la aceleración angular α) de la manera siguiente:

$$\mathbf{a}_G = (-\cos 60°r\omega^2 + \text{sen } 60°r\alpha)\,\mathbf{i} + (\text{sen } 60°\ r\omega^2 + \cos 60°r\alpha)\,\mathbf{j}$$
$$= (-4{,}8 + 0{,}52\alpha)\,\mathbf{i} + (8{,}314 + 0{,}3\alpha)\,\mathbf{j}$$

En la ecuación $\mathbf{R} = m\mathbf{a}_G$,
Los términos en **i** dan

$$T_{AB} + T_{CD} = 440{,}4 - 47{,}41\,\alpha$$

y los términos en **j** dan

$$T_{AB} + T_{CD} = 960 + 15{,}89\,\alpha$$

lo cual exige que

$$\alpha = -8{,}17 \text{ rad/s}^2$$

Así pues

$$\mathbf{a}_G = -9{,}04\mathbf{i} + 5{,}86\mathbf{j}$$

y

$$a_G = \sqrt{(a_G)^2 + (a_{Gy})^2} = \sqrt{(9{,}04)^2 + (5{,}86)^2} = 10{,}77 \text{ m/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

$$\theta_x = \tan^{-1}\frac{a_{Gy}}{a_{Gy}} = \tan^{-1}\frac{5{,}86}{9{,}04} = 147{,}0° \qquad \text{Resp.}$$

Además

$$T_{AB} + T_{CD} = 830{,}2 \qquad (c)$$

De la ecuación $\mathbf{C}_G = \mathbf{0}$

$$\mathbf{C}_G = (-0{,}50\mathbf{i} + 0{,}25\mathbf{j}) \times (0{,}5T_{AB}\mathbf{i} + 0{,}866T_{AB}\mathbf{j})$$
$$+ (0{,}50\mathbf{i} + 0{,}25\mathbf{j}) \times (-0{,}5T_{CD}\mathbf{i} + 0{,}866T_{CD}\mathbf{j}) = 0$$

resulta

$$(-1{,}0267\ T_{AB} + 1{,}8601\ T_{CD})\,\mathbf{k} = 0$$

o sea

$$T_{AB} - 1{,}8117T_{CD} = 0 \qquad (d)$$

De las ecuaciones *c* y *d*, resulta

$$T_{AB} = 535 \text{ N} \qquad \text{Resp.}$$
$$T_{CD} = 295 \text{ N} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

En los problemas siguientes, las cuerdas, hilos y cables se suponen flexibles, inextensibles y de masa despreciable. Los pasadores y poleas tienen masa despresiable y están exentos de rozamiento, a menos que se especifique lo contrario.

16-1* El bloque representado en la figura P16-1 pesa 4,5 kN. El coeficiente de rozamiento cinético μ entre el bloque y el plano horizontal vale 0,20. Determinar la aceleración del bloque y las reacciones en los puntos de contacto A y B cuando a aquél se le aplica una fuerza **P** de 1250 N.

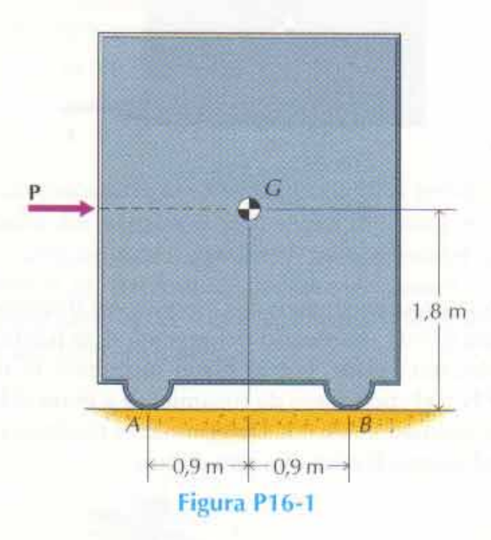


Figura P16-1

16-2* El bloque representado en la figura P16-2 tiene una masa de 350 kg. El coeficiente de rozamiento cinético μ entre el bloque y el plano horizontal vale 0,15. Determinar la aceleración del bloque y las reacciones en los puntos de contacto A y B cuando a aquél se le aplica una fuerza **P** de 750 N.

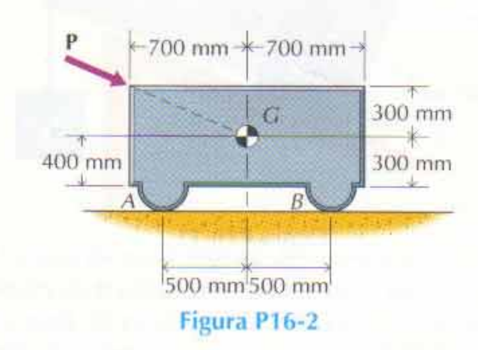


Figura P16-2

16-3 Una caja que pesa 3 kN se desliza hacia abajo por un plano inclinado, según se indica en la figura P16-3. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre la caja y el plano inclinado vale 0,30, determinar las fuerzas normal y de rozamiento que se ejercen sobre la caja en los puntos A y B.

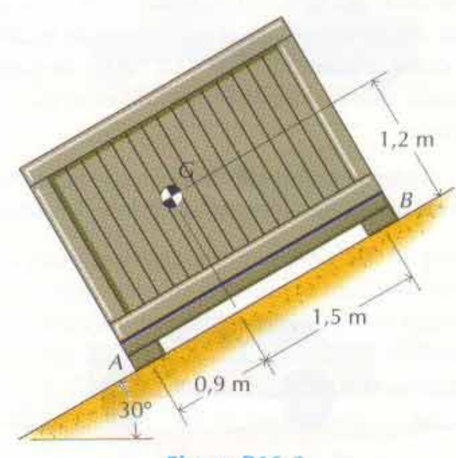


Figura P16-3

16-4 Se mueve un armario de masa 75 kg por un piso horizontal, en la forma que se indica en la figura P16-4. Determinar la máxima fuerza **P** que se le puede aplicar sin que vuelque.

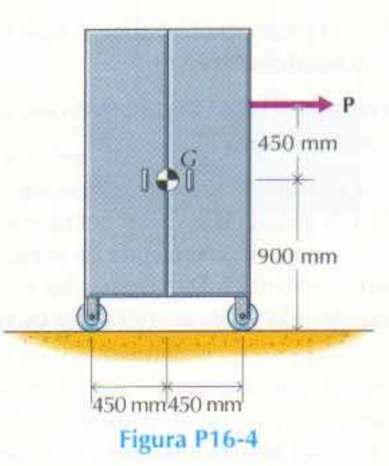


Figura P16-4

16-5* El automóvil de tracción trasera representado en la figura P16-5 pesa 15,5 kN. El coeficiente de rozamiento estático μ entre neumático y calzada vale 0,70. Determinar el mínimo tiempo que se necesita para que el automóvil acelere uniformemente desde el reposo hasta una celeridad de 96 km/h.

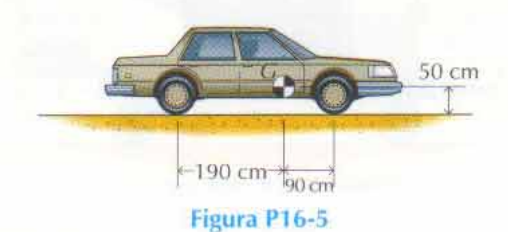


Figura P16-5

16-6* La camioneta de tracción trasera representada en la figura P16-6 tiene una masa de 1750 kg y transporta una carga de 400 kg. El centro de masa de la camioneta se halla 0,745 m detrás del eje delantero; el centro de masa de la carga se halla 0,5 m delante del eje trasero. Si el coeficiente de rozamiento estático entre calzada y neumáticos vale 0,85 y la carga está firmemente sujeta, determinar el tiempo mínimo que necesita la camioneta para:

a. Acelerar uniformemente desde el reposo hasta 90 km/h.
b. Desacelerar uniformemente desde 90 km/h hasta el reposo.

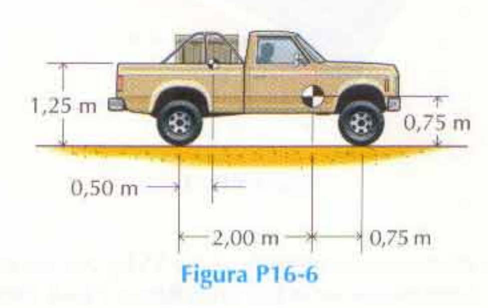


Figura P16-6

16-7 Resolver el problema 16-5 para el caso en que el automóvil tenga tracción delantera.

16-8* Resolver el problema 16-6 para el caso en que el automóvil tenga tracción delantera.

16-9 Una caja descansa sobre un carrito según se indica en la figura P16-9. Los pesos de la caja y del carrito son 4250 N y 500 N, respectivamente. El coeficiente de rozamiento estático entre caja y carrito vale 0,25. Determinar las reacciones en las ruedas *A* y *B* cuando al carrito se aplica una fuerza **P** de 750 N.

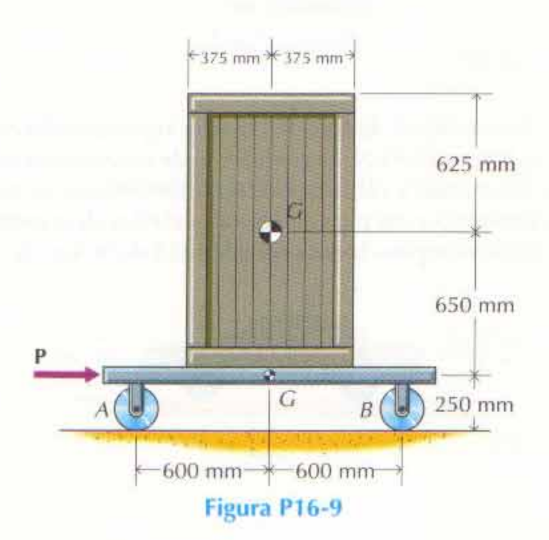


Figura P16-9

16-10* Una placa de material ($m = 1000$ kg) pende de un carril mediante dos zapatas, según se indica en la figura P16-10. El coeficiente de rozamiento cinético entre el carril y las zapatas vale 0,25. Hallar las reacciones verticales del carril sobre las zapatas cuando se aplica a la placa una fuerza **F** de 2,50 kN.

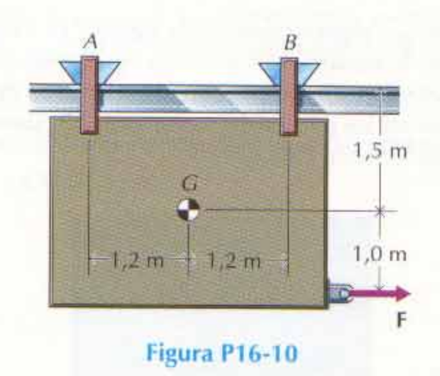


Figura P16-10

16-11 Cuando se suelten los dos bloques *A* y *B* representados en la figura P16-11, partiendo del reposo, *A* se ha de deslizar hacia arriba, sin volcar, por el plano inclinado. El bloque *A* pesa 2500 N y el coeficiente de rozamiento μ entre el bloque *A* y el plano inclinado vale 0,2. Determinar el máximo peso permisible del bloque *B* para que esto ocurra.

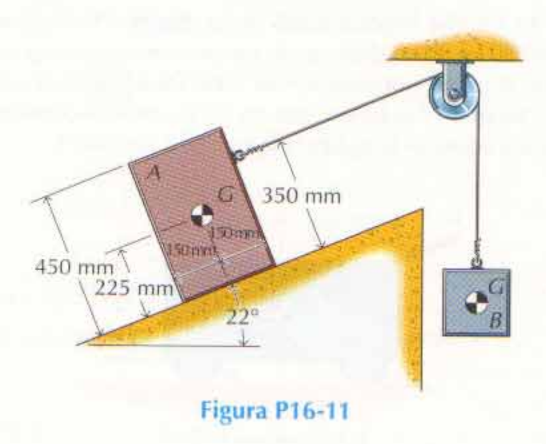


Figura P16-11

16-12 Una caja descansa sobre un carrito según se indica en la figura P16-12. Las masas de la caja y del carrito son 150 kg y 25 kg, respectivamente. El coeficiente de rozamiento estático entre caja y carrito vale 0,10. Si la caja no se ha de deslizar ni volcar, determinar la máxima masa que puede tener el bloque *B*.

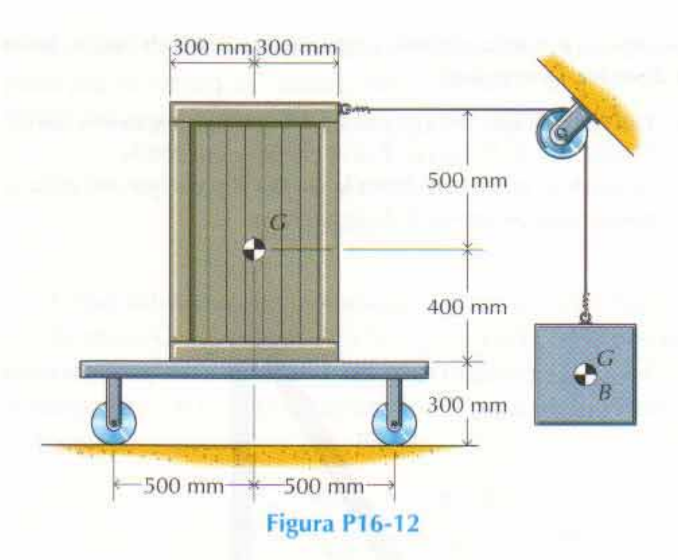


Figura P16-12

16-13* Una placa de material que pesa 2500 N pende de un carril mediante dos zapatas *A* y *B*, según se indica en la figura P16-13. El coeficiente de rozamiento cinético entre el carril y las zapatas vale 0,20. Determinar las fuerzas normal y de rozamiento que el carril ejerce sobre las zapatas mientras el bloque se desliza a lo largo de aquél.

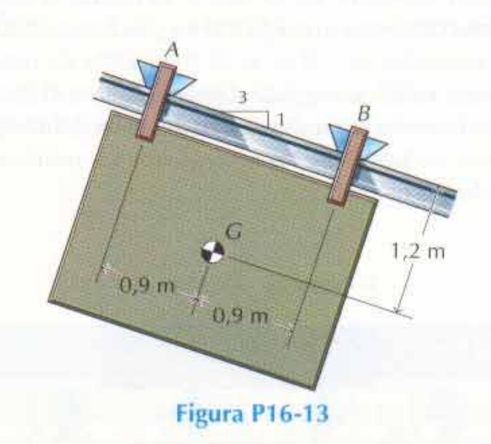


Figura P16-13

16-14* Una caja de masa 1000 kg descansa sobre la plataforma de un camión de tracción trasera, según se indica en la figura P16-14. La masa del camión es de 2500 kg. El centro de masa de éste se halla 2 m detrás del eje delantero y 0,85 m por encima de la calzada. El coeficiente de rozamiento estático entre caja y plataforma vale 0,25. Si la caja no se ha de deslizar ni volcar, determinar la aceleración máxima permisible y el mínimo coeficiente de rozamiento estático entre neumáticos y calzada que permita alcanzar esa aceleración.

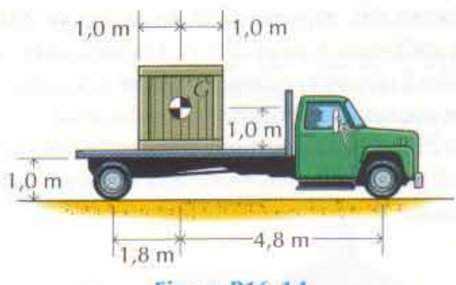


Figura P16-14

16-15 Una placa homogénea, que pesa 500 N, pende de dos cables *A* y *B* de igual longitud, según se indica en la figura P16-15. La placa oscila en un plano vertical y está sometida a una fuerza horizontal **F** de 100 N. En la posición representada, los cables están girando en sentido antihorario con velocidad angular de 5 rad/s. Determinar, en ese instante, la aceleración angular de los cables y las tensiones en ellos.

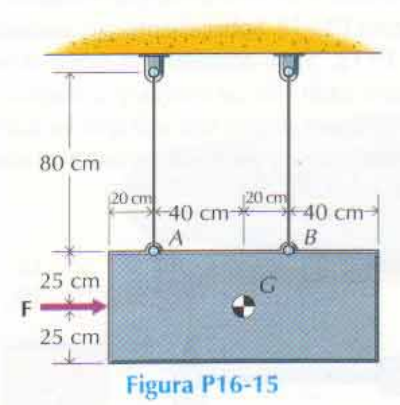


Figura P16-15

16-16 La placa delgada representada en la figura P16-16 tiene una masa de 10 kg. La mantienen en un plano vertical las dos barras de conexión *A* y *B* y el hilo flexible *C*. Determinar la aceleración del centro de masa *G* de la placa y la fuerza en cada barra inmediatamente después de cortar el hilo *C*. Despréciese la masa de las barras.

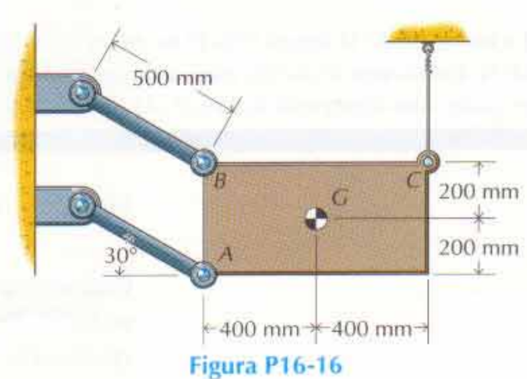


Figura P16-16

16-17* La barra AB, representada en la figura P16-17, tiene una sección uniforme y pesa 375 N. Conecta dos ruedas que ruedan sin deslizamiento sobre un plano horizontal. Las ruedas giran en sentido antihorario con velocidad angular constante igual a 25 rad/s. Determinar la componente vertical de la fuerza que el pasador B ejerce sobre la barra en función de la posición angular θ.

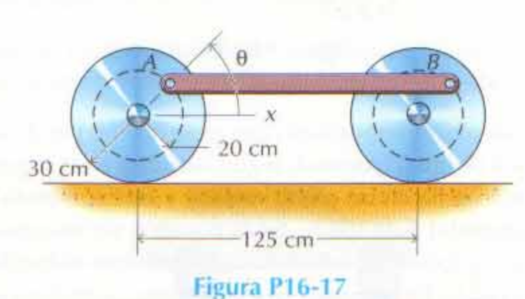


Figura P16-17

16-18* Dos pares de barras de conexión y un cable mantienen en un plano vertical a un entramado de masa 25 kg, según se indica en la figura P16-18. Sobre el entramado descansa un bloque de masa 10 kg. Si se rompiera el cable, determinar qué fuerza soportaría cada par de barras y la fuerza que sobre el bloque ejercería el entramado una vez que las barras hubiesen girado 30° a partir de su posición inicial horizontal. Despréciense las masas de las barras.

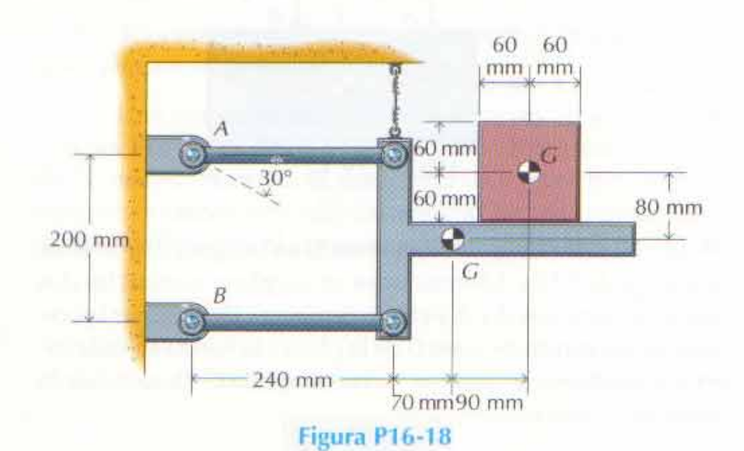


Figura P16-18

16-19 La barra AB de la figura P16-19 es de sección uniforme y pesa 300 N. Está sujeta al carrito mediante un pasador liso en A y se apoya en una superficie lisa en B. Al carrito se le aplica una fuerza **P** que le comunica una aceleración de 45 m/s² hacia la derecha. Determinar

a. Las fuerzas que los apoyos en A y B ejercen sobre la barra.
b. El módulo de la fuerza **P** si el carrito pesa 250 N.
c. El módulo que ha de tener la fuerza **P** para que sea nula la reacción en el apoyo B de la barra.

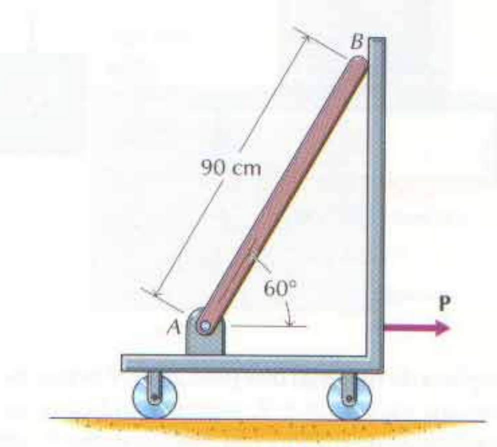


Figura P16-19

16-20 Los rodillos de 100 mm de diámetro del sistema transportador representado en la figura P16-20 se mueven con velocidad angular constante de 25 rad/s. El bloque transportado por el sistema tiene una masa de 250 kg y se mueve hacia la derecha con velocidad de 1,0 m/s. El coeficiente de rozamiento entre bloque y rodillos vale 0,25. Determinar, en el instante representado, la aceleración del centro de masa del bloque y las componentes verticales de las fuerzas que los rodillos ejercen en A y B sobre el bloque.

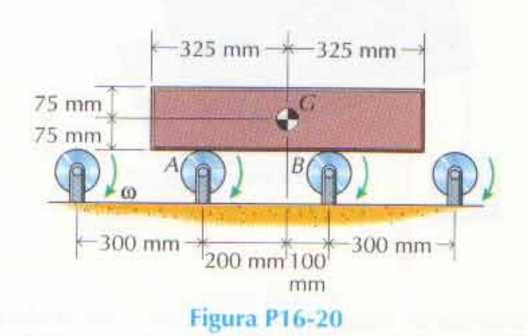


Figura P16-20

16.4.2 Rotación en torno a un eje fijo

Cuando todos los elementos de un cuerpo describen trayectorias circulares alrededor de un eje fijo, diremos que el movimiento es de rotación en torno a un eje fijo. En la figura 16-13 se ha representado un cuerpo rígido simétrico respec-

to al plano de movimiento ($I_{Gzx} = I_{Gyz} = 0$) y que gira en torno a un eje fijo que pasa por el centro de masa G del cuerpo ($\bar{x} = \bar{y} = 0$). En este caso, $\mathbf{a}_G = \mathbf{0}$; por tanto, las ecuaciones 16-17 para un movimiento plano cualquiera se reducen a

$$\Sigma F_x = ma_{Gx} = 0$$
$$\Sigma F_y = ma_{Gy} = 0 \qquad \Sigma M_{Gz} = I_{Gz}\alpha \qquad (16\text{-}20)$$

A menudo aparecen rotaciones en torno a ejes fijos que no pasan por el centro de masa G del cuerpo. En la figura 16-14 tenemos un ejemplo de cuerpo simétrico respecto al plano de movimiento ($I_{Gzx} = I_{Gyz} = 0$). En este tipo de rotación, $\mathbf{a}_A = \mathbf{0}$ y las ecuaciones 16-17 para un movimiento plano cualquiera se reducen a

$$\Sigma F_x = ma_{Gx} = -m\bar{x}\omega^2$$
$$\Sigma F_y = ma_{Gy} = m\bar{x}\alpha \qquad \Sigma M_{Az} = I_{Az}\alpha \qquad (16\text{-}21)$$

La ecuación de momentos $\Sigma M_{Az} = I_{Az}\alpha$ de las ecuaciones 16-21 se puede obtener a partir de la ecuación de momentos $\Sigma M_{Gz} = I_{Gz}\alpha$ de las ecuaciones 16-20 observando que para la rotación en torno a un eje fijo que pase por un punto arbitrario A

$$\Sigma M_{Az} = \Sigma M_{Gz} + ma_{Gy}\bar{x} - ma_{Gx}\bar{y}$$

En el caso ilustrado en la figura 16-14, $\bar{y} = 0$. Por tanto,

$$\Sigma M_{Az} = \Sigma M_{Gz} + ma_{Gy}\bar{x} = I_{Gz}\alpha + m(\bar{x}\alpha)\bar{x} = (I_{Gz} + m\bar{x}^2)\,\alpha = I_{Az}\alpha$$

En los ejemplos que siguen se ilustra el método de resolución de problemas referentes a la rotación en torno a un eje fijo.

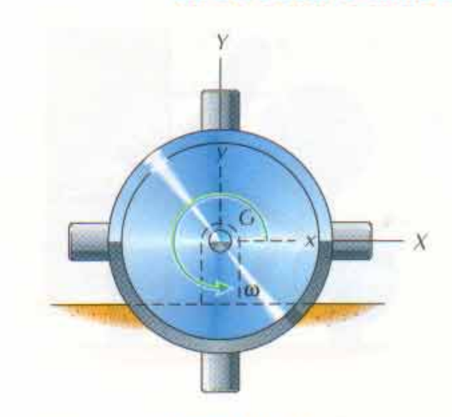


Figura 16-13

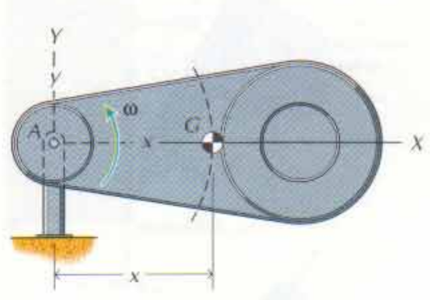


Figura 16-14

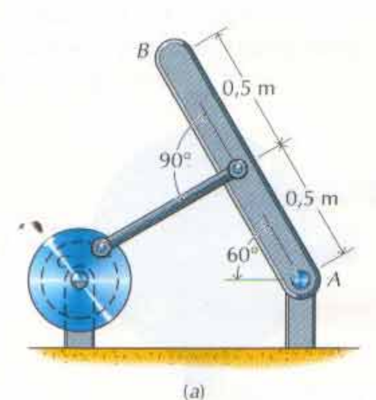
PROBLEMA EJEMPLO 16.4

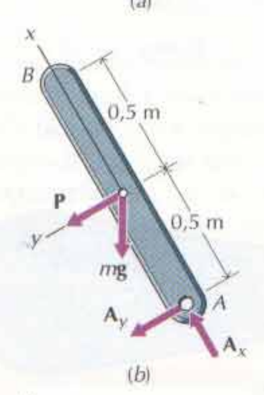
La barra AB representada en la figura 16-15a es de sección constante y tiene una masa de 10 kg. A consecuencia de la rotación del cigüeñal C, la barra AB oscila en un plano vertical. En la posición representada, su velocidad angular es $\omega = 10$ rad/s en sentido horario y su aceleración angular es $\alpha = 40$ rad/s^2 en sentido antihorario. Determinar la fuerza que ejerce la biela que conecta el cigüeñal con la barra AB y la que sobre ésta ejerce el pasador situado en A.

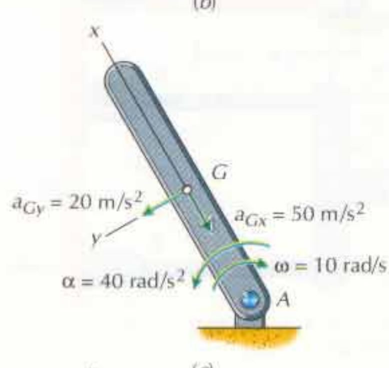
SOLUCIÓN

En la figura 16-15b puede verse el diagrama de sólido libre de la barra AB. El movimiento de ésta es una rotación en torno a un eje fijo que no pasa por su centro de masa G. Tomando el sistema de coordenadas xyz con origen en G, las ecuaciones del movimiento serán

$$\Sigma F_x = ma_{Gx} \qquad \Sigma F_y = ma_{Gy} \qquad \Sigma M_{Gz} = I_{Gz}\alpha$$







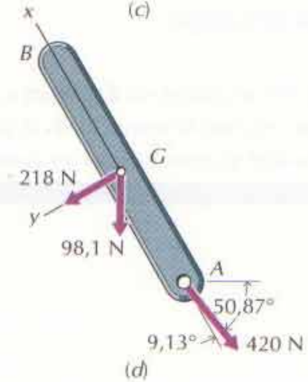


Figura 16-15

Las componentes lineales de la aceleración del centro de masa, según se ve en la figura 16-15*c*, son

$$a_{Gx} = -r\omega^2 = -0{,}5(-10)^2 = -50 \text{ m/s}^2$$
$$a_{Gy} = r\alpha = 0{,}5(40) = 20 \text{ m/s}^2$$

Según el Apéndice B (tabla B-5):

$$I_{Gz} = \frac{1}{12}mL^2 = \frac{1}{12}(10)(1)^2 = 0{,}8333 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$+\nwarrow \Sigma F_x = A_x - mg \text{ sen } 60° = ma_{Gx}$$
$$A_x - 10(9{,}81) \text{ sen } 60° = 10(-50) \qquad A_x = -415{,}0 \text{ N}$$
$$+\circlearrowright \Sigma M_{Gz} = I_{Gz}\alpha$$
$$-A_y(0{,}5) = 0{,}8333(40) \qquad A_y = -66{,}66 \text{ N}$$
$$+\swarrow \Sigma F_x = P + A_y + mg \cos 60° = ma_{Gy}$$
$$P - 66{,}66 + 10(9{,}81)\cos 60° = 10(20)$$
$$P = 217{,}6 = 218 \text{ N} \qquad \text{Resp.}$$
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(-415)^2 + (-66{,}66)^2} = 420 \text{ N} \qquad \text{Resp.}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{Ay}{Ax} = \tan^{-1}\frac{-66{,}66}{-415} = 0{,}161 = 9{,}13°$$

Estos resultados están representados en la figura 16-15*d*.

Situando en el eje fijo de rotación el origen de un sistema de coordenadas *xyz* de ejes paralelos a los anteriores, las ecuaciones del movimiento son

$$\Sigma F_x = -m\bar{x}\omega^2 \qquad \Sigma F_y = m\bar{x}\alpha \qquad \Sigma M_{Az} = I_{Az}\alpha$$
$$I_{Az} = I_{Gz} + m\bar{x}^2 = 0{,}8333 + 10(0{,}5)^2 = 3{,}333 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$+\circlearrowright \Sigma M_{Az} = I_{Az}\alpha$$
$$P(0{,}5) + 0{,}5(mg \cos 60°) = 3{,}333(40)$$
$$P = 2\,[3{,}333(40) - 0{,}5(10)(9{,}81) \cos 60°] = 218 \text{ N} \qquad \text{Resp.}$$

Sumando momentos respecto al eje fijo *A*, se obtiene directamente la fuerza **P**. Conocida **P**, se pueden utilizar las dos ecuaciones restantes para determinar la reacción en el apoyo *A*.

PROBLEMA EJEMPLO 16.5

Un contenedor que pesa 4250 N se desplaza mediante un torno según se indica en la figura 16-16*a*. El cilindro del torno pesa 500 N y su radio de giro respecto al eje de rotación es de 525 mm. El coeficiente de rozamiento cinético entre contenedor y piso vale 0,25. Si el contenedor se ha de deslizar sin volcar por el piso horizontal, determinar

a. La máxima tensión que puede tener el cable.
b. La aceleración del contenedor cuando se aplique la tensión máxima.
c. El máximo par **C** que se puede aplicar al torno.

SOLUCIÓN

En la figura 16-16*b* se han representado los diagramas de sólido libre del contenedor y del torno. Cuando el contenedor esté en situación de vuelco inminente, sólo existirán las reacciones de apoyo verticales R_{Ay} en las esquinas inferiores de

la derecha. El movimiento del contenedor es de traslación ($\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{a}_{Gy} = \mathbf{0}$); el movimiento del tambor del torno es de rotación ($\mathbf{a}_{Gx} = \mathbf{a}_{Gy} = \mathbf{0}$). El origen del sistema de coordenadas xyz se ha tomado en el centro de masa G de cada cuerpo ($x = y = 0$).

a. Las ecuaciones del movimiento del contenedor son

$$\Sigma F_x = ma_{Gx} \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_{Gz} = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = R_{Ay} - 4250 = 0 \qquad R_{Ay} = 4250 \text{ N}$$

$$+\circlearrowright \Sigma M_{Gz} = R_{Ay}(750) - \mu R_{Ay}(1800) - T(900) = 0$$

$$= 4250(750) - 0{,}25(4250)(1800) - T(900) = 0$$

$$T = 1416{,}7 \text{ N}$$ Resp.

b. $$+\rightarrow \Sigma F_x = T - \mu R_{Ay} = ma_{Gx}$$ Resp.

$$= 1416{,}7 - 0{,}25(4250) = \frac{4250}{9{,}81}a_{Gx} \qquad a_{Gx} = 0{,}7945 \text{ m/s}^2$$

c. Las ecuaciones del movimiento del torno son

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_{Gz} = I_{Gz}\alpha$$

Los movimientos del contenedor y del torno están relacionados por la ecuación cinemática

$$x_G = r\theta$$

De donde

$$\ddot{x}_G = r\ddot{\theta} \qquad \text{o sea} \qquad a_G = r\alpha$$

Así pues,

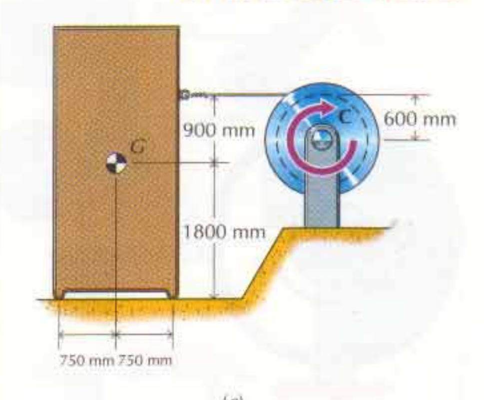
$$\alpha = \frac{a_G}{r} = \frac{0{,}7945}{0{,}6} = 1{,}324 \text{ rad/s}^2$$

$$\Sigma M_{Gz} = I_{Gz}\alpha$$

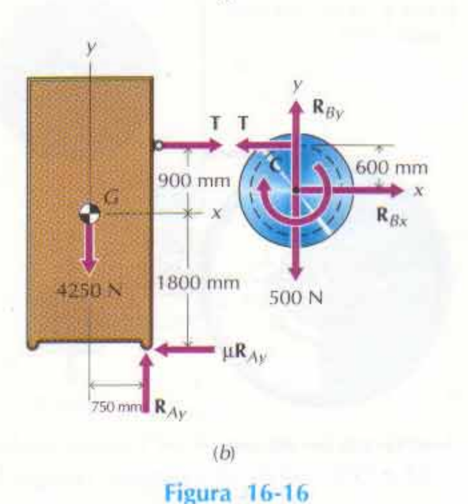
$$C - T(r) = mk^2\alpha$$

$$C - 1416{,}7(0{,}6) = \frac{500}{9{,}81}(0{,}525)^2(1{,}324)$$

$$C = 869 \text{ m} \cdot \text{kg} \circlearrowright$$ Resp.



(a)



(b)

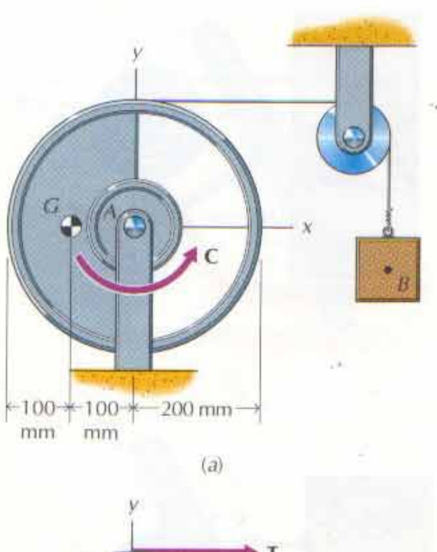
Figura 16-16

PROBLEMA EJEMPLO 16.6

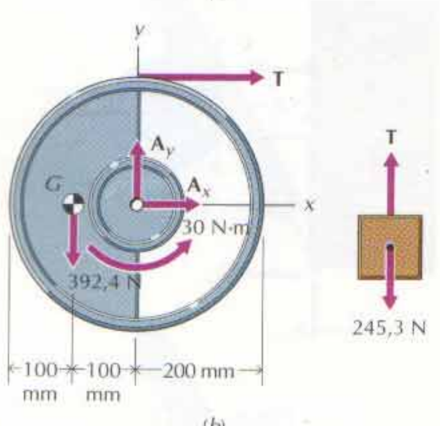
La masa de la rueda desequilibrada A representada en la figura 16-17*a* es de 40 kg y su radio de giro respecto al eje de rotación vale 150 mm. Un cable unido a la rueda sostiene un bloque B de 25 kg. A la rueda se le aplica un par constante C de 30 m · N, según se indica. Cuando la rueda se halla en la posición representada, su velocidad angular es de 5 rad/s en sentido horario. Determinar, en ese instante, la tensión T del cable y la fuerza **A** que sobre la rueda ejerce el pasador situado en el apoyo A.

SOLUCIÓN

En la figura 16-17*b* puede verse los diagramas de sólido libre de la rueda y del bloque. El movimiento del bloque es de traslación ($a_{Gx} = 0$); el movimiento de la rueda es de rotación en torno a un eje fijo ($a_{Gx} = r_G\omega^2$ y $a_{Gy} = -r_G\alpha$) que no pasa



(a)



(b)

Figura 16-17

por el centro de masa G de la rueda. Las ecuaciones del movimiento de la rueda son

$$\Sigma F_x = ma_{Gx} \qquad \Sigma F_y = ma_{Gy} \qquad \Sigma M_{Az} = I_{Az}\alpha$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = ma_{Gx} = mr_G\omega^2$$

$$A_x + T = 40(0{,}100)(-5)^2 = 100 \qquad \text{(a)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = ma_{Gy} = -mr_G\alpha$$

$$A_y - 392{,}4 = -40\,(0{,}100)\,\alpha = -4{,}0\alpha \qquad \text{(b)}$$

$$+\circlearrowright \Sigma M_{Az} = I_{Az}\alpha = mk_A^2\alpha$$

$$30 + 392{,}4(0{,}100) - T(0{,}200) = 40(0{,}150)^2\alpha \qquad \text{(c)}$$

$$T - 346{,}2 = -4{,}5\alpha$$

En las ecuaciones a, b y c hay cuatro incógnitas; por tanto, se necesita una ecuación más para obtener la solución. Esta ecuación adicional se obtiene de la ecuación del movimiento del bloque. Así

$$+\uparrow \Sigma F_y = ma_{By}$$

$$T - 245{,}3 = 25a_{By}$$

La aceleración a_{By} está relacionada con la aceleración angular α de la rueda a través de la expresión $a_{By} = 0{,}200\alpha$; por tanto,

$$T - 245{,}3 = 25a_{By} = 25(0{,}200)\alpha = 5{,}0\alpha$$

Despejando A_x, A_y T y α de las ecuaciones a, b, c y d resulta:

$$\alpha = 10{,}261 \text{ rad/s}^2$$

$$T = 298{,}4 = 298 \text{ N} \qquad \text{Resp.}$$

$$A_x = -198{,}4 = 198{,}4 \text{ N} \leftarrow$$

$$A_y = +349{,}9 \text{ N}$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(-198{,}4)^2 + (349{,}9)^2} = 402 \text{ N} \qquad \text{Resp.}$$

$$\theta_x = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x} = \tan^{-1}\left(\frac{349{,}9}{-198{,}4}\right) = 119{,}6° \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

En los problemas siguientes, las cuerdas, hilos y cables se suponen flexibles, inextensibles y de masa despreciable. Los pasadores y poleas tienen masa despreciable y están exentos de rozamiento, a menos que se especifique otra cosa.

16-21* El torno sobre el que está arrollado un cable, representado en la figura P16-21, pesa 3000 N y tiene un radio de giro de 75 cm. El bloque B pesa 2500 N. Cuando al torno se le aplica un par **T** de momento 1875 m · N, determinar la aceleración del cuerpo B y la tensión del cable.

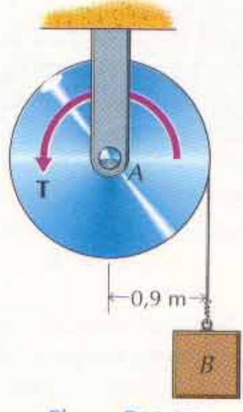


Figura P16-21

16-22* Se aplica una fuerza horizontal **F** de 250 N a un cable arrollado en el tambor interno de la polea compuesta de la figura P16-22, la cual se utiliza para elevar el bloque B. La polea tiene una masa de 20 kg y su radio de giro respecto al eje de rotación vale 160 mm. Si el bloque B tiene una masa de 10 kg, de-

terminar la aceleración angular de la polea y la tensión del cable unido al bloque *B*.

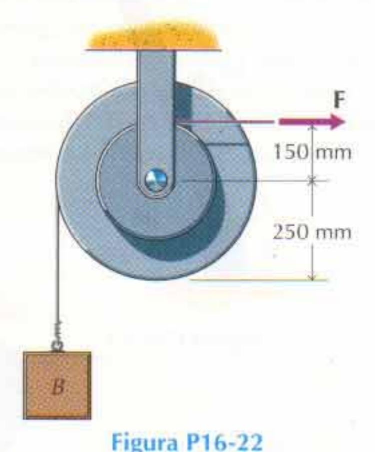


Figura P16-22

16-23 Dos bloques *A* y *B* penden de cables arrollados sobre una polea compuesta, según se indica en la figura P16-23. La polea pesa 300 N y tiene un radio de giro de 190 mm respecto a su eje de rotación. Los bloques *A* y *B* pesan 250 N y 450 N, respectivamente. Determinar, durante el movimiento del sistema, las tensiones de los cables y la aceleración angular de la polea.

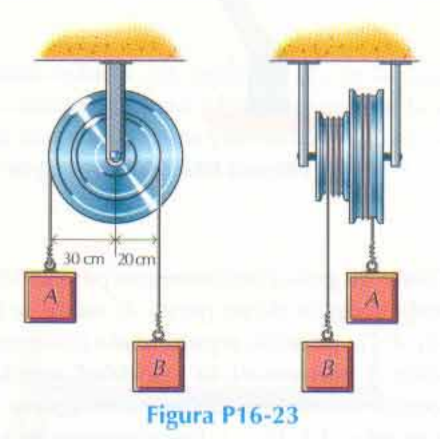


Figura P16-23

16-24 Se aplica un par **T** de momento 300 m · N a la polea *A* de la correa de transmisión representada en la figura P16-24. La polea *A* es un disco macizo de masa 15 kg. La polea *B* y el torno solidario a ella en el que se arrolla el cable tienen una masa combinada de 75 kg y un radio de giro respecto al eje de rotación igual a 150 mm. La masa del bloque *C* es de 150 kg. Determinar la aceleración angular de la polea *B* y la tensión del cable.

16-25* El disco macizo *A* de la figura P16-25 pesa 250 N y gira en torno al pasador liso situado en *O*. El bloque *B* pesa 100 N. Determinar, durante el movimiento del sistema, la aceleración angular del disco *A*, la tensión del cable y las componentes horizontal y vertical de la fuerza que el pasador *O* ejerce sobre el disco *A*.

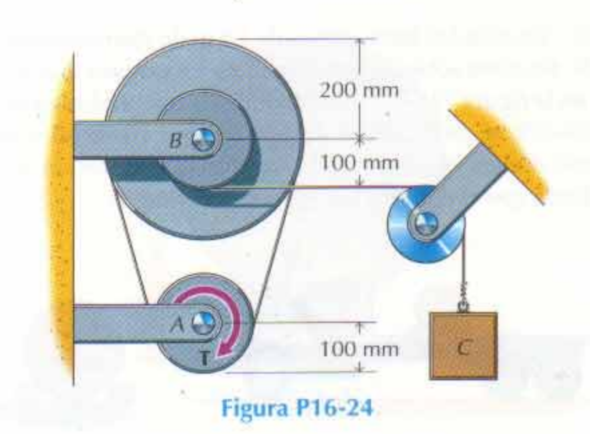


Figura P16-24

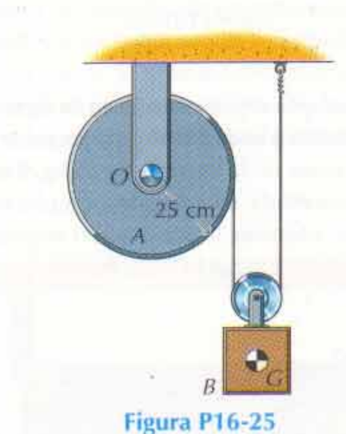


Figura P16-25

16-26* La barra *AB* de la figura P16-26 gira en un plano horizontal con velocidad angular constante de 15 rad/s. Una barra esbelta *C* de sección uniforme y masa 2 kg sostiene una esfera *D* cuya masa es de 4 kg, todo ello en el extremo de la barra *AB*. Un cable mantiene vertical la barra *C*. Determinar la tensión del cable y la fuerza que el pasador en *B* ejerce sobre la barra *C*.

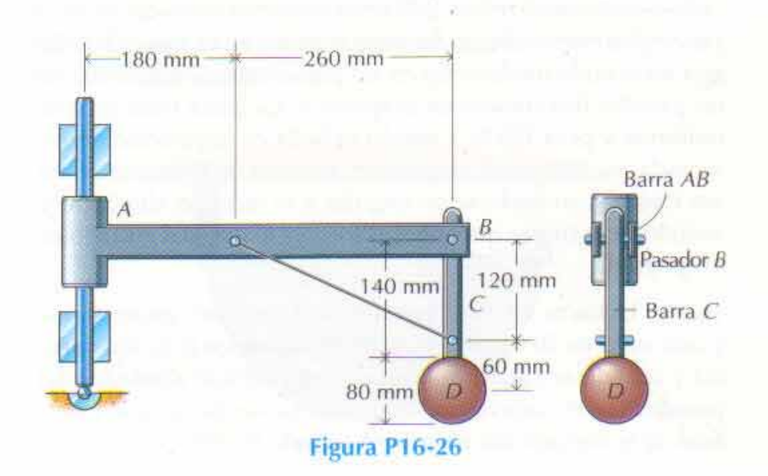


Figura P16-26

16-27 Un cilindro homogéneo de 1,2 m de diámetro que pesa 10 kN descansa sobre la plataforma de un camión según se indica en la figura P16-27*a*. Los bloques representados en la figura P16-27*b* se utilizan para impedir que ruede el cilindro cuando acelere el camión. Determinar la aceleración de éste que haría que el cilindro rodara sobre el bloque.

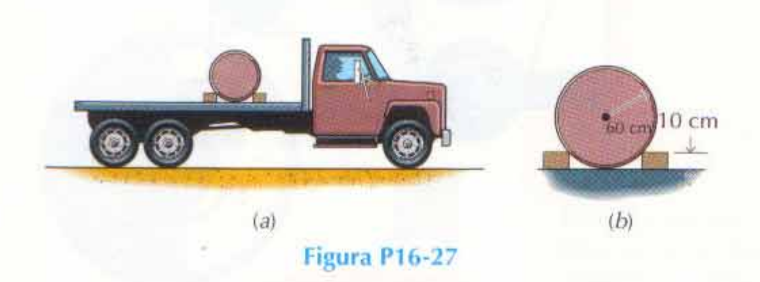


Figura P16-27

16-28 La barra esbelta representada en la figura P16-28 gira en sentido antihorario alrededor de un pasador liso *A* en un plano vertical. La masa de la barra es de 15 kg. Cuando se halla en la posición representada, su velocidad angular es de 10 rad/s. Determinar, en ese instante, la aceleración angular de la barra y el módulo, dirección y sentido de la fuerza que el pasador *A* ejerce sobre ella.

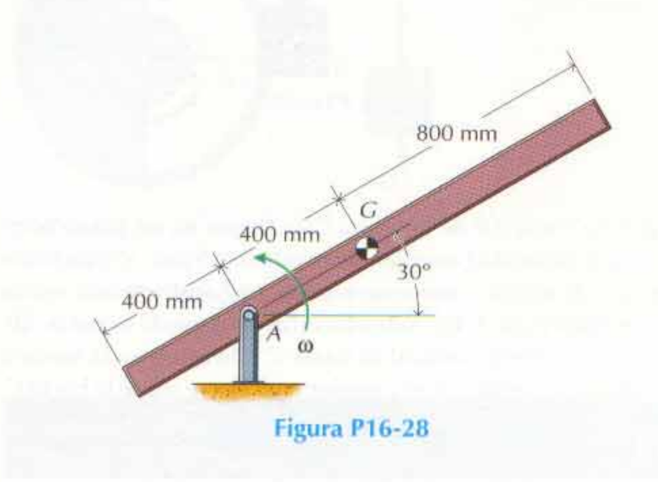


Figura P16-28

16-29* La barra esbelta *AB* representada en la figura P16-29 gira en sentido antihorario en un plano vertical alrededor de un pasador liso situado en el apoyo *A*. La barra tiene sección uniforme y pesa 125 N. Cuando se halla en la posición representada, su velocidad angular es de 6 rad/s. Determinar, en ese instante, su aceleración angular y el módulo, dirección y sentido de la fuerza que sobre ella ejerce el pasador situado en el apoyo *A*.

16-30* La barra *AB* de la figura P16-30 tiene sección uniforme y una masa de 30 kg. Se mantiene en reposo en posición vertical y cuando se suelta gira en un plano vertical alrededor del pasador liso *A*. Determinar las componentes horizontal y vertical de la reacción del pasador *A* cuando $\theta = 90°$.

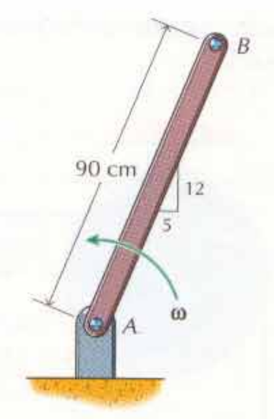


Figura P16-29

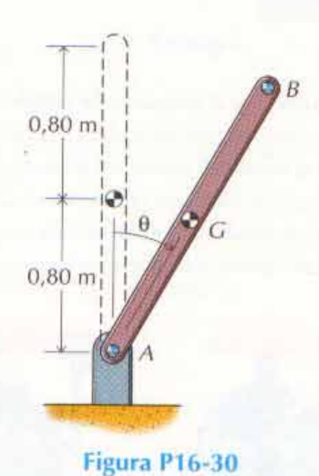


Figura P16-30

16-31 Un disco de grosor uniforme que pesa 250 N gira en un plano vertical alrededor de un punto *A*, según se indica en la figura P16-31. En la posición representada (diámetro que pasa por el pasador *A* horizontal), la velocidad angular es de 10 rad/s en sentido antihorario. Determinar, en ese instante, la aceleración angular del disco y las componentes horizontal y vertical de la fuerza que el pasador ejerce sobre el disco en el apoyo *A*.

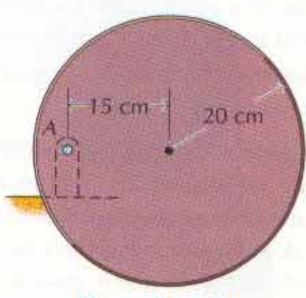


Figura P16-31

16-32 La masa del disco macizo A representado en la figura P16-32 es de 50 kg. Un cable arrollado a una leve garganta del disco está amarrado a la barra BC que tiene sección uniforme y una masa de 25 kg. En la posición representada, la barra BC está horizontal y girando en sentido antihorario en un plano vertical con una velocidad angular de 5 rad/s. Determinar la aceleración angular del disco A, la tensión del cable y las componentes horizontal y vertical de la reacción del apoyo C.

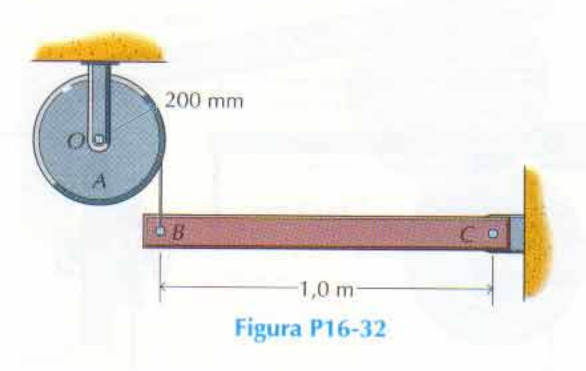


Figura P16-32

16-33* La barra esbelta AB, representada en la figura P16-33, tiene sección uniforme y pesa 100 N. Determinar la aceleración del centro de masa de la barra y la reacción del apoyo A inmediatamente después de cortar el hilo del apoyo B.

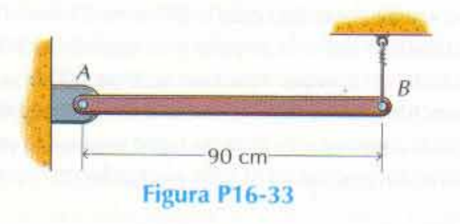


Figura P16-33

16-34* Un disco de grosor uniforme y masa 25 kg gira en un plano vertical alrededor de un pasador situado en el punto A, según se indica en la figura P16-34. En la posición representada (diámetro que pasa por A vertical), la velocidad angular es de 20 rad/s en sentido antihorario y el módulo del par **C** es de 50 m · N. Determinar, en ese instante, la aceleración angular del disco y las componentes horizontal y vertical de la fuerza que sobre él ejerce el pasador situado en el apoyo A.

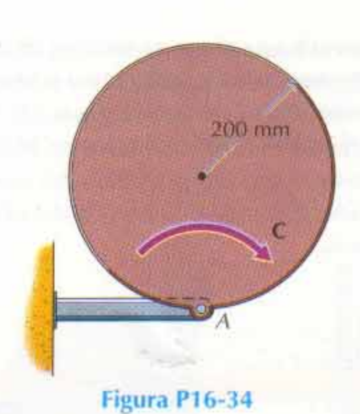


Figura P16-34

16-35 Una placa rectangular de grosor uniforme está sostenida por un pasador y un cable según se indica en la figura P16-35. La placa pesa 500 N. Si se rompe el cable atado en B, determinar qué aceleración tomará el centro de masa de la placa y qué reacción habrá en el apoyo A en el instante en que comience el movimiento.

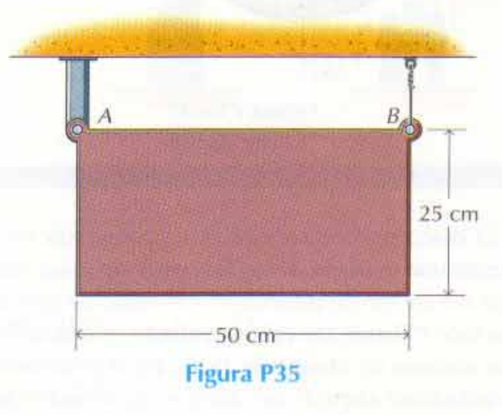


Figura P35

16-36 Una placa semicircular de grosor uniforme está sostenida por un pasador y un cable según se indica en la figura P16-36. Su masa es de 80 kg. Si se rompe el cable atado en B, determinar qué aceleración tomará el centro de masa de la placa y qué reacción habrá en el apoyo A en el instante en que comience el movimiento.

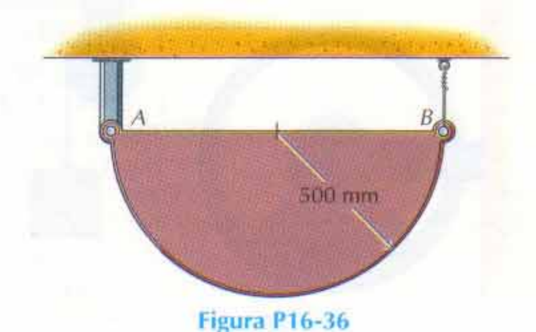


Figura P16-36

16-37* El disco no homogéneo de 300 mm de diámetro representado en la figura P16-37 pesa 625 N y su radio de giro respecto al eje fijo de rotación es de 212,5 mm. Un cable arrollado sobre la periferia del disco está unido a un bloque *B* que pesa 250 N. Si se suelta el sistema partiendo del reposo en la posición representada, determinar la tensión del cable y la aceleración del bloque *B*.

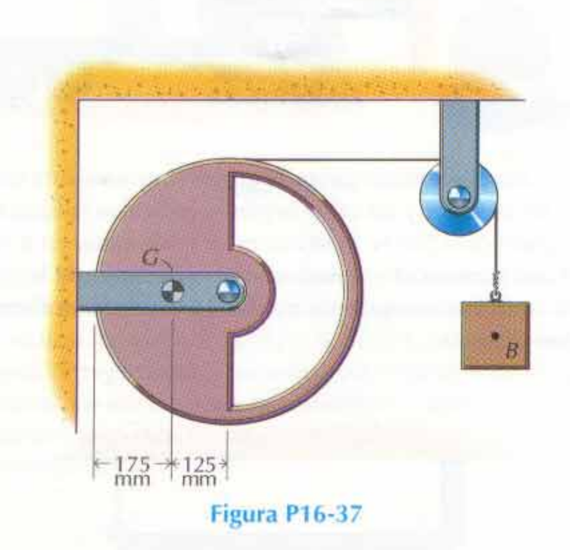


Figura P16-37

16-38* El disco no homogéneo *A* representado en la figura P16-38 tiene una masa de 20 kg. Su centro de masa está situado a 250 mm del eje fijo de rotación *O* y el radio de giro respecto a dicho eje vale 350 mm. Un cable arrollado en una leve garganta del disco sostiene un bloque de 25 kg. En la posición representada, la velocidad angular del disco es de 10 rad/s en sentido horario. Determinar la tensión del cable y las componentes horizontal y vertical de la fuerza que el pasador en *O* ejerce sobre el disco.

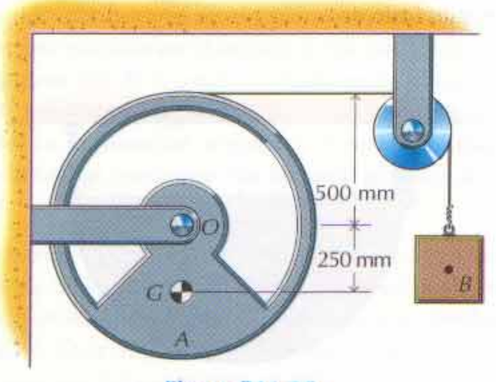


Figura P16-38

16-39 En la figura P16-39 se ha representado un freno para regular el descenso de un cuerpo. Las partes giratorias del freno (polea del cable y tambor) pesan 1250 N y tienen un radio de giro respecto a su eje de rotación igual a 106,25 mm. El coeficiente de rozamiento cinético entre la zapata y el tambor vale 0,50. El peso del cuerpo *C* es de 5000 N. Determinar, cuando se aplica a la palanca una fuerza **P** de 750 N, la tensión del cable, la aceleración del cuerpo *C* y las componentes horizontal y vertical de la reacción del apoyo *B* sobre la palanca del freno.

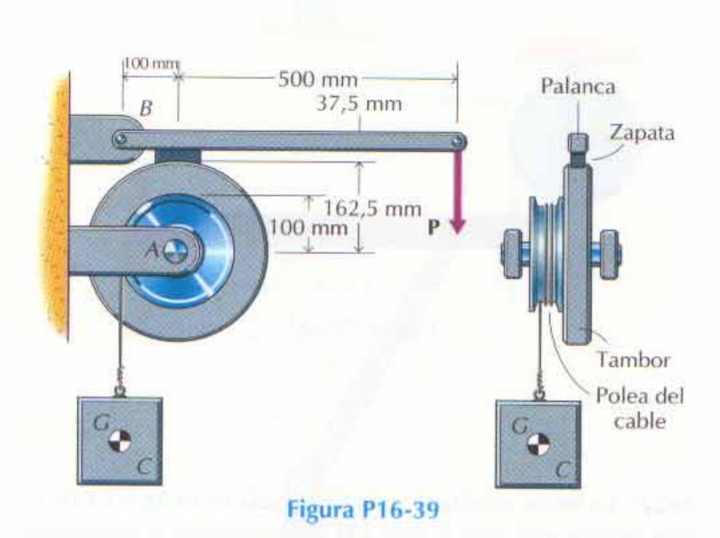


Figura P16-39

16-40 La celeridad de un sistema giratorio se regula mediante un freno según se indica en la figura P16-40. Las partes giratorias del sistema tienen una masa de 300 kg y un radio de giro respecto al eje de rotación igual a 200 mm. El coeficiente de rozamiento cinético entre la zapata y el tambor vale 0,50. Determinar, cuando se aplique una fuerza **P** de 500 N a la palanca, las componentes horizontal y vertical de la reacción del pasador *B* sobre la palanca y el tiempo *t* que tardará la celeridad del sistema en reducirse de 1000 rpm al estado de reposo.

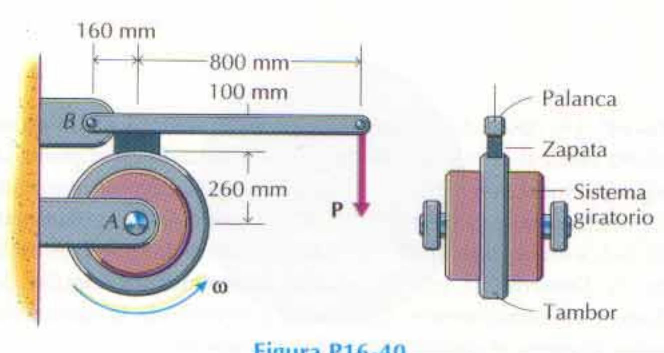


Figura P16-40

16-41 El volante representado en la figura P16-41 gira con velocidad angular constante de 50 rad/s en sentido antihorario. La barra *AB* pesa 100 N y tiene un radio de giro respecto a su centro de masa igual a 229 mm. Determinar las componentes horizontal y vertical de la fuerza que ejerce el apoyo *A* de la barra *AB* cuando $\theta = 60°$. La ranura de la barra *AB* es lisa.

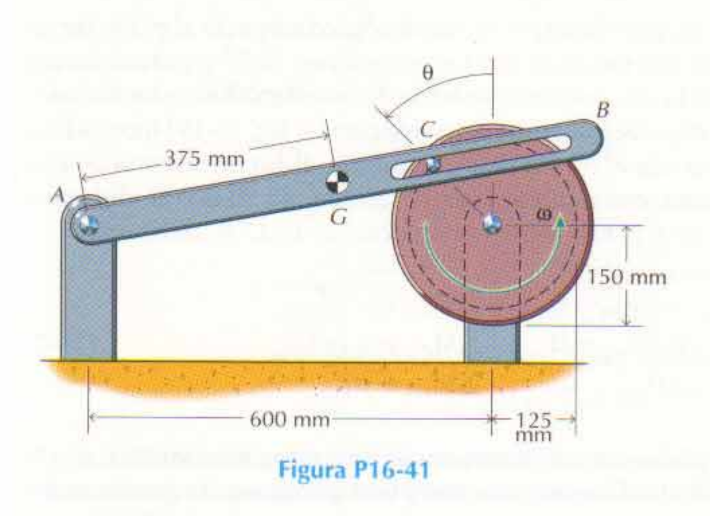


Figura P16-41

16-42* El volante representado en la figura P16-42 gira con velocidad angular constante de 30 rad/s. La barra *AB* tiene una masa de 15 kg y un radio de giro respecto a su centro de masa igual a 325 mm. El coeficiente de rozamiento entre el pasador en *C* y la ranura de la barra vale 0,10. Determinar, cuando la barra esté en la posición representada, las componentes horizontal y vertical de la fuerza que sobre la barra ejerce el pasador del apoyo *A*.

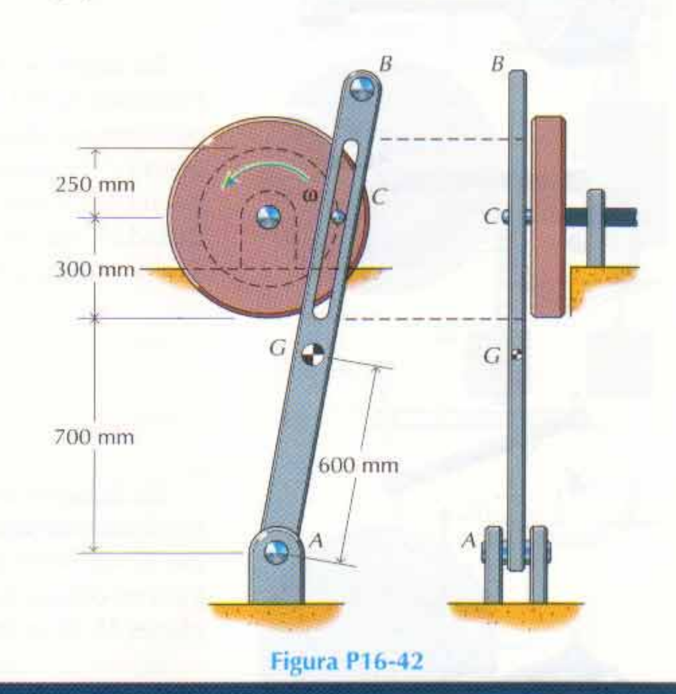
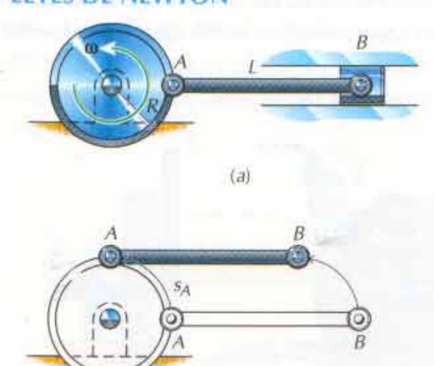


Figura P16-42

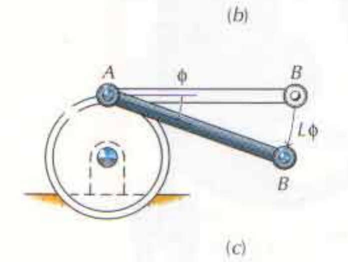
16.4.3 Movimiento plano cualquiera

En la figura 16-18, donde un émbolo está conectado a un volante mediante una biela *AB*, se ilustran tres formas de movimiento plano. Está claro que el movimiento del volante es una rotación en torno a un eje fijo y el movimiento del émbolo una traslación rectilínea. El movimiento de la biela *AB* es un ejemplo de lo que consideramos un movimiento plano cualquiera. Cuando el volante gira un ángulo θ (v. fig. 16-18*b*), el pasador *A* recorre una distancia $s_A = R\theta$ a lo largo de un camino circular. El movimiento del pasador *B* se puede considerar que es una superposición de los desplazamientos resultantes de una traslación curvilínea de la biela, como se indica en la figura 16-18*b* y de una rotación de dicha biela en torno al pasador *A*, según se indica en la figura 16-18*c*. Como resultado de estos dos desplazamientos, el pasador *B* recorre una distancia s_B a lo largo de un camino horizontal. Así pues, el movimiento plano de la biela *AB* es la superposición de una traslación y una rotación en torno a un eje fijo. La forma reducida de las ecuaciones 16-17 que describen el movimiento de la biela *AB* cuando se toma el origen de coordenadas en el pasador *A* y los ejes *x* e *y* están orientados según el eje de la biela y perpendicularmente a ella ($\bar{y} = 0$), respectivamente, es

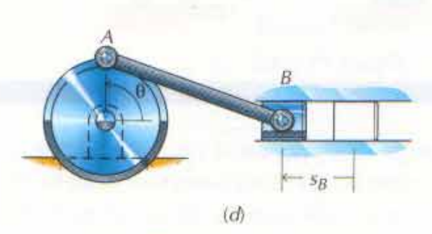
$$\Sigma F_x = ma_{Gx} \qquad \Sigma F_y = ma_{Gy}$$
$$\Sigma M_{Az} = a_{Ay}\bar{x}m + \alpha I_{Az} \qquad (16\text{-}22)$$



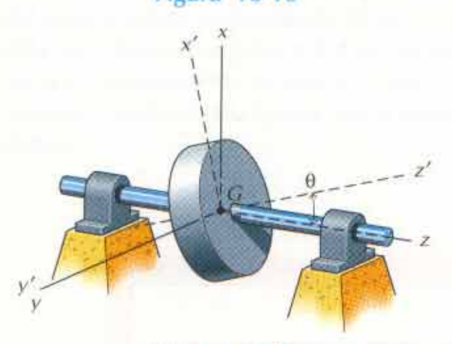
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 16-18

Si se sitúa el origen del sistema de coordenadas en el centro de masa G de la biela, las ecuaciones 16-22 se reducen a

$$\Sigma F_x = ma_{Gx} \qquad \Sigma F_y = ma_{Gy}$$
$$\Sigma M_{Gz} = \alpha I_{Gz} \qquad (16\text{-}23)$$

En aquellos casos en que el cuerpo no sea simétrico respecto al plano de movimiento, habrá que ir con cuidado con las ecuaciones 16-17 y reducirlas adecuadamente mediante la selección del sistema de coordenadas xyz solidario al cuerpo. Por ejemplo, consideremos un disco macizo (v. fig. 16-19) montado sobre un árbol que forma con el eje del disco un ángulo θ. En un sistema de coordenadas xyz de origen coincidente con el centro de masa G del disco, $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $I_{Gyz} = 0$ y $\mathbf{a}_G = \mathbf{0}$. Entonces, las ecuaciones 16-17 se reducen a

$$\Sigma F_x = ma_{Gx} = 0 \qquad \Sigma M_{Gx} = -\alpha I_{Gzx}$$
$$\Sigma F_y = ma_{Gy} = 0 \qquad \Sigma M_{Gy} = -\omega^2 I_{Gzx} \qquad (16\text{-}24)$$
$$\Sigma F_z = 0 \qquad \Sigma M_{Gz} = \alpha I_{Gz}$$

En la figura 16-20 podemos ver otro ejemplo de cuerpo no simétrico respecto al plano de movimiento. En este caso, una placa triangular de grosor uniforme es solidaria a un árbol circular que gira. Para un sistema de coordenadas xyz con origen A en el eje del árbol, $\bar{y} = 0$, $I_{Ayz} = 0$ y $\mathbf{a}_A = \mathbf{0}$. Así pues, las ecuaciones 16-17 se reducen a

$$\Sigma F_x = ma_{Gx} = -m\bar{x}\omega^2 \qquad \Sigma M_{Ax} = -\alpha I_{Azx}$$
$$\Sigma F_y = ma_{Gy} = m\bar{x}\alpha \qquad \Sigma M_{Ay} = -\omega^2 I_{Azx} \qquad (16\text{-}25)$$
$$\Sigma F_z = 0 \qquad \Sigma M_{Az} = \alpha I_{Az}$$

Estas cinco ecuaciones proporcionan suficiente información para determinar cinco incógnitas, entre las que pueden contarse las componentes B_x, B_y, C_x y C_y de los cojinetes necesarias en todo instante para originar los momentos M_x y M_y precisos para mantener el cuerpo en un estado de movimiento plano.

En los ejemplos que siguen se ilustra el método de resolución de problemas de movimiento plano cualquiera.

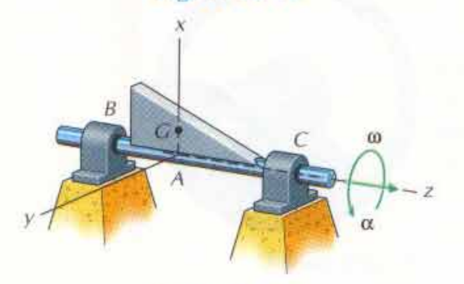


Figura 16-19

Figura 16-20

PROBLEMA EJEMPLO 16.7

Un bloque y un carrete están sostenidos por cables arrollados al carrete según se indica en la figura 16-21*a*. El bloque pesa 475 N, el carrete 250 N y tiene un radio de giro de 100 mm respecto al centro de masa. Si se suelta el sistema partiendo del reposo en la posición representada, determinar la aceleración del centro de masa G del carrete y las tensiones de los tres cables.

SOLUCIÓN

En la figura 16-21*b* pueden verse los diagramas de sólido libre del bloque y del carrete. El movimiento del bloque es de traslación ($\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{a}_{Gx} = 0$); el del carrete

es un movimiento plano con $\mathbf{a}_{Gz} = 0$. El origen del sistema de coordenadas xyz se ha tomado en el centro de masa G de cada cuerpo.

Las ecuaciones del movimiento del bloque son

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = ma_{Gy} \qquad \Sigma M_{Gz} = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = T_2 - 475 = \frac{475}{9{,}81}\, a_{Gyb}$$

$$T_2 - 48{,}42a_{Gyb} = 475 \qquad (a)$$

Las ecuaciones del movimiento del carrete son

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = ma_{Gy} \qquad \Sigma M_{Gz} = I_{Gz}\alpha$$

$$I_{Gz} = mk^2 = \frac{250}{9{,}81}(0{,}100)^2 = 0{,}2548 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$+\uparrow \ \Sigma F_y = 2T_1 - T_2 - 250 = \frac{250}{9{,}81} a_{Gys}$$

$$2T_1 - T_2 - 25{,}48a_{Gys} = 250 \qquad (b)$$

$$+\circlearrowright \ \Sigma M_{Gz} = 2T_1(0{,}075) - T_2 = 0{,}2548\alpha$$

$$6T_1 - T_2 = 10{,}19\alpha \qquad (c)$$

Como las ecuaciones a, b y c contienen cinco incógnitas, serán necesarias dos ecuaciones más para completar la solución del problema. Del esquema de la figura 16-21c resulta

$$y_{Gs} = -0{,}075\theta$$

$$\ddot{y}_{Gs} = -0{,}075\ddot{\theta} \qquad \text{o sea} \qquad a_{Gys} = -0{,}075\alpha \qquad (d)$$

$$y_{Gb} = y_{Gs} + 0{,}125\theta = -0{,}075\theta + 0{,}125\theta = 0{,}05\theta$$

$$\ddot{y}_{Gb} = 0{,}05\ddot{\theta} \qquad \text{o sea} \qquad a_{Gyb} = 0{,}05\alpha \qquad (e)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones a, b, c, d y e, se tiene

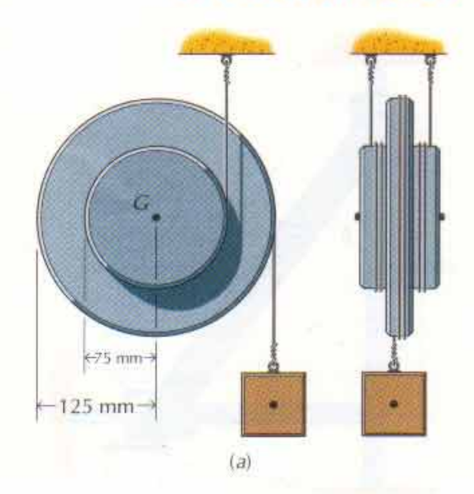
$$T_1 = 371 \text{ N} \qquad \text{Resp.}$$

$$T_2 = 473 \text{ N} \qquad \text{Resp.}$$

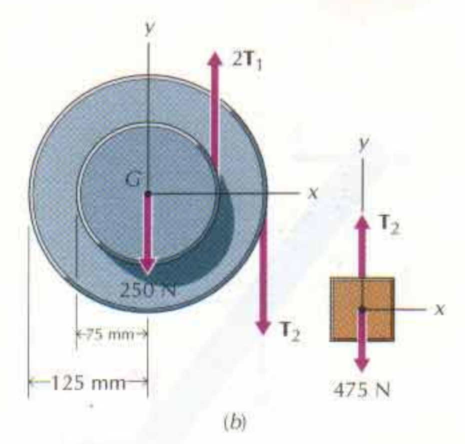
$$a_{Gys} = 0{,}772 \text{ m/s}^2 \uparrow \qquad \text{Resp.}$$

$$a_{Gyb} = -0{,}481 \text{ m/s}^2 = 0{,}481 \text{ m/s}^2 \downarrow$$

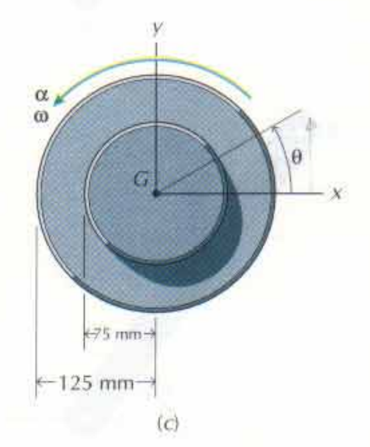
$$\alpha = -9{,}63 \text{ rad/s}^2 = 9{,}63 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$$



(a)



(b)

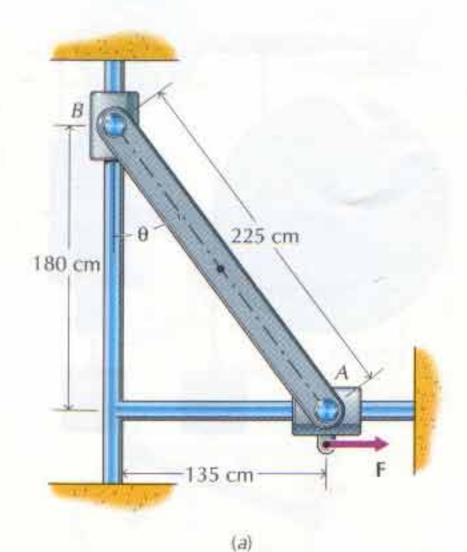


(c)

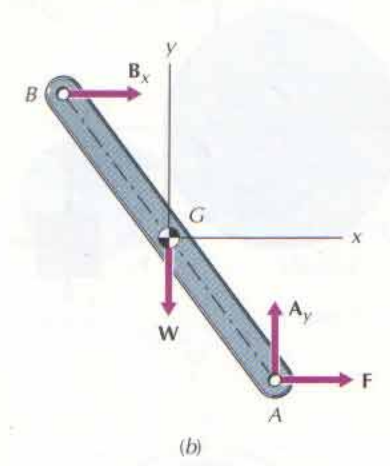
Figura 16-21

PROBLEMA EJEMPLO 16.8

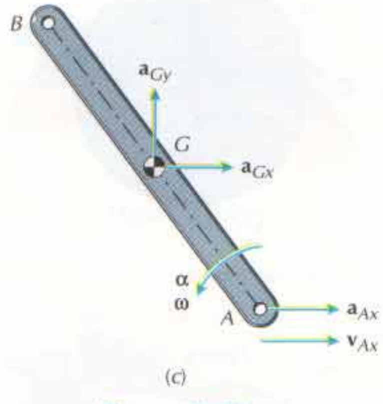
La barra esbelta AB representada en la figura 16-22a tiene sección uniforme y pesa 250 N. Está unida, por sus extremos A y B, a collares montados sobre varillas lisas, una horizontal y otra vertical. Cuando la barra se halla en la posición representada, el collar A lleva una velocidad de 1,5 m/s hacia la derecha y se acelera a razón de 1,2 m/s². Determinar la fuerza **F**, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la barra y las fuerzas que sobre ella ejercen los pasadores A y B.



(a)



(b)



(c)

Figura 16-22

SOLUCIÓN

En la figura 16-22*b* puede verse el diagrama de sólido libre de la barra *AB*. Las posiciones de los extremos *A* y *B* de la barra, para el sistema de coordenadas que se indica son

$$x_A = L \operatorname{sen}\theta \qquad y_B = L\cos\theta$$

Así pues,

$$v_A = \dot{x}_A = L\dot{\theta}\cos\theta = L\omega\cos\theta$$
$$a_A = \ddot{x}_A = L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta = L\alpha\cos\theta - L\omega^2\operatorname{sen}\theta$$

Para los datos consignados

$$v_A = 1{,}5 \text{ m/s} \qquad a_A = 1{,}2 \text{ m/s}^2 \qquad L = 2{,}25 \text{ m}$$

$$\omega = \frac{v_A}{L\cos\theta} = \frac{1{,}5}{(2{,}25)(0{,}8)} = 0{,}8333 \text{ rad/s} \qquad \text{Resp.}$$

$$\alpha = \frac{a_A + L\omega^2\operatorname{sen}\theta}{L\cos\theta} = \frac{1{,}2 + 2{,}25(0{,}8333)^2(0{,}6)}{(2{,}25)(0{,}8)} = 1{,}1875 \text{ rad/s}^2 \qquad \text{Resp.}$$

$$a_G = a_A + a_{G/A}$$
$$a_{Gx} = a_{Ax} + \frac{L}{2}\omega^2\operatorname{sen}\theta - \frac{L}{2}\alpha\cos\theta$$
$$= 1{,}2 + 1{,}125(0{,}8333)^2(0{,}6) - 1{,}125(1{,}1875)(0{,}8) = 0{,}6000 \text{ m/s}^2$$
$$a_{Gy} = a_{Ay} - \frac{L}{2}\omega^2\cos\theta - \frac{L}{2}\alpha\operatorname{sen}\theta$$
$$= 0 - 1{,}125(0{,}8333)^2(0{,}8) - 1{,}125(1{,}1875)(0{,}6) = -1{,}247 \text{ m/s}^2$$

Las ecuaciones del movimiento de la barra son

$$\Sigma F_x = ma_{Gx} \qquad \Sigma F_y = ma_{Gy} \qquad \Sigma M_{Gz} = I_{Gz}\alpha$$

$$I_{Gz} = \frac{1}{12}mL^2 = \frac{1}{12}\frac{250}{9{,}81}(9{,}81)^2 = 10{,}751 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$+\!\rightarrow \Sigma F_x = F + B_x = ma_{Gx}$$
$$F + B_x = \frac{250}{9{,}81}(0{,}6000) = 15{,}291 \qquad \textbf{(a)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = A_y - W = ma_{Gy}$$
$$A_y - 250 = \frac{250}{9{,}81}(-2{,}051)$$
$$A_y = +197{,}73 = 197{,}7 \text{ N}\uparrow \qquad \text{Resp.}$$

$$+\circlearrowright \Sigma M_{Gz} = F(0{,}9) + A_y(0{,}675) - B_x(0{,}9) = I_{Gz}\alpha$$
$$F(0{,}9) + 197{,}73(0{,}675) - B_x(0{,}9) = I_{Gz}\alpha$$
$$F - B_x = -134{,}11 \qquad \textbf{(b)}$$

Resolviendo el sistema que forman las ecuaciones *a* y *b*:

$$F = -59{,}4 = 59{,}4 \text{ N} \leftarrow \qquad \text{Resp.}$$
$$B_x = 74{,}70 = 74{,}7 \text{ N} \longrightarrow \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 16.9

Un cilindro macizo homogéneo de masa 100 kg descansa sobre un plano inclinado según se indica en la figura 16-23*a*. El coeficiente de rozamiento entre cilindro y plano vale 0,40. Un cable arrollado alrededor de una leve muesca practicada en el cilindro lo conecta a un bloque de 75 kg. La polea sobre la que pasa el cable tiene una masa de 10 kg. Si se suelta el sistema partiendo del reposo en la posición representada, determinar la aceleración del centro de masa G del bloque, la aceleración del centro de masa G del cilindro y las tensiones en las dos partes del cable.

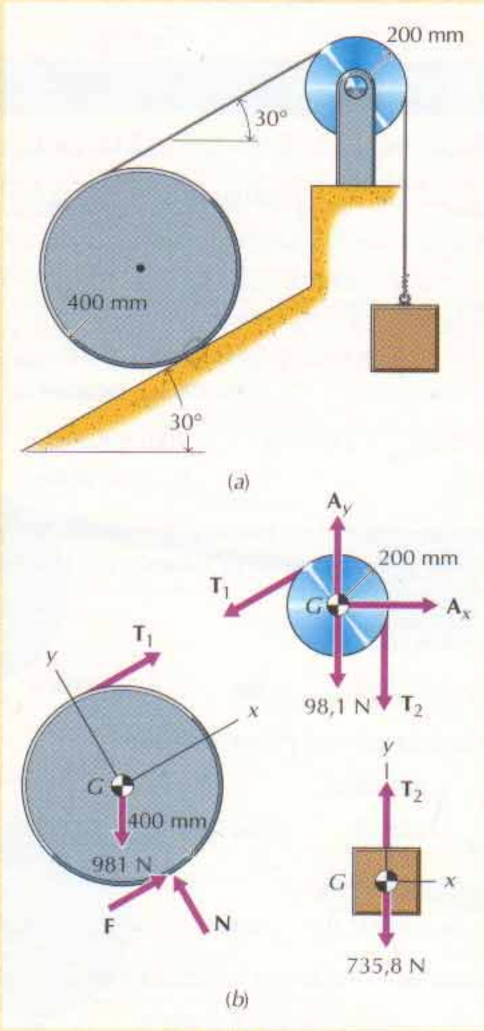


Figura 16-23

SOLUCIÓN

En la figura 16-23*b* pueden verse diagramas del sólido libre correspondientes al cilindro, polea y bloque. El movimiento del bloque es de traslación ($\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{a}_G = \mathbf{0}$); el movimiento de la polea es de rotación en torno a un eje fijo que pasa por su centro de masa ($\mathbf{a}_{Gx} = \mathbf{a}_{Gy} = \mathbf{0}$) y el movimiento del cilindro es plano con $\mathbf{a}_{Gy} = \mathbf{0}$.

Las ecuaciones del movimiento del bloque son

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = ma_{Gy} \qquad \Sigma M_{Gz} = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = T_2 - 735{,}8 = 75a_{Gyb}$$

$$T_2 - 75a_{Gyb} = 735{,}8 \tag{a}$$

Las ecuaciones del movimiento de la polea son

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_{Gz} = I_{Gz}\alpha$$

$$I_{Gzp} = \frac{1}{2}m_p R_p^2 = \frac{1}{2}(10)(0{,}200)^2 = 0{,}200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$+\circlearrowright \Sigma M_{Gzp} = T_1(0{,}200) - T_2(0{,}200) = 0{,}200\alpha_p$$

$$T_1 - T_2 = \alpha_p \tag{b}$$

Las ecuaciones del movimiento del cilindro son

$$\Sigma F_x = ma_{Gx} \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_{Gz} = I_{Gz}\alpha$$

$$I_{Gzc} = \frac{1}{2}m_c R_c^2 = \frac{1}{2}(100)(0{,}400)^2 = 8{,}00 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$+\nwarrow \Sigma F_y = N - m_c g \cos 30°$$

$$= N - 100(9{,}81)\cos 30° = 0 \qquad N = 849{,}6 \text{ N}$$

$$+\nearrow \Sigma F_x = T_1 + F - m_c g \text{ sen } 30° = ma_{Gxc}$$

$$= T_1 + F - 100(9{,}81) \text{ sen } 30° = 100a_{Gxc}$$

$$T_1 + F - 100a_{Gxc} = 490{,}5 \tag{c}$$

$$+\circlearrowright \Sigma M_{Gzc} = F(0{,}400) - T_1(0{,}400) = 8{,}00\alpha_c$$

$$F - T_1 = 20{,}0\alpha_c \tag{d}$$

Como en las ecuaciones *a, b, c* y *d* hay siete incógnitas, se necesitan tres ecuaciones cinemáticas más para completar la solución del problema. Si el cable no se desliza sobre la polea

$$y_{Gb} = 0{,}200\theta_p$$

$$\ddot{y}_{Gb} = 0{,}200\ddot{\theta}_p \qquad \text{o sea} \qquad \alpha_p = 5{,}000a_{Gyb} \tag{e}$$

Si el cilindro no se desliza sobre el plano inclinado

$$y_{Gb} = 2(0{,}400)\theta_c$$

$$\ddot{y}_{Gb} = 0{,}800\ddot{\theta}_c \qquad \text{o sea} \qquad \alpha_c = 1{,}259a_{Gyb} \tag{f}$$

$$x_{Gx} = -0{,}400\ \theta_c$$

$$\ddot{x}_{Gc} = -0{,}400\ \ddot{\theta}_c \qquad \text{o sea} \qquad a_{Gxc} = -0{,}500a_{Gyb} \tag{g}$$

Resolviendo el sistema constituido por las ecuaciones *a, b, c, d, e, f* y *g*, se tiene

$T_1 = 401{,}8 = 402$ N — Resp.

$T_2 = 422{,}7 = 423$ N — Resp.

$a_{Gyb} = -4{,}175 = 4{,}18 \text{ m/s}^2 \downarrow$ — Resp.

$a_{Gxc} = 2{,}087 = 2{,}09 \text{ m/s}^2 \nearrow$ — Resp.

$\alpha_p = -20{,}87 = 20{,}9 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$

$\alpha_c = -5{,}219 = 5{,}22 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$

$F = 297{,}4 = 297 \text{ N} \nearrow$

Hay que comprobar si el coeficiente de rozamiento es suficiente para desarrollar la fuerza **F** de rozamiento necesaria para evitar el deslizamiento del cilindro sobre el plano inclinado. Así

$$F_{max} = \mu N = 0{,}40(849{,}6) = 339{,}8 = 340 \text{ N}$$

Como $F_{máx}$ es mayor que F, no habrá deslizamiento. Si $F_{máx}$ hubiera sido inferior a F, habría deslizamiento y se habría tenido que resolver el problema con $F = F_{máx} = \mu N$ en vez de la ecuación g y $0{,}4\alpha_c - a_{Gxc} = a_{Gyb}$ en lugar de la ecuación f.

PROBLEMA EJEMPLO 16.10

En la figura 16-24*a* se ha representado un sistema constituido por un volante, una biela y un émbolo. La masa del volante es de 50 kg y su radio de giro respecto a su eje de rotación vale 155 mm. La biela AB es de sección uniforme y masa 10 kg. La masa del émbolo es de 15 kg. Un par **T** hace girar al volante en sentido antihorario con una velocidad angular constante de 500 rpm. Determinar el módulo del par **T**, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{AB}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}_{AB}$ de la biela AB y las componentes vertical y horizontal de las fuerzas que sobre ésta ejercen los pasadores en A y B cuando $\theta = 60°$. Despréciense los rozamientos entre el émbolo y las paredes del cilindro.

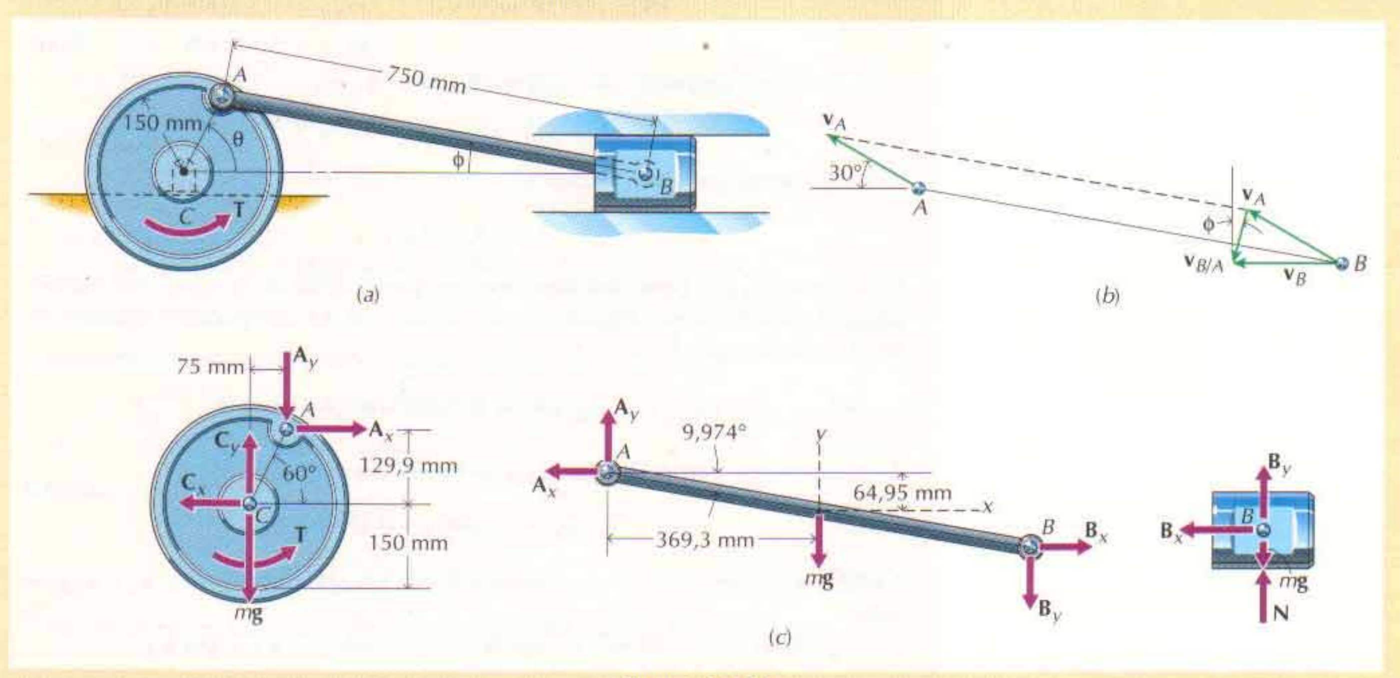


Figura 16-24

SOLUCIÓN

De la geometría del sistema, cuando $\theta = 60°$, resulta

$$\frac{\text{sen } 60°}{750} = \frac{\text{sen } \phi}{150} \qquad \phi = \text{sen}^{-1}\left(\frac{150}{750} \text{ sen } 60°\right) = 9{,}974°$$

Como el volante gira con velocidad angular constante ($N = 500$ rpm), se obtendrán fácilmente la velocidad y la aceleración del pasador A. Así pues, para el volante

$$\omega_v = \frac{2\pi N}{60} = \frac{2\pi(500)}{60} = 52{,}36 \text{ rad/s} \circlearrowright$$
$$\alpha_v = 0$$

Para el pasador A

$$\mathbf{v}_A = r_v\omega_v\mathbf{e}_\theta = 0{,}150(52{,}36)\mathbf{e}_\theta = 7{,}854\mathbf{e}_\theta \text{ m/s}$$
$$\mathbf{a}_A = -r_v\omega_v^2\mathbf{e}_r = -0{,}150(52{,}36)^2\mathbf{e}_r = -411{,}2\mathbf{e}_r \text{ m/s}^2$$

Conocidas $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_A$, se pueden determinar la velocidad $\mathbf{v}_B$ y la aceleración $\mathbf{a}_B$ del pasador B, así como la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{AB}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}_{AB}$ de la biela AB. Para el pasador B

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

En la figura 16-24b se han representado las velocidades $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_{B/A}$. Así pues,

$$v_B\mathbf{i} = 7{,}854(-\cos 30°\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 30°\,\mathbf{j}) + 0{,}750\omega_{AB}(\operatorname{sen}\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j})$$
$$= (-6{,}802 + 0{,}1299\omega_{AB})\,\mathbf{i} + (3{,}927 + 0{,}7387\omega_{AB})\,\mathbf{j}$$

De donde

$$3{,}927 + 0{,}7387\omega_{AB} = 0 \qquad \omega_{AB} = -5{,}316 \text{ rad/s}$$
$$\boldsymbol{\omega}_{AB} = 5{,}32 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \text{Resp.}$$
$$v_B = -6{,}802 + 0{,}1299\omega_{AB} = -6{,}802 + 0{,}1299(-5{,}316) = -7{,}493 \text{ m/s}$$
$$\mathbf{v}_B = 7{,}439 \text{ m/s} \leftarrow$$

Análogamente, para la aceleración

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

La aceleración $\mathbf{a}_{B/A}$ tiene dos componentes que resultan de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{AB}$ y de la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}_{AB}$ de la biela AB. La componente según el eje de la biela (dirigida hacia A) es

$$(a_{B/A}) = L_{AB}\omega_{AB}^2 = 0{,}750(5{,}316)^2 = 21{,}19 \text{ m/s}^2$$

La componente perpendicular al eje de la biela es

$$(a_{B/A})_t = L_{AB}\alpha_{AB} = 0{,}750\alpha_{AB}$$

Combinando las componentes cartesianas de las aceleraciones $\mathbf{a}_A$, $\mathbf{a}_B$ y $\mathbf{a}_{B/A}$, se tiene

$$a_B\mathbf{i} = 411{,}2\,(-\cos 60°\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} 60°\,\mathbf{j}) + 21{,}19(-\cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j})$$
$$+ 0{,}750\alpha_{AB}(\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j})$$
$$= (-226{,}5 + 0{,}1299\alpha_{AB})\,\mathbf{i} + (-352{,}4 + 0{,}7387\alpha_{AB})\,\mathbf{j}$$

De donde

$$-352{,}4 + 0{,}7387\alpha_{AB} = 0 \qquad \alpha_{AB} = 477{,}1 \text{ rad/s}^2$$
$$\boldsymbol{\alpha}_{AB} = 477 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright \qquad \text{Resp.}$$

y

$$a_B = -226{,}5 + 0{,}1299a_{AB} = -226{,}5 + 0{,}1299(477{,}1) = -164{,}5 \text{ m/s}^2$$

$$\mathbf{a}_B = 164{,}5 \text{ m/s}^2 \leftarrow$$

Por último, las componentes horizontal y vertical de la aceleración del centro de masa de la biela se obtienen de

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{G/B}$$

$$a_{Gx} = a_{Bx} - \frac{L}{2}\omega_{AB}^2 \cos\phi - \frac{L}{2}\alpha_{AB} \text{ sen } \phi$$

$$= -164{,}47 + 0{,}375(5{,}316)^2(0{,}9849) - 0{,}375(477{,}1)(0{,}1732) = -185{,}02 \text{ m/s}^2$$

$$a_{Gy} = a_{By} - \frac{L}{2}\omega_{AB}^2 \text{ sen } \phi - \frac{L}{2}\alpha_{AB} \cos\phi$$

$$= 0 - 0{,}375(5{,}316)^2(0{,}1732) - (0{,}375)(477{,}1)(0{,}9849) = -178{,}05 \text{ m/s}^2$$

En la figura 16-24*c* pueden verse los diagramas de sólido libre del volante, biela y émbolo. El movimiento del émbolo es una traslación pura. Por tanto,

$$+\rightarrow \Sigma F_x = ma_{Gx} \qquad -B_x = 15(-164{,}47)$$

$$\mathbf{B}_x = 2467 \text{ N} \leftarrow$$

$$\uparrow \Sigma F_y = ma_{Gy} \qquad N + B_y - mg = 0$$

$$+\circlearrowright \Sigma M_{Gz} = I_{Gz}\alpha \qquad 0 = 0$$

La biela se mueve con movimiento plano; por tanto,

$$+\rightarrow \Sigma F_x = ma_{Gx} \qquad 2467 - A_x = 10(-185{,}02)$$

$$A_x = 4317 \text{ N} \leftarrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = ma_{Gy} \qquad A_y - 10(9{,}81) - B_y = 10(-178{,}05)$$

$$A_y - B_y = -1682{,}4 \qquad \text{(a)}$$

$$I_{Gz} = \frac{1}{12}mL^2 = \frac{1}{12}(10)(0{,}75)^2 = 0{,}4688 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$+\circlearrowright \Sigma M_{Gz} = I_{Gz}\alpha$$

$$4317(0{,}06495) - A_y(0{,}3693) + 2467(0{,}06495) - B_y(0{,}3693) = 0{,}4688(477{,}1)$$

$$A_y - B_y = 587{,}48 \qquad \text{(b)}$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones *a* y *b*, se tiene

$$A_y = -547{,}5 = 547{,}5 \text{ N} \downarrow \qquad \text{Resp.}$$

$$B_y = 1134{,}9 = 1134{,}9 \text{ N} \uparrow \qquad \text{Resp.}$$

Además

$$A_x = 4317 \text{ N} \leftarrow \qquad \text{Resp.}$$

$$B_x = 2467 \text{ N} \rightarrow \qquad \text{Resp.}$$

El movimiento del volante es de rotación en torno a un eje fijo; por tanto,

$$+\rightarrow \Sigma F_x = ma_{Gx} \qquad A_x - C_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = ma_{Gy} \qquad C_y - A_y - mg = 0$$

$$+\circlearrowright \Sigma M_{Gz} = I_{Gz}\alpha$$

$$T - A_y r_v \cos\theta - A_x r_v \text{ sen } \theta = 0 \qquad (\text{ya que } \alpha = 0) \qquad \text{Resp.}$$

$$T = -547{,}5(0{,}150) \cos 60° + 4317(0{,}150) \text{ sen } 60°$$

$$= 519{,}7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Dos esferas de 120 mm de diámetro están sujetas a un árbol y giran en la forma que se indica en la figura 16-25*a*. Cada esfera tiene una masa de 7,50 kg. Las barras que unen las esferas al árbol tienen 30 mm de diámetro, longitud 220 mm y masa 1,20 kg. El árbol tiene 40 mm de diámetro y masa 8,50 kg. Determinar las componentes de las reacciones de los cojinetes en los apoyos y el par **T** que hay aplicado cuando el árbol gira en sentido antihorario a 600 rpm aumentando su celeridad de rotación a razón de 60 rpm por segundo. Supóngase que el cojinete en *A* resiste todo movimiento del árbol en la dirección *z*.

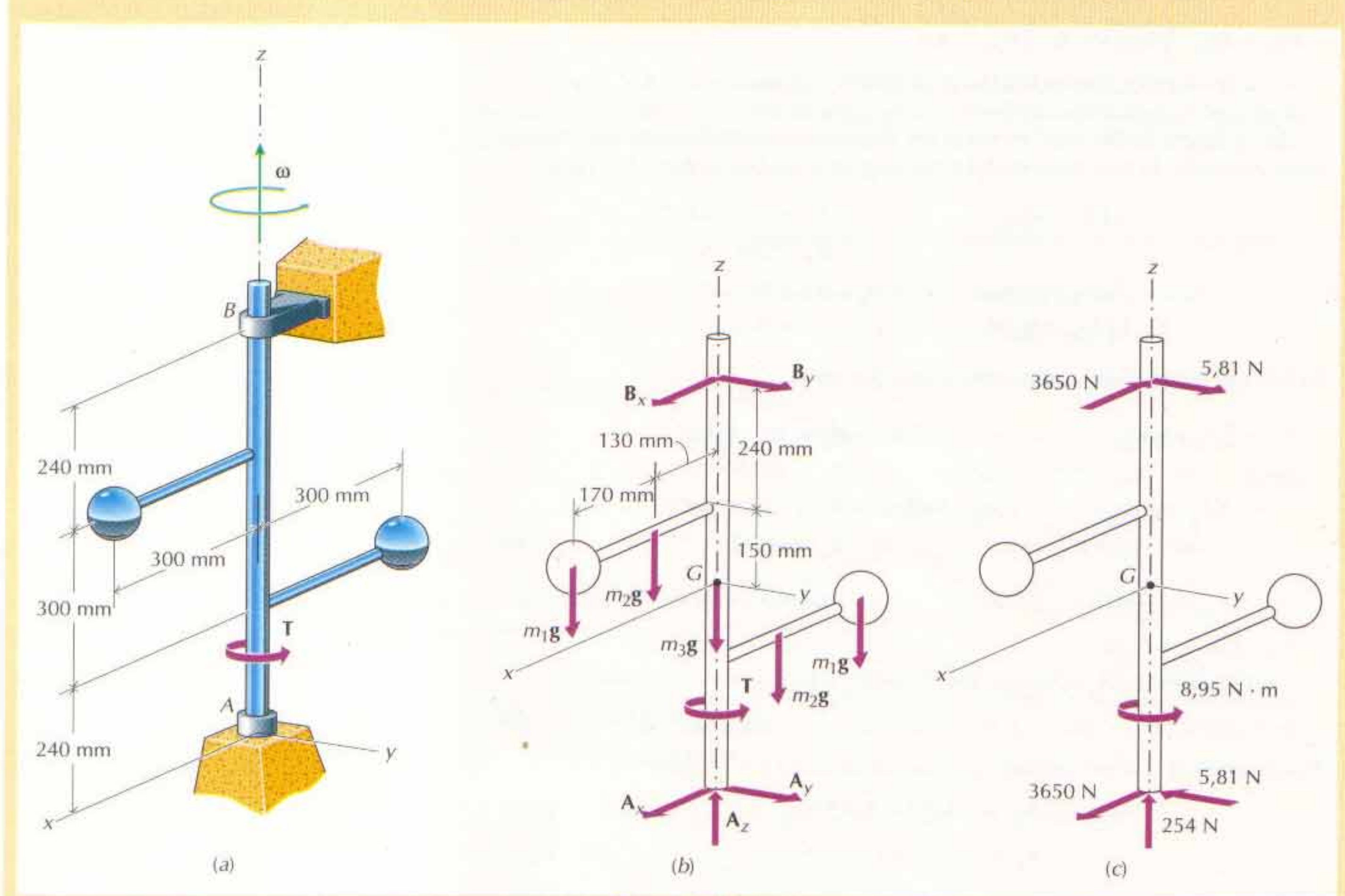


Figura 16-25

SOLUCIÓN

En la figura 16-25*b* puede verse el diagrama de sólido libre del sistema. Como el origen del sistema de coordenadas *xyz* coincide con el centro de masa *G* del sistema, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Además, en el instante representado, $I_{Gyz} = 0$ (simetría respecto al plano *xz*) y $\mathbf{a}_G = \mathbf{0}$ (el eje fijo de rotación pasa por *G*). Así pues, las ecuaciones 16-17 se reducen a

$$\Sigma F_x = ma_{Gx} = 0 \qquad \Sigma F_y = ma_{Gy} = 0 \qquad \Sigma F_z = 0$$
$$\Sigma M_{Gx} = -\alpha I_{Gzx} \qquad \Sigma M_{Gy} = -\omega^2 I_{Gzx} \qquad \Sigma M_{Gz} = \alpha I_{Gz}$$

El momento de inercia I_{Gz} y el producto de inercia I_{Gzx} se pueden determinar con auxilio de la tabla B-5 y del teorema de Steiner (ecs. 16-11 y 16-16). Así pues, para cada esfera,

$$I_{Gz1} = \frac{2}{5}m_1R_1^2 + m_1d_1^2$$
$$= \frac{2}{5}(7{,}50)(0{,}060)^2 + 7{,}50(0{,}300)^2 = 0{,}6858 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_{Gzx1} = 0 + m_1\bar{z}_1\bar{x}_1$$
$$= 0 + 7{,}50(0{,}150)(0{,}300) = 0{,}3375 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Para cada barra

$$I_{Gz2} = \frac{1}{4}m_2R_2^2 + \frac{1}{12}m_2L_2^2 + m_2d_2^2$$
$$= \frac{1}{4}(1{,}20)(0{,}015)^2 + \frac{1}{12}(1{,}20)(0{,}220)^2 + 1{,}20(0{,}130)^2 = 0{,}02519 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_{Gzx2} = 0 + m_2\bar{z}_2\bar{x}_2 = 0 + 1{,}20(0{,}150)(0{,}130) = 0{,}0234 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Para el árbol

$$I_{Gz3} = \frac{1}{2}m_3R_3^2$$
$$= \frac{1}{2}(8{,}50)(0{,}020)^2 = 0{,}0017 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_{Gzx3} = 0$$

Para el sistema

$$I_{Gz} = 2I_{Gz1} + 2I_{Gz2} + I_{Gz3}$$
$$= 2(0{,}6858) + 2(0{,}02519) + 0{,}0017 = 1{,}4237 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_{Czx} = 2I_{Gzx1} + 2I_{Gzx2} + I_{Gzx3}$$
$$= 2(0{,}3375) + 2(0{,}0234) + 0 = 0{,}7218 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$\omega = \frac{2\pi(600)}{60} = 62{,}83 \text{ rad/s} \qquad \alpha = \frac{2\pi(60)}{60} = 6{,}283 \text{ rad/s}^2$$

$$+\swarrow \Sigma F_x = A_x + B_x = 0 \qquad (a)$$
$$+\searrow \Sigma F_y = A_y + B_y = 0 \qquad (b)$$
$$+\uparrow \ \Sigma F_z = A_z - 2m_1g - 2m_2g - m_3g = 0$$
$$A_z = 2(7{,}50)(9{,}81) + 2(1{,}20)(9{,}81) + 8{,}50(9{,}81) \qquad \text{Resp.}$$
$$= 254{,}1 = 254 \text{ N} \uparrow$$
$$+\circlearrowleft \ \Sigma M_{Gx} = A_y(0{,}390) - B_y(0{,}390) = -\alpha I_{Gzx} = -6{,}283(0{,}7218)$$
$$A_y - B_y = -11{,}628 \qquad (c)$$
$$+\circlearrowleft \ \Sigma M_{Gy} = B_x(0{,}390) - A_x(0{,}390) = -\omega^2 I_{Gzx} = -(62{,}83)^2(0{,}7218)$$
$$B_x - A_x = -7306 \qquad (d)$$
$$+\circlearrowleft \ \Sigma M_{Gz} = T = \alpha I_{Gz} = 6{,}283(1{,}4237) = 8{,}945 = 8{,}95 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \text{Resp.}$$

De las ecuaciones *a* y *d* resulta

$$A_x = +3653 = 3650 \text{ N} \swarrow \qquad \text{Resp.}$$
$$B_x = -3653 = 3650 \text{ N} \nearrow \qquad \text{Resp.}$$

De las ecuaciones *b* y *c* resulta

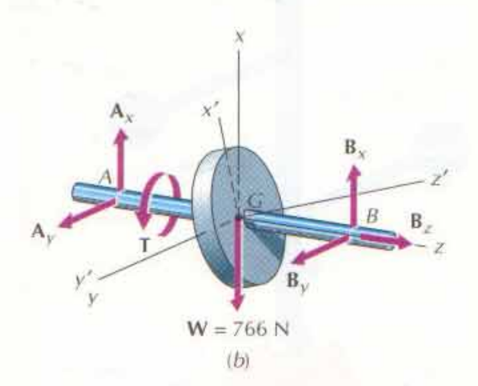
$$A_y = -5{,}814 = 5{,}81 \text{ N } \nwarrow \qquad \text{Resp.}$$

$$B_y = +5{,}814 = 5{,}81 \text{ N } \searrow \qquad \text{Resp.}$$

En la figura 16-25*c* se han representado estos resultados.

PROBLEMA EJEMPLO 16.12

Un cilindro macizo de acero ($\gamma = 77{,}1$ kN/m^3) está montado en un árbol según se indica en la figura 16-26*a*. Determinar las componentes de las reacciones en los cojinetes y el par **T** aplicado cuando el cilindro se halla en la posición representada (el eje *x* es vertical) y el árbol está girando en sentido antihorario a 500 rpm aumentando su celeridad a razón de 50 rpm por segundo. Supóngase que el cojinete en *B* resiste todo movimiento del árbol en la dirección *z* y que la masa de éste es despreciable.



(*a*)

$\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{B}_x$, $\mathbf{B}_y$, $\mathbf{B}_z$, **T**

W = 766 N

(*b*)

Figura 16-26

SOLUCIÓN

En la figura 16-26*b* puede verse el diagrama de sólido libre del cilindro más el árbol. Como el origen del sistema de coordenadas *xyz* coincide con el centro de masa *G* del cilindro, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Además, $I_{Gyz} = 0$ (simetría respecto al plano *xz*) y $\mathbf{a}_G = \mathbf{0}$ (el eje fijo de rotación pasa por *G*). Así pues, las ecuaciones 16-17 se reducen a

$$\Sigma F_x = ma_{Gx} = 0 \qquad \Sigma F_y = ma_{Gy} = 0 \qquad \Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_{Gx} = -\alpha I_{Gzx} \qquad \Sigma M_{Gy} = -\omega^2 I_{Gzx} \qquad \Sigma M_{Gz} = \alpha I_{Gz}$$

El momento de inercia I_{Gz} y el producto de inercia I_{Gzx} pueden determinarse utilizando los momentos principales de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{z'}$ que se consignan en la tabla B-5 y las ecuaciones de transformación A-13*a* y A-13*b*. Así

$$W = \gamma V = \gamma\pi R^2 L = 77{,}1\,(\pi)\,(0{,}225)^2(0{,}0625) = 0{,}7764 \text{ kN} = 766 \text{ N}$$

$$I_{x'} = I_{y'} = \frac{1}{4}\left(\frac{766{,}4}{9{,}81}\right)(0{,}2125)^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{766{,}4}{9{,}81}\right)(0{,}0625)^2 = 0{,}9074 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{z'} = \frac{1}{2}\left(\frac{766{,}4}{9{,}81}\right)(0{,}2125)^2 = 1{,}7869 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_z = I_{x'}\cos^2\theta_{x'z} + I_{y'}\cos^2\theta_{y'z} + I_{z'}\cos^2\theta_{z'z}$$

$$= 0{,}9074\cos^2 110° + 0{,}9074\cos^2 90° + 1{,}7869\cos^2 20° = 1{,}6840 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{zx} = -I_{x'}\cos\theta_{x'z}\cos\theta_{x'x} - I_{y'}\cos\theta_{y'z}\cos\theta_{y'x} - I_{z'}\cos\theta_{z'z}\cos\theta_{z'x}$$

$$= -0{,}9074\cos 110°\cos 20° - 0{,}9074\cos 90°\cos 90°$$

$$- 1{,}7869\cos 20°\cos 70° = -0{,}2827 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\omega = \frac{2\pi(500)}{60} = 52{,}36 \text{ rad/s} \qquad \alpha = \frac{2\pi(50)}{60} = 5{,}236 \text{ rad/s}^2$$

$$+\uparrow \Sigma F_x = A_x + B_x - W = 0$$

$$= A_x + B_x - 766{,}4 = 0 \qquad \textbf{(a)}$$

$$+\swarrow \Sigma F_y = A_y + B_y = 0 \qquad \textbf{(b)}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_z = B_z = 0 \qquad \text{Resp.}$$

$$+\circlearrowright \ \Sigma M_{Gx} = A_y(0{,}375) - B_y(0{,}375) = -\alpha I_{Gzx} = -5{,}236(-0{,}2827)$$
$$A_y - B_y = 3{,}947 \qquad (c)$$
$$+\circlearrowright \ \Sigma M_{Gy} = B_x(0{,}375) - A_x(0{,}375) = -\omega^2 I_{Gzx} = -(5{,}236)^2(-0{,}2827)$$
$$B_x - A_x = 2067 \qquad (d)$$
$$+\circlearrowright \ \Sigma M_{Gz} = T = \alpha I_{Gz} = 5{,}236(1{,}6840) = 8{,}82 \text{ m} \cdot \text{N} \ \circlearrowright \qquad \text{Resp.}$$

De las ecuaciones *a* y *d*, resulta

$$A_x = -650{,}3 = 650 \text{ N}\downarrow \qquad B_x = +1416{,}7 = 1417 \text{ N}\uparrow \qquad \text{Resp.}$$

De las ecuaciones *b* y *c*, resulta

$$A_y = 1{,}9735 = 1{,}974 \text{ N} \swarrow \qquad B_y = -1{,}9735 = 1{,}974 \text{ N} \nearrow \qquad \text{Resp.}$$

Los problemas de este tipo se pueden también resolver como tridimensionales descomponiendo la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ según las componentes x' e y'. Ya se vio en el apartado 16.5 que este método simplifica la resolución al eliminar el requisito de determinar los momentos de inercia no principales y los productos de inercia.

PROBLEMAS

En los problemas siguientes, todas las cuerdas, hilos y cables se suponen flexibles, inextensibles y de masa despreciable. Los pasadores y poleas también son de masa despreciable y están exentos de rozamientos, a menos que se indique otra cosa.

16-43 Una esfera maciza homogénea que pesa 50 N rueda sin deslizamiento hacia abajo por un plano inclinado 28° respecto a la horizontal, según se indica en la figura P16-43. Determinar la aceleración del centro de masa de la esfera y el mínimo valor que puede tener el coeficiente de rozamiento para evitar el deslizamiento.

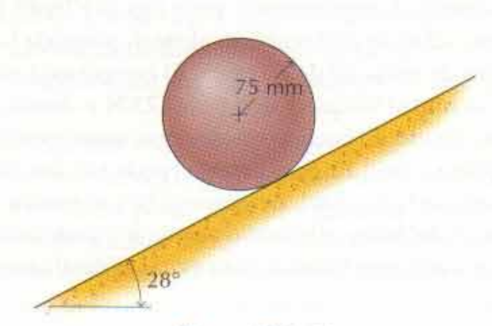


Figura P16-43

16-44*. Un disco macizo de masa 15 kg rueda sin deslizamiento por el plano inclinado de la figura P16-44. En la posición representada, la velocidad angular del disco es de 10 rad/s en sentido horario. Determinar la aceleración angular del disco y el mínimo valor que puede tener el coeficiente de rozamiento para evitar el deslizamiento.

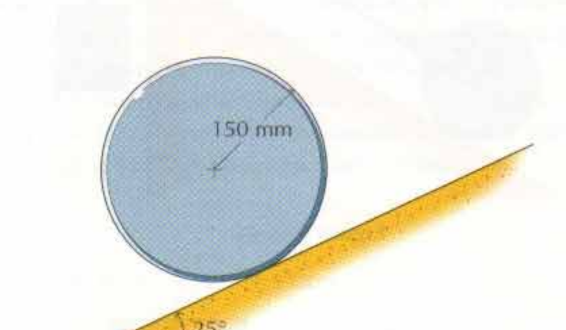


Figura P16-44

16-45 Dos discos de 40 cm de diámetro y un cilindro de 20 cm de diámetro están unidos formando un carrete que pesa 250 N y que tiene un radio de giro de 12,5 cm respecto a su eje de simetría. Se aplica al carrete una fuerza **P** de 250 N por medio de un cable arrollado sobre el cilindro según se indica en la figura

P16-45. Si el carrete rueda sin deslizamiento sobre la superficie horizontal, determinar la aceleración del centro de masa del carrete y el mínimo valor que puede tener el coeficiente de rozamiento para evitar el deslizamiento.

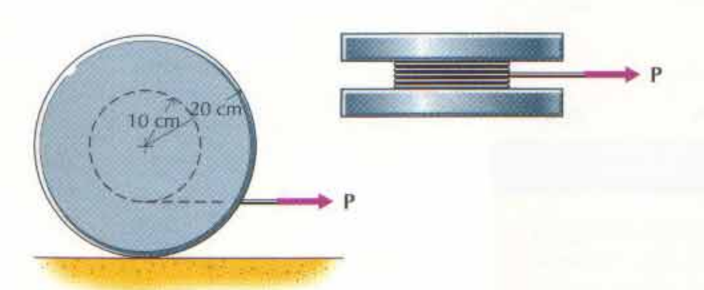


Figura P16-45

16-46 Un cilindro macizo A de radio $R = 200$ mm y masa $m_A = 75$ kg está conectado mediante un cable flexible a un cuerpo B de masa $m_B = 50$ kg, según se indica en la figura P16-46. Si el cilindro rueda sin deslizamiento por el plano inclinado, determinar la aceleración del cuerpo B y la tensión del cable.

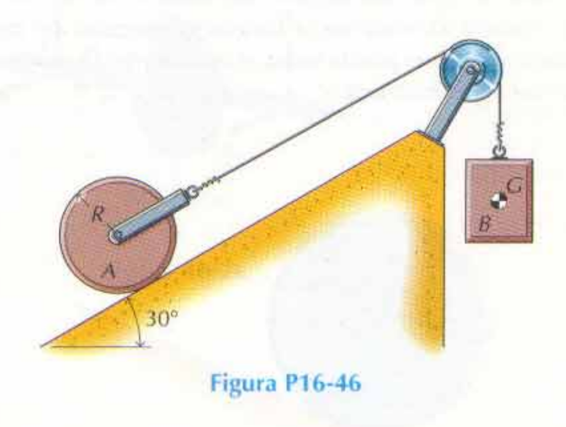


Figura P16-46

16-47* Se tira hacia delante de la rueda representada en la figura P16-47 mediante una fuerza constante **P** de 260 N. El peso de la rueda es de 375 N y su radio de giro respecto al eje de la rueda es de 231 mm. La rueda va rodando sin deslizamiento por la superficie horizontal y en la posición representada lleva una velocidad angular de 15 rad/s en sentido horario. Determinar la aceleración angular de la rueda y las componentes horizontal y vertical de la fuerza que le ejerce la superficie.

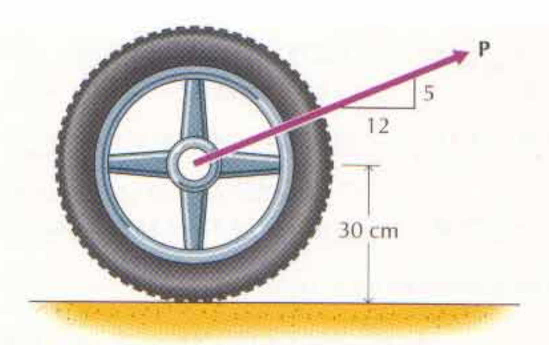


Figura P16-47

16-48* Se unen dos discos de 400 mm de diámetro y uno de 240 mm de diámetro para formar un carrete que tenga una masa de 125 kg y un radio de giro de 125 mm respecto al eje que pasa por el centro de masa del carrete. A éste se aplica una fuerza de 500 N mediante un cable arrollado sobre el disco de 240 mm, según se indica en la figura P16-48. Determinar la aceleración del centro de masa y la aceleración angular del carrete si

a. La superficie horizontal es lisa ($\mu = 0$).
b. La superficie horizontal no es lisa ($\mu = 0,25$).

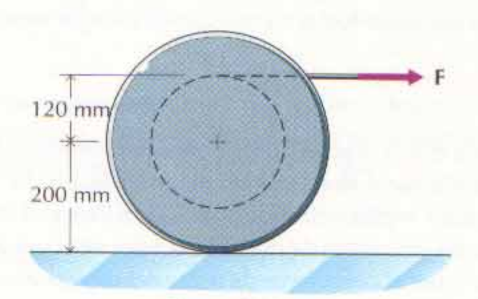


Figura P16-48

16-49 El carrete A, representado en la figura P16-49, pesa 500 N y tiene un radio de giro respecto al eje de simetría (que pasa por el centro de masa G) de 120 mm. El carrete está unido por medio de un hilo al bloque B que pesa 125 N y descansa sobre un plano inclinado. El coeficiente de rozamiento cinético entre bloque y plano vale 0,10. Si el carrete rueda sin deslizamiento por la superficie horizontal, determinar la aceleración del bloque, la tensión del hilo y el mínimo valor que puede tener el coeficiente de rozamiento estático para evitar el deslizamiento del carrete.

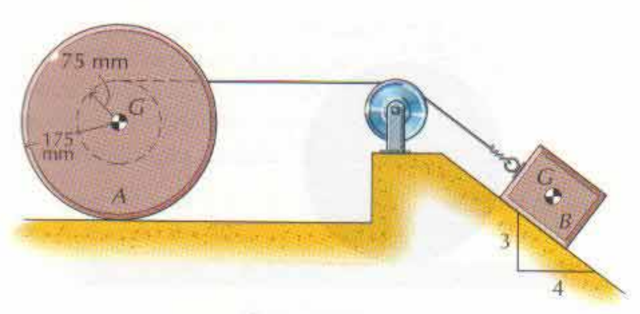


Figura P16-49

16-50* El cilindro A de 200 mm de diámetro está montado sobre un eje de 50 mm de diámetro, según se indica en la figura P16-50. La masa del conjunto eje-cilindro es de 50 kg y su radio de giro respecto al eje de simetría es de 70 mm. Hilos flexibles arrollados sobre el eje a ambos lados del cilindro están conectados a un bloque de 100 kg que descansa sobre una superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento cinético entre ésta y el bloque vale 0,25. Si el cilindro rueda sin deslizamiento, determinar la aceleración del bloque y las tensiones de los dos hilos.

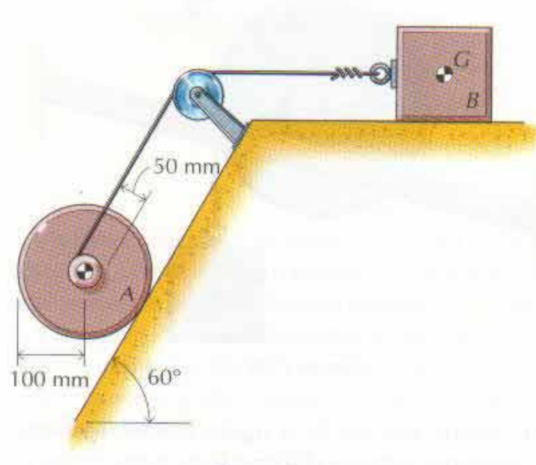


Figura P16-50

16-51 Un carrete está sostenido por un hilo arrollado sobre su cuerpo interno, según se indica en la figura P16-51. El carrete pesa 50 N y tiene un radio de giro de 100 mm respecto a su eje de simetría (que pasa por su centro de masa G). Cuando se suelta el carrete, dejándolo moverse en un plano vertical, determinar la aceleración angular del carrete y la tensión del hilo.

16-52* Un cilindro A de 100 kg y un cuerpo B de 50 kg están unidos mediante cables a la polea compuesta representada en la figura P16-52. La polea tiene una masa de 20 kg y un radio de giro respecto a su eje de rotación igual a 110 mm. Si el cilindro rueda sin deslizamiento por el plano inclinado, determinar la aceleración del cuerpo B y las tensiones de uno y otro cable.

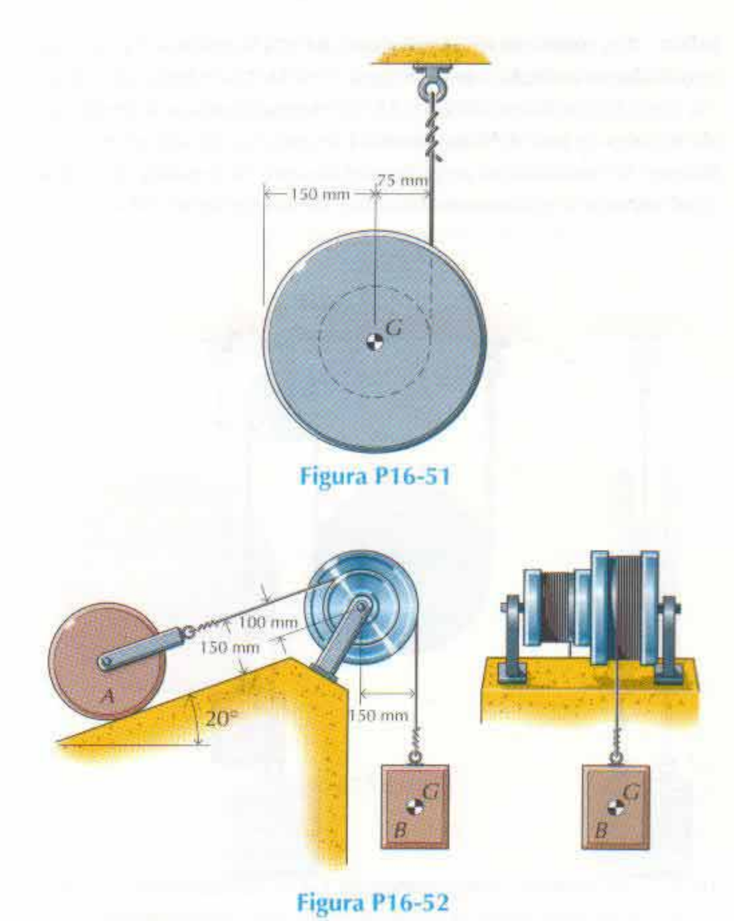


Figura P16-51

Figura P16-52

16-53 Al bloque A, que pesa 2,5 kN, lo mantienen sobre un plano inclinado una plataforma B que pesa 500 N y un par de ruedas C que, juntas, pesan 1 kN, según se indica en la figura P16-53. Las ruedas tienen un radio de giro respecto a su eje de rotación igual a 212,5 mm. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre el plano y los cuerpos en contacto valen 0,20 y 0,15, respectivamente. Determinar, durante el movimiento del sistema, la aceleración del centro de masa de las ruedas y las fuerzas normal y de rozamiento que el plano inclinado ejerce sobre la plataforma y las ruedas.

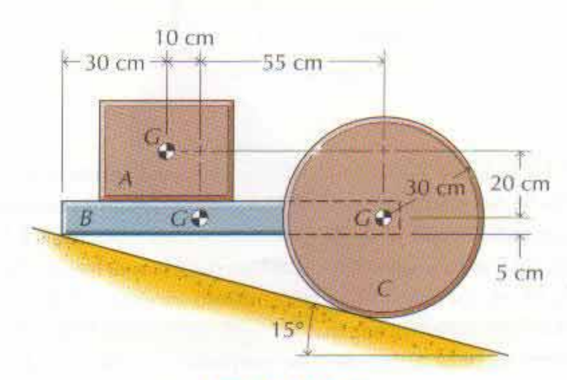


Figura P16-53

16-54 Un cable continuo sostiene un disco macizo A y un bloque B según se indica en la figura P16-54. Las masas del disco A y del bloque B son 40 kg y 25 kg, respectivamente. Entre cable y disco no hay deslizamiento. Determinar la aceleración del bloque, la aceleración angular del disco y la tensión del cable en el soporte C que existen durante el movimiento del sistema.

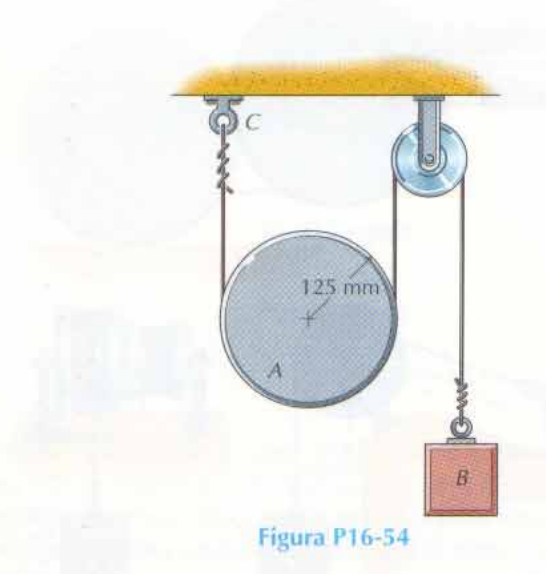


Figura P16-54

16-55* Un cilindro homogéneo de 1,2 m de diámetro que pesa 1,5 kN descansa sobre la plataforma de un camión según se indica en la figura P16-55. El camión acelera, partiendo del reposo, a 0,9 m/s^2 durante 20 s y después se mueve con velocidad constante. Si el cilindro rueda sin deslizamiento, determinar qué distancia recorre el camión antes de que el cilindro salga de él.

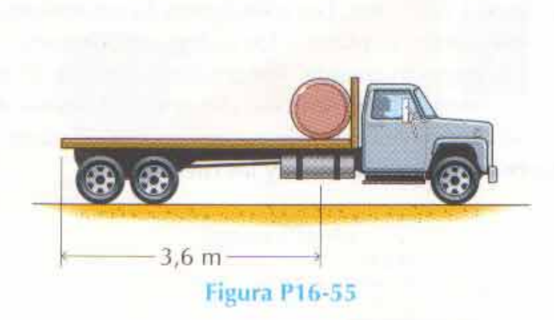


Figura P16-55

16-56* La bola de 220 mm de diámetro representada en la figura P16-56 tiene una masa de 7,25 kg. En el instante en que entra en contacto con la pista de bolos lleva una velocidad **v** hacia adelante de 7 m/s y una velocidad de rotación $\boldsymbol{\omega}$ hacia atrás de 6 rad/s. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre bola y pista vale 0,15, determinar qué tiempo transcurre y qué distancia recorre la bola antes de que empiece a rodar sin deslizamiento.

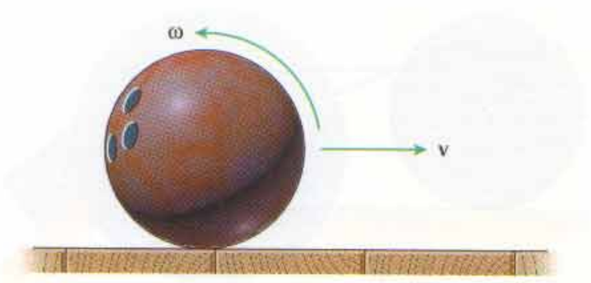


Figura P16-56

16-57 Un disco de 30 cm de diámetro montado en un árbol de 10 cm de diámetro rueda sin deslizamiento sobre un par de raíles inclinados. Sobre la superficie exterior del disco está arrollado un hilo del que pende un cuerpo B que pesa 100 N. El peso del disco junto con el árbol es de 375 N y su radio de giro respecto al eje de simetría (que pasa por su centro de masa) es igual a 106 mm. Si se suelta el sistema partiendo del reposo, determinar la tensión inicial del hilo, la aceleración del cuerpo B y la aceleración angular del disco.

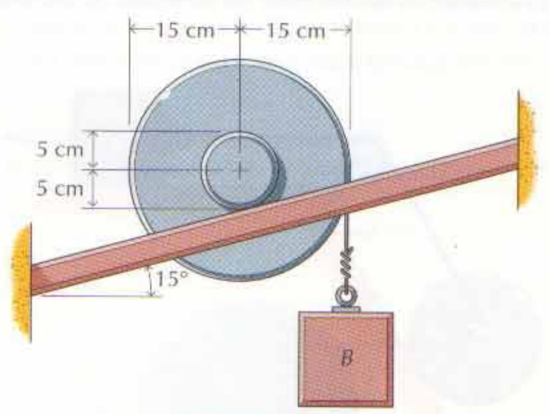


Figura P16-57

16-58 El cilindro macizo de la figura P16-58 tiene una masa de 50 kg. Descansa sobre un bloque B de masa 35 kg. Cuando se aplica a éste la fuerza **F**, adquiere una aceleración de 5 m/s^2. Si los coeficientes de rozamiento entre bloque y cilindro y entre bloque y superficie horizontal valen ambos 0,25, determinar el módulo de la fuerza **F** y la fuerza de rozamiento que el bloque ejerce sobre el cilindro.

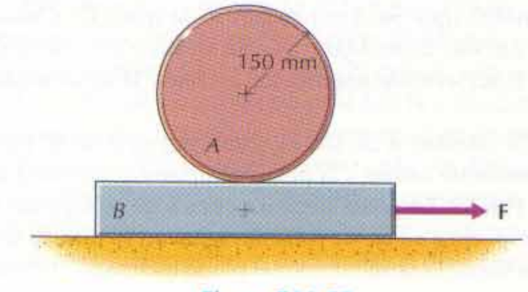


Figura P16-58

16-59* La barra esbelta representada en la figura P16-59 es de sección uniforme y pesa 100 N. Se suelta partiendo del reposo en posición vertical y gira en un plano vertical bajo la acción de la gravedad. El coeficiente de rozamiento entre la barra y la superficie horizontal vale 0,50. Determinar:

a. La aceleración angular de la barra y la reacción en su extremo A cuando $\theta = 40°$.
b El ángulo θ_d cuando empieza a deslizar.

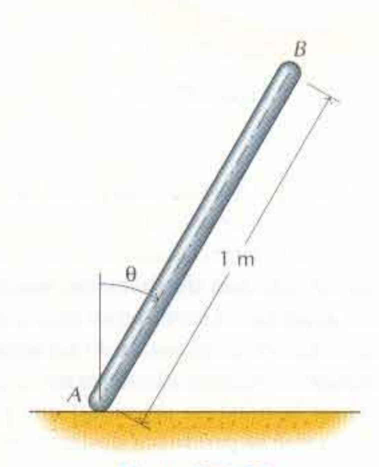


Figura P16-59

16-60* Un disco macizo A de masa 40 kg está conectado mediante una barra de enlace a un bloque B de masa 50 kg. Ambos descansan sobre un plano inclinado rugoso ($\mu = 0,25$) según se indica en la figura P16-60. Determinar la fuerza en la barra, las componentes normales de las reacciones en los apoyos C y D del bloque y la aceleración angular del disco existentes durante el movimiento del sistema.

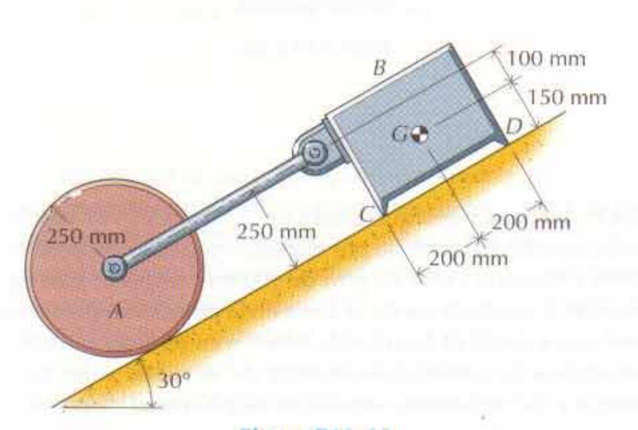


Figura P16-60

16-61 Un carrete A y un bloque B están sostenidos por sendos cables arrollados sobre las superficies circulares del carrete según se indica en la figura P16-61. El bloque pesa 375 N; el carrete pesa 520 N y tiene un radio de giro respecto a su eje de rotación igual a 103 mm. Determinar la aceleración del centro de masa del carrete y las tensiones de los cables inmediatamente después de soltar el sistema partiendo del reposo.

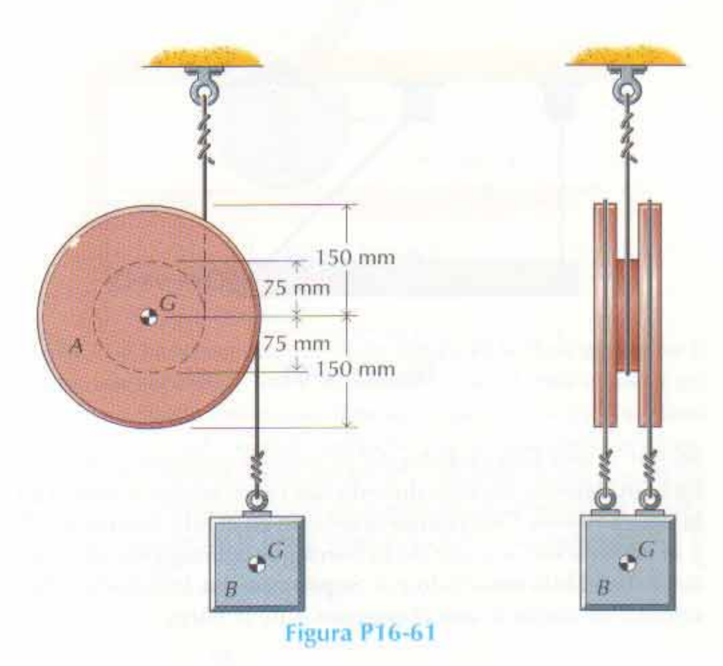


Figura P16-61

16-62 El semidisco de la figura P16-62 tiene una masa de 25 kg. Si rueda sin deslizamiento, determinar la aceleración del centro de masa, la aceleración angular del semidisco y las fuerzas normal y de rozamiento que sobre él ejerce el piso horizontal inmediatamente después de cortar el hilo amarrado en A.

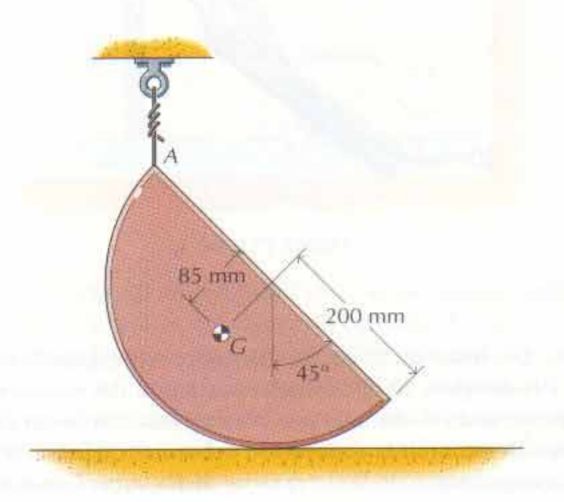


Figura P16-62

16-63* La barra esbelta representada en la figura P16-63 tiene sección uniforme y pesa 200 N. Está sostenida por dos cables flexibles y mantenida en posición por el hilo horizontal amarrado a su extremo *B*. Determinar la aceleración del centro de masa de la barra, la aceleración angular de la misma y las tensiones de los dos cables inmediatamente después de cortar el hilo horizontal amarrado a *B*.

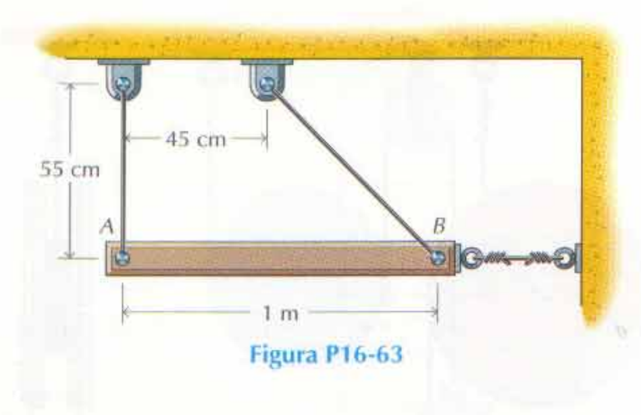


Figura P16-63

16-64* A una barra esbelta *AB* de sección uniforme y masa 10 kg la mantienen fija inicialmente dos hilos, según se indica en la figura P16-64. Determinar la tensión en el hilo amarrado a *B* y la aceleración angular de la barra inmediatamente después de cortar el hilo amarrado a *A*. Supóngase lisa la superficie horizontal en contacto con el extremo *A* de la barra.

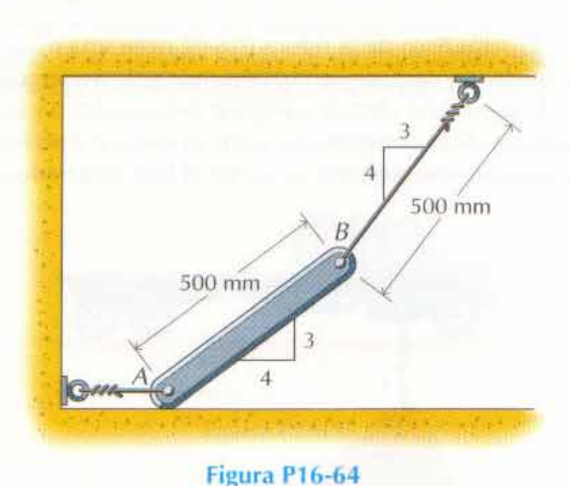


Figura P16-64

16-65 Un disco de 10 cm de diámetro, representado en la figura P16-65, pesa 50 N. Se suelta partiendo del reposo siendo $\theta = 30°$ y rueda hacia bajo por la superficie curva sin deslizamiento. Determinar la aceleración del centro de masa del disco y las componentes de la fuerza que dicha superficie ejerce sobre el disco cuando $\theta = 60°$.

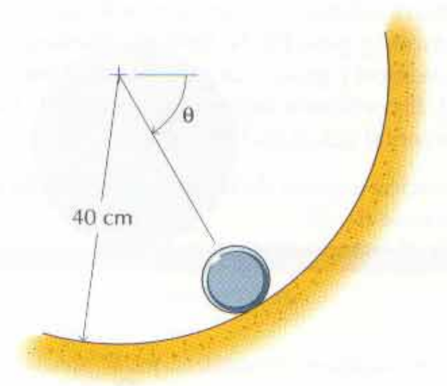


Figura P16-65

16-66 Un disco de 300 mm de diámetro rueda sin deslizamiento sobre una superficie curva según se indica en la figura P16-66. El centro del disco de masa de 40 kg sigue la curva $y = 1 - x^2/4$. Si el coeficiente de rozamiento entre disco y superficie vale 0,5, determinar la máxima celeridad que podrá tener el disco en $x = 1$ m sin que se produzca deslizamiento.

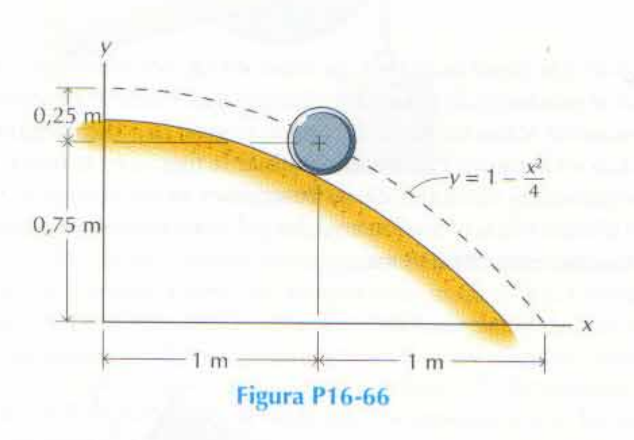


Figura P16-66

16-67* La rueda desequilibrada de la figura P16-67 rueda sin deslizamiento hacia abajo por el plano inclinado. Su peso es de 160 N y tiene un radio de giro de 106 mm respecto a su eje de rotación. Cuando la rueda se halla en la posición representada, tiene una velocidad angular de 5 rad / s en sentido antihorario. Determinar la aceleración angular de la rueda y las fuerzas normal y de rozamiento que sobre ella ejerce el plano inclinado, correspondientes a ese instante.

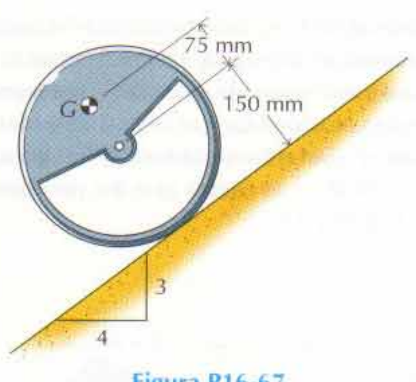


Figura P16-67

16-68* La rueda desequilibrada de la figura P16-68 tiene una masa de 50 kg y rueda sin deslizamiento por un plano horizontal. El radio de giro de la rueda respecto a un eje horizontal que pase por su centro de masa vale 160 mm. En la posición representada, la velocidad angular de la rueda es de 6 rad / s. Determinar la aceleración angular de la rueda y la fuerza que el plano le ejerce en su punto de contacto, correspondientes a ese instante.

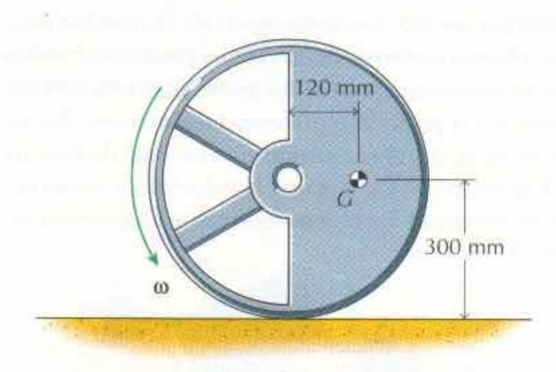


Figura P16-68

16-69 Un bloque de peso 320 N está sostenido por una barra de sección uniforme y 75 N de peso y un disco macizo de grosor uniforme y peso 125 N, según se indica en la figura P16-69. Las superficies verticales en contacto con el bloque son lisas y el disco rueda sin deslizamiento. En la posición representada, **F** vale 375 N y la velocidad del pasador *A* es de 75 cm / s hacia la derecha. Determinar la velocidad angular y la aceleración angular de la barra *AB* y la fuerza que el pasador *B* ejerce sobre el bloque.

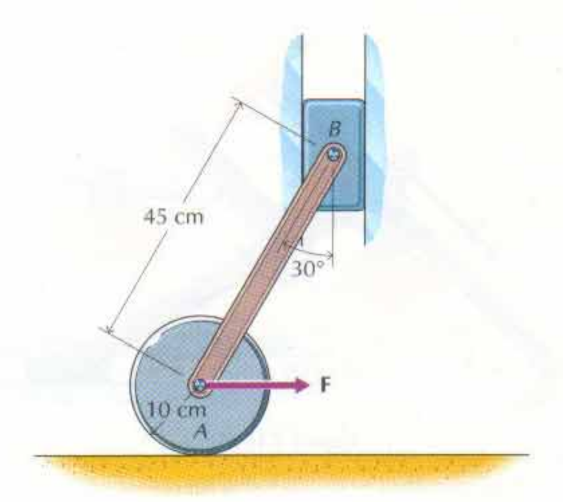


Figura P16-69

16-70 La barra esbelta *AB* de la figura P16-70 se apoya en *B* sobre una superficie lisa y su otro extremo *A* está unido a un collar que puede deslizarse libremente por una varilla vertical lisa. La barra es de sección uniforme y tiene una masa de 20 kg. Se halla inicialmente vertical ($\theta = 0°$) y al perturbarla gira en un plano vertical bajo la acción de la gravedad. Determinar la aceleración angular de la barra y las reacciones existentes en *A* y *B* cuando $\theta = 60°$.

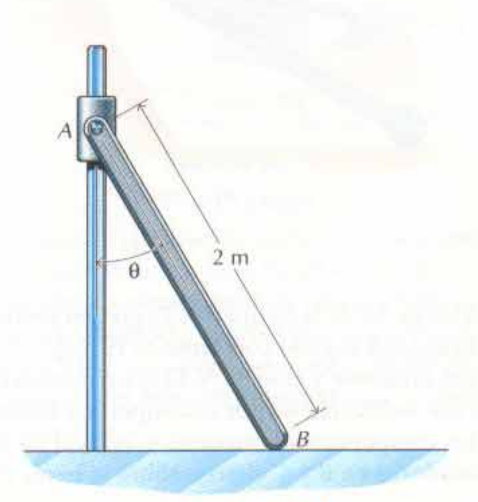


Figura P16-70

16-71* La barra *AB* de la figura P16-71 es de sección uniforme y pesa 125 N. El collar situado en su extremo *A* y la corredera en su extremo *B* son de masa despreciable y se deslizan por superficies lisas. En la posición representada, la barra *AB* tiene una velocidad angular de 1 rad / s en sentido horario y una aceleración angular de 2 rad / s^2 en sentido antihorario. Determinar la fuerza **F** aplicada al collar *A* y la fuerza que la guía ejerce sobre la corredera del extremo *B* de la barra.

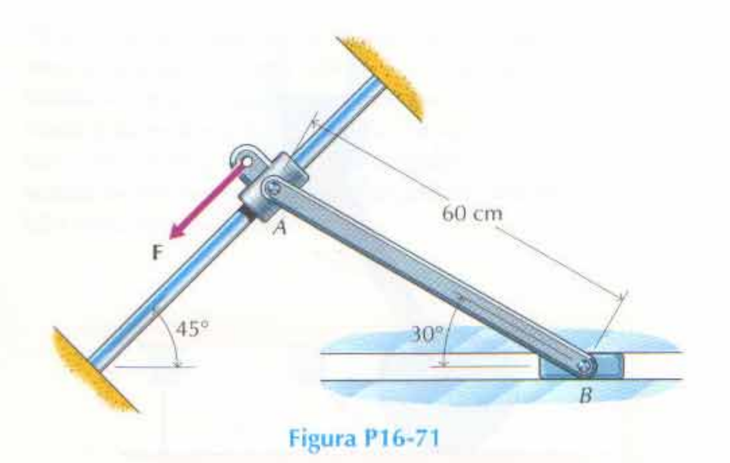


Figura P16-71

16-72* La barra esbelta AB representada en la figura P16-72 es de sección uniforme y masa 15 kg. Determinar la aceleración angular de la barra y las reacciones en A y B, en la posición representada, si A está moviéndose hacia la derecha con una celeridad de 2 m/s.

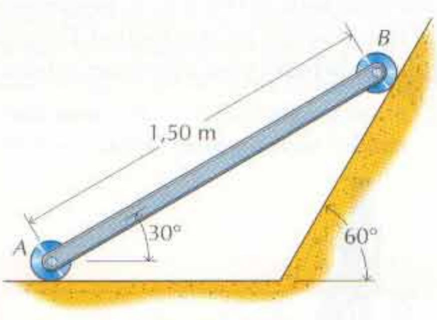


Figura P16-72

16-73 La barra AB de la figura P16-73 gira en sentido antihorario con velocidad angular constante de 10 rad/s. La barra BC es de sección uniforme y pesa 50 N. El disco macizo D pesa 150 N y rueda sin deslizamiento por una superficie horizontal. Determinar las componentes horizontal y vertical de las fuerzas que los pasadores en B y C ejercen sobre la barra BC cuando $\theta = 60°$.

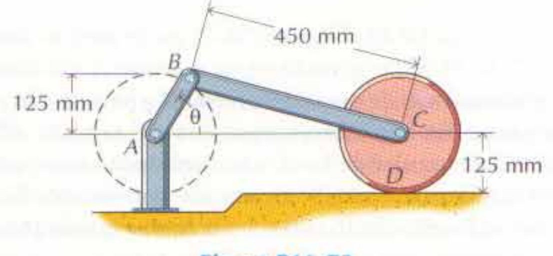


Figura P16-73

16-74 Las barras AB y BC de la figura P16-74 tienen secciones uniformes y masas de 20 y 15 kg, respectivamente. Cuando están en la posición representada, el collar C se mueve hacia la izquierda con una velocidad de 2 m/s y su celeridad disminuye a razón de 4 m/s^2. Determinar la fuerza **F** y las componentes horizontal y vertical de la fuerza que los pasadores en A y B ejercen sobre la barra AB.

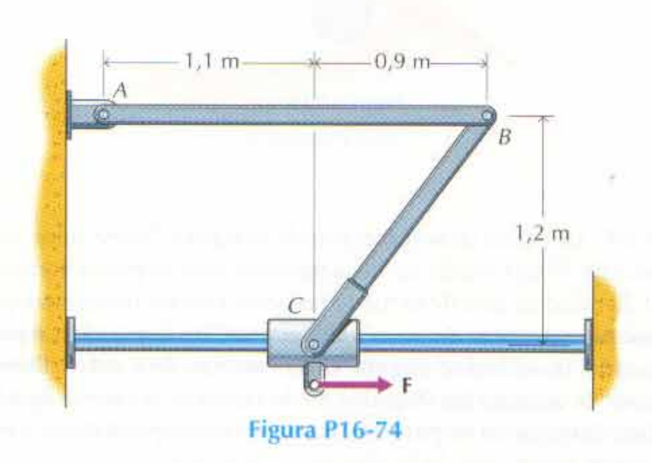


Figura P16-74

16-75 La barra esbelta AB (v. fig. P16-75) mantiene al disco en un plano vertical. El conjunto barra-disco pesa 805 N y tiene un radio de giro de 162 mm respecto al eje de simetría del disco (que pasa por su centro de masa G). Los extremos A y B de la barra ruedan libremente por sendas guías lisas, una vertical y otra horizontal. En la posición representada, el extremo B se está moviendo hacia la izquierda con una velocidad de 0,60 m/s. La fuerza **F** es de 250 N. Determinar la velocidad y aceleración angulares de la barra y las fuerzas que sobre ella ejercen los pasadores en A y B.

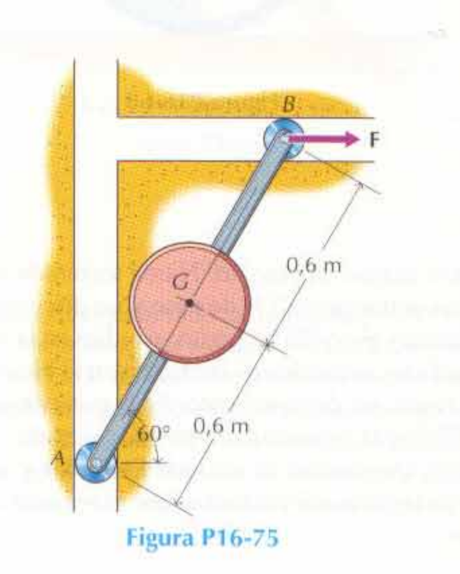


Figura P16-75

16-76* Las barras *AB* y *BC* de la figura P16-76 tienen sección uniforme y masas de 10 y 15 kg, respectivamente. En la posición representada, el collar *C* se está moviendo hacia la izquierda con velocidad de 1 m/s, aumentando su celeridad a razón de 2 m/s². Determinar la fuerza **F** y las fuerzas que los pasadores en *A* y *B* ejercen sobre la barra *AB*.

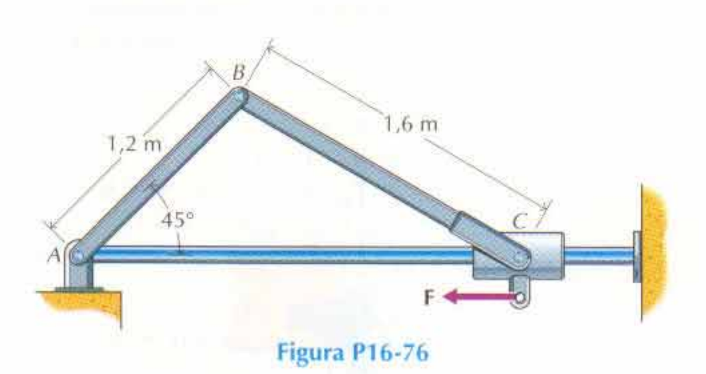


Figura P16-76

16-77 Una placa rectangular delgada ($W = 300$ N) está montada sobre un eje según se indica en la figura P16-77. Determinar las reacciones en los cojinetes cuando la placa está en un plano vertical (según se indica) y el árbol gira con velocidad angular constante de 90 rad/s. Supóngase que el cojinete en *B* resiste todo movimiento del eje en dirección axial y que la masa de éste es despreciable.

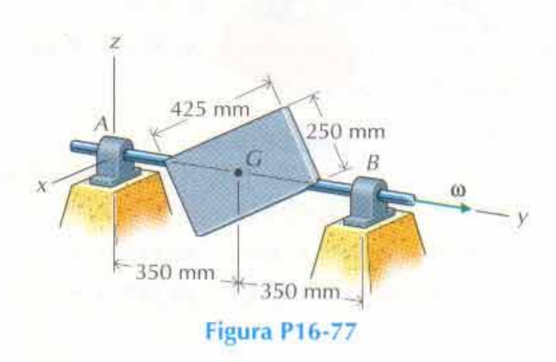


Figura P16-77

16-78* Un cilindro macizo de 130 mm de diámetro ($m = 50$ kg) está montado en un árbol según se indica en la figura P16-78. Determinar las reacciones en los cojinetes cuando el eje del cilindro está en un plano vertical (según se indica) y el árbol gira con velocidad angular constante de 60 rad/s. Supóngase que el cojinete en *B* resiste todo movimiento del árbol en dirección axial y que la masa de éste es despreciable.

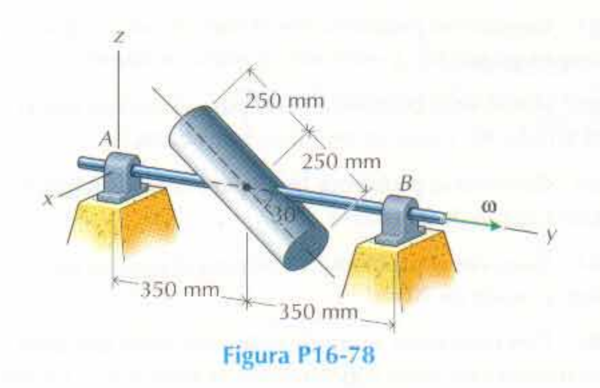


Figura P16-78

16-79 Dos placas rectangulares delgadas (cada una pesa 75 N) están montadas en un árbol como se indica en la figura P16-79. Determinar las reacciones en los cojinetes cuando las placas se hallan en un plano vertical (según se indica) y el árbol gira con velocidad angular constante de 75 rad/s. Supóngase que el cojinete en *B* resiste a todo movimiento del árbol en dirección axial y que la masa de éste es despreciable.

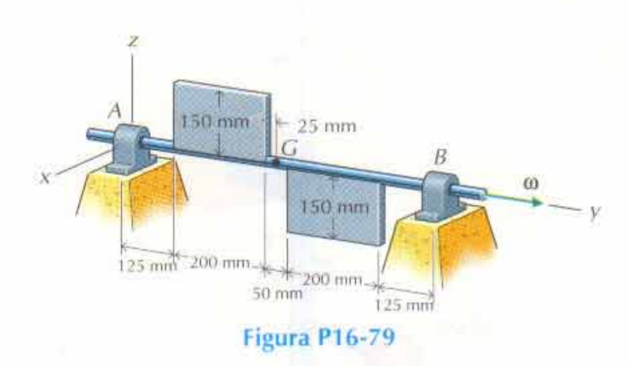


Figura P16-79

16-80* Una placa triangular delgada ($m = 10$ kg) está montada en un árbol según se indica en la figura P16-80. Determinar las reacciones en los cojinetes cuando la placa se halle en un plano vertical (según se indica) y el árbol gira con velocidad angular constante de 75 rad/s. Supóngase que el cojinete en *B* resiste a todo movimiento del árbol en dirección axial y que la masa de éste es despreciable.

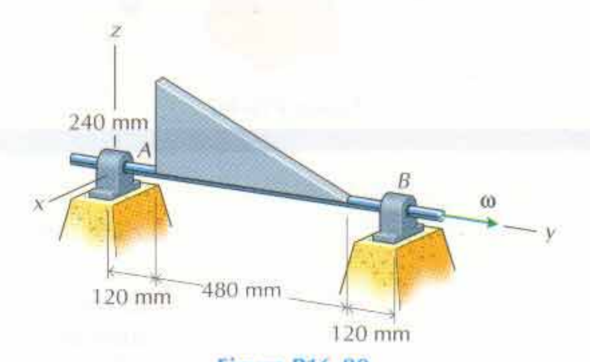


Figura P16-80

16-81 Resolver el problema 16-79 para el caso en que las placas hayan girado 90° y estén en un plano horizontal.

16-82* Resolver el problema 16-80 para el caso en que la placa haya girado 90° y esté en un plano horizontal.

16-83 Resolver el problema 16-79 para el caso en que el árbol acelere a razón de 20 rad/s^2.

16-84* Resolver el problema 16-80 para el caso en que el árbol acelere a razón de 20 rad/s^2.

16-85 Dos esferas de 10 cm de diámetro (cada una pesa 50 N) están unidas a un árbol y giran según se indica en la figura P16-85. Las barras que unen las esferas al árbol tienen 25 mm de diámetro, longitud 175 mm y pesan 7,5 N. El árbol tiene un diámetro de 50 mm y pesa 100 N. Determinar las componentes de las reacciones de los cojinetes en los apoyos y el par **T** aplicado cuando la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del árbol sea de 100 rad/s y aumente a razón de 20 rad/s^2. Supóngase que el cojinete en A resiste a todo movimiento del árbol en la dirección z.

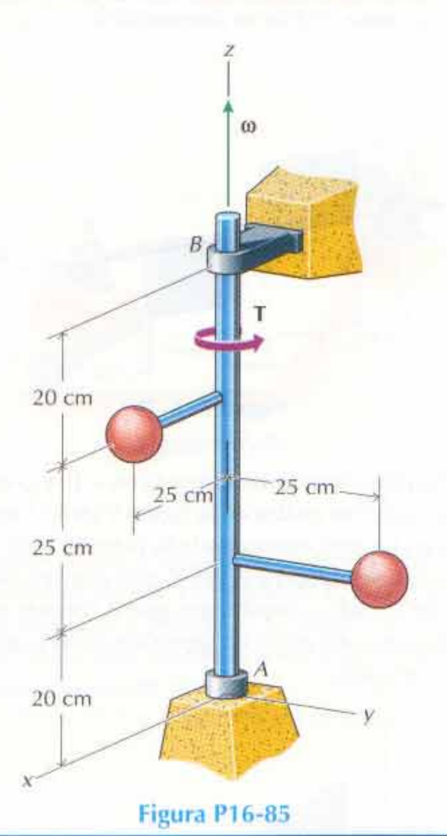


Figura P16-85

16-86* Dos barras rectangulares (cada una de masa 5 kg) están unidas a un árbol y giran según se indica en la figura P16-86. La masa del árbol de 40 mm de diámetro es de 6,5 kg. Determinar las componentes de las reacciones de los cojinetes en los apoyos y el par **T** aplicado cuando la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del árbol sea de 150 rad/s y disminuya a razón de 25 rad/s^2. Supóngase que el cojinete en A resiste a todo movimiento del árbol en la dirección z.

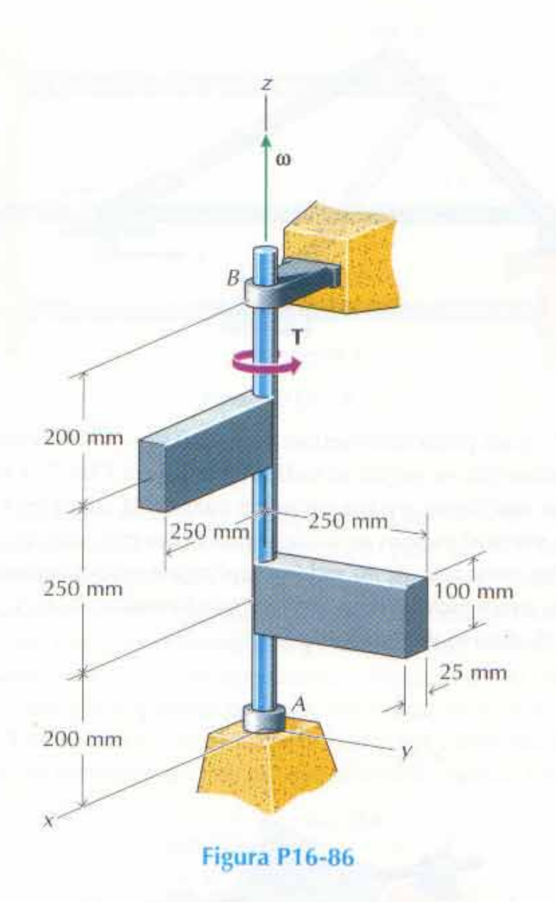


Figura P16-86

16.5 MOVIMIENTO TRIDIMENSIONAL DE UN CUERPO RÍGIDO

El momento $\mathbf{M}_A$ respecto a un punto arbitrario A sometido a un sistema de fuerzas exteriores, que se desarrolló en el apartado 16.2, viene dado por la ecuación

$$\mathbf{M}_A = \int_m (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{a}_A)\, dm + \int_m [\boldsymbol{\rho} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho})]\, dm + \int_m \{\boldsymbol{\rho} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})]\}\, dm \qquad (a)$$

En el movimiento tridimensional, los diferentes términos que aparecen en la ecuación *a* son

$$\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{a}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ a_{Ax} & a_{Ay} & a_{Az} \end{vmatrix} = (y a_{Az} - z a_{Ay})\,\mathbf{i} + (z a_{Ax} - x a_{Az})\,\mathbf{j} + (x a_{Ay} - y a_{Ax})\,\mathbf{k} \qquad (b)$$

$$\dot{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dot{\omega}_x & \dot{\omega}_y & \dot{\omega}_z \\ x & y & z \end{bmatrix} = (z\dot{\omega}_y - y\dot{\omega}_z)\,\mathbf{i} + (x\dot{\omega}_z - z\dot{\omega}_x)\,\mathbf{j} + (y\dot{\omega}_x - x\dot{\omega}_y)\,\mathbf{k}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho}) &= (y^2\dot{\omega}_x - xy\dot{\omega}_y - xz\dot{\omega}_z + z^2\dot{\omega}_x)\,\mathbf{i} \\ &+ (z^2\dot{\omega}_y - yz\dot{\omega}_z - xy\dot{\omega}_x + x^2\dot{\omega}_y)\,\mathbf{j} \\ &+ (x^2\dot{\omega}_z - xz\dot{\omega}_x - yz\dot{\omega}_y + y^2\dot{\omega}_z)\,\mathbf{k} \end{aligned} \qquad (c)$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = (z\omega_y - y\omega_z)\,\mathbf{i} + (x\omega_z - z\omega_x)\,\mathbf{j} + (y\omega_x - x\omega_y)\,\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) &= (y\omega_x\omega_y - x\omega_y^2 - x\omega_z^2 + z\omega_x\omega_z)\,\mathbf{i} \\ &+ (z\omega_y\omega_z - y\omega_z^2 - y\omega_x^2 + x\omega_x\omega_y)\,\mathbf{j} \\ &+ (x\omega_z\omega_x - z\omega_x^2 - z\omega_y^2 + y\omega_y\omega_z)\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})] &= (xy\omega_z\omega_x - yz\omega_y^2 + y^2\omega_y\omega_z - z^2\omega_y\omega_z + yz\omega_z^2 - xz\omega_x\omega_y)\,\mathbf{i} \\ &+ (yz\omega_x\omega_y - zx\omega_z^2 + z^2\omega_z\omega_x - x^2\omega_z\omega_x + zx\omega_x^2 + -yx\omega_y\omega_z)\,\mathbf{j} \\ &+ (zx\omega_y\omega_z - xy\omega_x^2 + x^2\omega_x\omega_y - y^2\omega_x\omega_y + xy\omega_y^2 - zy\omega_z\omega_x)\,\mathbf{k} \end{aligned} \qquad (d)$$

Si se quiere escribir el momento $\mathbf{M}_A$ en forma vectorial cartesiana, las componentes escalares M_{Ax}, M_{Ay} y M_{Az} se obtendrán de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= M_{Ax}\mathbf{i} + M_{Ay}\mathbf{j} + M_{Az}\mathbf{k} \\ &= \int_m (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{a}_A)\, dm + \int_m [\boldsymbol{\rho} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho})]\, dm + \int_m \{\boldsymbol{\rho} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})]\}\, dm \end{aligned}$$

Aplicando las ecuaciones b, c y d en la ecuación a tenemos

$$\begin{aligned} M_{Ax} = {} & a_{Az}\int_m y\,dm - a_{Ay}\int_m z\,dm + \dot{\omega}_x\int_m y^2\,dm \\ & - \dot{\omega}_y\int_m xy\,dm - \dot{\omega}_z\int_m zx\,dm + \dot{\omega}_x\int_m z^2\,dm \\ & + \omega_z\omega_x\int_m xy\,dm - \omega_y^2\int_m yz\,dm + \omega_y\omega_z\int_m y^2\,dm \\ & - \omega_y\omega_z\int_m z^2\,dm + \omega_z^2\int_m yz\,dm - \omega_x\omega_y\int_m zx\,dm \end{aligned} \tag{16-26a}$$

$$\begin{aligned} M_{Ay} = {} & a_{Ax}\int_m z\,dm - a_{Az}\int_m x\,dm + \dot{\omega}_y\int_m z^2\,dm \\ & - \dot{\omega}_z\int_m yz\,dm - \dot{\omega}_x\int_m xy\,dm + \dot{\omega}_y\int_m x^2\,dm \\ & + \omega_x\omega_y\int_m yz\,dm - \omega_z^2\int_m zx\,dm + \omega_z\omega_x\int_m z^2\,dm \\ & - \omega_z\omega_x\int_m x^2\,dm + \omega_x^2\int_m zx\,dm - \omega_y\omega_z\int_m xy\,dm \end{aligned} \tag{16-26b}$$

$$\begin{aligned} M_{Az} = {} & a_{Ay}\int_m x\,dm - a_{Ax}\int_m y\,dm + \dot{\omega}_z\int_m x^2\,dm \\ & - \dot{\omega}_x\int_m zx\,dm - \dot{\omega}_y\int_m yz\,dm + \dot{\omega}_z\int_m y^2\,dm \\ & + \omega_y\omega_z\int_m zx\,dm - \omega_x^2\int_m xy\,dm + \omega_x\omega_y\int_m x^2\,dm \\ & - \omega_x\omega_y\int_m y^2\,dm + \omega_y^2\int_m xy\,dm - \omega_z\omega_x\int_m zx\,dm \end{aligned} \tag{16-26c}$$

Cuando se escriben las ecuaciones 16-26 en función de los momentos primeros, momentos de inercia y productos de inercia, quedan en la forma

$$\begin{aligned} M_{Ax} = {} & a_{Az}\bar{y}m - a_{Ay}\bar{z}m + I_{Ax}\dot{\omega}_x \\ & -(I_{Ay} - I_{Az})\,\omega_y\omega_z + I_{Axy}(\omega_z\omega_x - \dot{\omega}_y) \\ & - I_{Ayz}(\omega_y^2 - \omega_z^2) - I_{Azx}\,(\omega_x\omega_y + \dot{\omega}_z) \end{aligned} \tag{16-27a}$$

$$\begin{aligned} M_{Ay} = {} & a_{Ax}\bar{z}m - a_{Az}\bar{x}m + I_{Ay}\dot{\omega}_y \\ & -(I_{Az} - I_{Ax})\,\omega_z\omega_x + I_{Ayz}(\omega_x\omega_y - \dot{\omega}_z) \\ & - I_{Azx}(\omega_z^2 - \omega_x^2) - I_{Axy}\,(\omega_y\omega_z + \dot{\omega}_x) \end{aligned} \tag{16-27b}$$

$$\begin{aligned} M_{Az} = {} & a_{Ay}\bar{x}m - a_{Ax}\bar{y}m + I_{Az}\dot{\omega}_z \\ & -(I_{Ax} - I_{Ay})\,\omega_x\omega_y + I_{Azx}(\omega_y\omega_z - \dot{\omega}_x) \\ & - I_{Axy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) - I_{Ayz}\,(\omega_z\omega_x + \dot{\omega}_y) \end{aligned} \tag{16-27c}$$

En la mayoría de los problemas de Dinámica interesa tener una relación instantánea entre momentos y aceleraciones. Se obtiene entonces una gran simplificación si se toma el sistema de coordenadas xyz de manera que coincida con los ejes principales que pasan por el centro de masa G del cuerpo en el instante deseado. Con el origen en el centro de masa

$$\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$$

y para los ejes principales

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$$

Así pues

$$\begin{aligned} M_{Gx} &= I_{Gx}\dot{\omega}_x - (I_{Gy} - I_{Gz})\,\omega_y\omega_z \\ M_{Gy} &= I_{Gy}\dot{\omega}_y - (I_{Gz} - I_{Gx})\,\omega_z\omega_x \\ M_{Gx} &= I_{Gz}\dot{\omega}_z - (I_{Gx} - I_{Gy})\,\omega_x\omega_y \end{aligned} \qquad (16\text{-}28)$$

Las ecuaciones (16-28) se conocen por el nombre de ecuaciones de Euler[1].

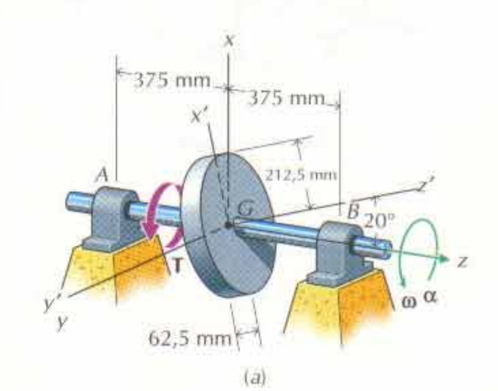
Las ecuaciones de Euler sólo son válidas instantáneamente. Si fuese necesario integrar las aceleraciones para obtener las velocidades, deberán establecerse expresiones generales para los momentos de las fuerzas y los momentos de inercia. Estos momentos de inercia sólo serán constantes cuando los cuerpos sean muy simétricos.

Las ecuaciones 15-17 junto con las 16-28 proporcionan las relaciones necesarias para resolver diversos problemas de movimiento tridimensional. Así,

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= ma_{Gx} & \Sigma M_{Gx} &= I_{Gx}\dot{\omega}_x - (I_{Gy} - I_{Gz})\,\omega_y\omega_z \\ \Sigma F_y &= ma_{Gy} & \Sigma M_{Gy} &= I_{Gy}\dot{\omega}_y - (I_{Gz} - I_{Gx})\,\omega_z\omega_x \\ \Sigma F_z &= ma_{Gz} & \Sigma M_{Gz} &= I_{Gz}\dot{\omega}_z - (I_{Gx} - I_{Gy})\,\omega_x\omega_y \end{aligned} \qquad (16\text{-}29)$$

En los ejemplos que siguen se ilustra el método de resolución de los problemas de movimiento tridimensional.

[1] Leonard Euler (1707-1783), matemático suizo.



(a)

PROBLEMA EJEMPLO 16.13

Repítase el Ejemplo 16-12 utilizando las ecuaciones de Euler.

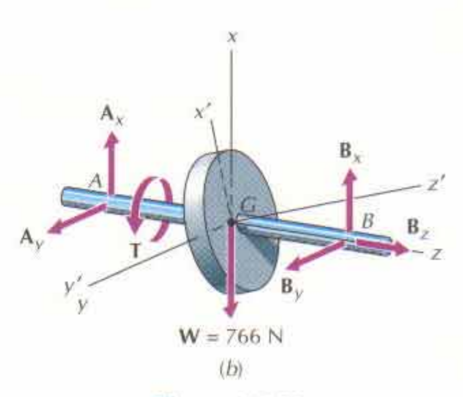
SOLUCIÓN

Por razón de conveniencia, se repite aquí la figura 16-26 del ejemplo 16-12, en la que puede verse la geometría del sistema y el diagrama de sólido libre del conjunto cilindro-árbol. Del Ejemplo 16-12

$$W = 766 \text{ N} \qquad I_{Gy'} = 0{,}9074 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{Gx'} = 0{,}9074 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \qquad I_{Gz'} = 1{,}7869 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\omega_z = 52{,}36 \text{ rad/s} \qquad \alpha_z = 5{,}236 \text{ rad/s}^2$$



(b)

Figura 16-26

Las componentes de ω_z y α_z respecto a los ejes principales son

$$\omega_{x'} = \omega_z \cos \theta_{x'z} = 52{,}36 \cos 110^\circ = -17{,}91 \text{ rad/s}$$
$$\omega_{y'} = \omega_z \cos \theta_{y'z} = 52{,}36 \cos 90^\circ = 0$$
$$\omega_{z'} = \omega_z \cos \theta_{z'z} = 52{,}36 \cos 20^\circ = 49{,}20 \text{ rad/s}$$
$$\alpha_{x'} = \alpha_z \cos \theta_{x'z} = 5{,}236 \cos 110^\circ = -1{,}791 \text{ rad/s}^2$$
$$\alpha_{y'} = \alpha_z \cos \theta_{y'z} = 5{,}236 \cos 90^\circ = 0$$
$$\alpha_{z'} = \alpha_z \cos \theta_{z'z} = 5{,}236 \cos 20^\circ = 4{,}920 \text{ rad/s}^2$$

Luego, de las ecuaciones 16-28, se tiene

$$\Sigma M_{Gx'} = I_{Gx'}\alpha_{x'} = 0{,}9074(-1{,}791) = -1{,}6252 \text{ m} \cdot \text{N}$$
$$\Sigma M_{Gy'} = -(I_{Gz'} - I_{Gx'})\,\omega_{z'}\omega_{x'}$$
$$= -(1{,}7869 - 0{,}9074)(49{,}20)(-17{,}91) = 775 \text{ m} \cdot \text{N}$$
$$\Sigma M_{Gz'} = I_{Gz'}\alpha_{z'} = 1{,}7869(4{,}920) = 8{,}79 \text{ m} \cdot \text{N}$$

Ahora se obtienen los momentos respecto a los ejes x, y y z:

$$\Sigma M_{Gx} = \Sigma M_{Gx'} \cos \theta_{x'x} + \Sigma M_{Gz'} \cos \theta_{z'x}$$
$$= -1{,}6252 \cos 20^\circ + 8{,}79 \cos 70^\circ = 1{,}479 \text{ m} \cdot \text{N}$$
$$\Sigma M_{Gy} = \Sigma M_{Gy'} = 775 \text{ m} \cdot \text{N}$$
$$\Sigma M_{Gz} = \Sigma M_{Gx'} \cos \theta_{x'z} + \Sigma M_{Gz'} \cos \theta_{z'z}$$
$$= -1{,}6252 \cos 110^\circ + 8{,}79 \cos 20^\circ = 8{,}816 \text{ m} \cdot \text{N}$$

Así pues, como $\mathbf{a}_G = \mathbf{0}$, las ecuaciones 16-29 se reducen a

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0$$
$$\Sigma M_{Gx} = 1{,}479 \text{ m} \cdot \text{N} \qquad \Sigma M_{Gy} = 775 \text{ m} \cdot \text{N} \qquad \Sigma M_{Gz} = 8{,}816 \text{ m} \cdot \text{N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_x = A_x + B_x - W = A_x + B_x - 776 = 0 \qquad (a)$$
$$+\swarrow \Sigma F_y = A_y + B_y = 0 \qquad (b)$$
$$+\rightarrow \Sigma F_z = B_z = 0 \qquad B_z = 0 \qquad \text{Resp.}$$
$$+\circlearrowright \Sigma M_{Gx} = A_y(0{,}375) - B_y(0{,}375) = 1{,}479$$
$$A_y - B_y = 3{,}944 \qquad (c)$$
$$+\circlearrowright \Sigma M_{Gy} = B_x(0{,}375) - A_x(0{,}375) = 775$$
$$B_x - A_x = 2067 \qquad (d)$$
$$+\circlearrowright \Sigma M_{Gz} = T = 8{,}816 \qquad T = 8{,}82 \text{ m} \cdot \text{N} \qquad \text{Resp.}$$

De las ecuaciones a y d resulta

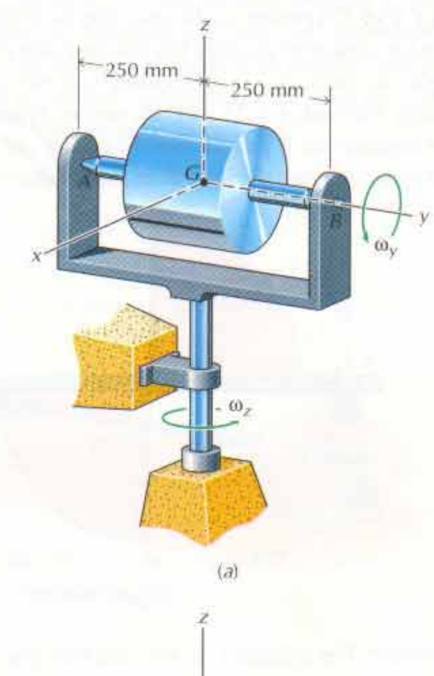
$$A_x = -650{,}5 = 651 \text{ N}\downarrow \qquad \text{Resp.}$$
$$B_x = +1616{,}5 = 1417 \text{ N}\uparrow \qquad \text{Resp.}$$

De las ecuaciones b y c resulta

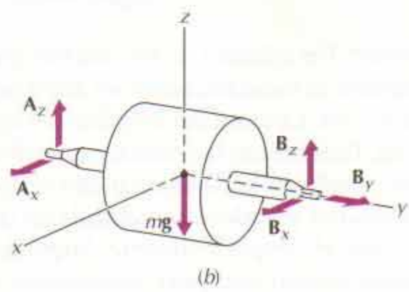
$$A_y = +1{,}972 = 1{,}972 \text{ N} \swarrow \qquad \text{Resp.}$$
$$B_y = -1{,}972 = 1{,}972 \text{ N} \nearrow \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 16.14

La masa del conjunto eje-cilindro representado en la figura 16-27*a* es de 20 kg. Los momentos de inercia de dicho conjunto respecto a los ejes *x*, *y* y *z* que pasan por su centro de masa *G* son $I_{Gx} = I_{Gz} = 0{,}1595$ kg · m² e $I_{Gy} = 0{,}0625$ kg · m². Si el cilindro gira con una velocidad angular constante de 75 rad/s y el bastidor lo hace con una velocidad angular constante de 25 rad/s, determinar las reacciones en los apoyos *A* y *B* del eje. Supóngase que el cojinete en *B* puese resistir cualquier fuerza dirigida axialmente en el eje.



(*a*)



(*b*)

Figura 16-27

SOLUCIÓN

En el movimiento que se ilustra en la figura 16-27*a*, $a_{Gx} = a_{Gy} = a_{Gz} = \omega_x = 0$. Aun cuando se mantiene constante el módulo del vector velocidad angular $(\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0)$, su dirección varía. Por tanto, la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ y las ecuaciones 16-29 se reducen a

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_{Gx} = I_{Gx}\alpha_x - (I_{Gy} - I_{Gz})\,\omega_y\omega_z$$
$$\Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_{Gy} = I_{Gy}\alpha_y$$
$$\Sigma F_z = 0 \qquad \Sigma M_{Gz} = I_{Gz}\alpha_z$$

donde la aceleración angular se calcula así:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \dot{\omega}_y\mathbf{e}_{AB} + \omega_y\dot{\mathbf{e}}_{AB} + \dot{\omega}_z\mathbf{k}\\ &= \omega_y(\omega_z\mathbf{k}\times\mathbf{e}_{AB}) = (75)(25)(-\mathbf{e}_x)\\ &= -1875\mathbf{i}\ \text{rad/s}^2\end{aligned}$$

En la figura 16-27*b* puede verse el diagrama de sólido libre del conjunto eje-cilindro. De las ecuaciones del movimiento

$$+\swarrow \Sigma F_x = A_x + B_x = 0 \qquad (a)$$
$$+\rightarrow \Sigma F_y = B_y = 0 \qquad (b)$$
$$+\uparrow \Sigma F_z = A_z + B_z - mg = 0 \qquad (c)$$
$$\begin{aligned}+\searrow \Sigma M_{Gx} &= B_z(0{,}250) - A_z(0{,}250)\\ &= I_{Gx}\alpha_x - (I_{Gy} - I_{Gz})\,\omega_y\omega_z \qquad (d)\end{aligned}$$
$$+\searrow \Sigma M_{Gy} = 0 \qquad (e)$$
$$+\searrow \Sigma M_{Gz} = A_x(0{,}250) - B_x(0{,}250) = 0 \qquad (f)$$

De las ecuaciones *a*, *b* y *f*, resulta

$$A_x = B_x = B_y = 0 \qquad \text{Resp.}$$

De las ecuaciones *c* y *d*, resulta

$$\begin{aligned}A_z + B_z &= 20(9{,}81) = 196{,}2\\ A_z - B_z &= \frac{1}{0{,}250}\Big((0{,}0625 - 0{,}1595)(75)(25) - (0{,}1595)(-1875)\Big)\\ &= 468{,}75\end{aligned}$$

Por tanto:

$$A_z = 332{,}48 = 332\ \text{N}\uparrow \qquad \text{Resp.}$$
$$B_z = -136{,}28 = 136{,}3\ \text{N}\downarrow \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

16-87* Dos placas delgadas en forma de cuadrante circular (v. fig. P16-87) pesan, cada una, 100 N. Determinar las reacciones en los cojinetes cuando las placas estén en un plano vertical (según se indica) y la velocidad y aceleración angulares del eje sean 100 rad/s y 25 rad/s², respectivamente. Supóngase que el cojinete en B puede resistir cualquier movimiento del eje en la dirección axial y que la masa de éste es despreciable.

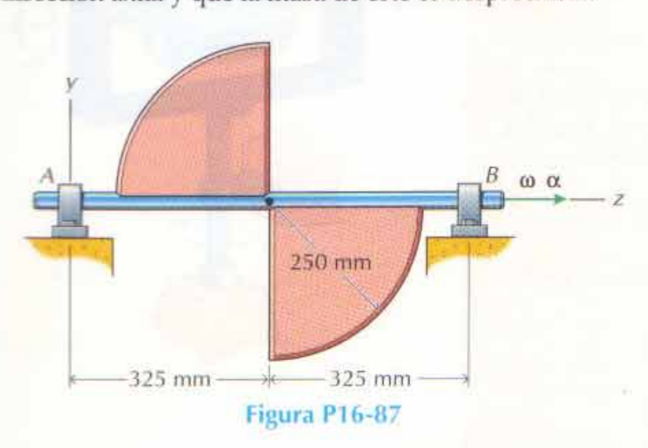


Figura P16-87

16-88* Un cilindro de revolución macizo de 75 mm de diámetro está montado sobre un árbol según se indica en la figura P16-88. La masa del cilindro es 6 kg y la de cada hemisferio 1 kg. Determinar las reacciones en los cojinetes cuando el eje del cilindro se halla en un plano vertical (según se indica) y la velocidad y aceleración angulares del árbol son 50 rad/s y 15 rad/s², respectivamente. Supóngase que el cojinete en B puede resistir cualquier movimiento del árbol en la dirección axial y que la masa de éste es despreciable.

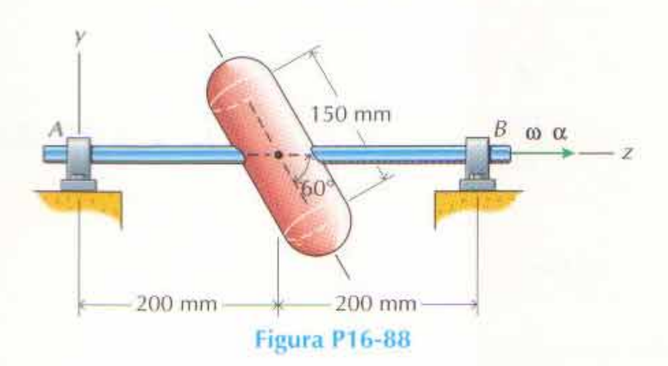


Figura P16-88

16-89 Repetir el problema 16-87 para el caso en que las placas estén en un plano horizontal (giradas 90° en torno al eje z). Utilizar las mismas velocidad y aceleración angulares que antes.

16-90* Repetir el problema 16-88 para el caso en que el cilindro esté en un plano horizontal (girado 270° en torno al eje z). Utilizar las mismas velocidad y aceleración angulares que antes.

16-91 La manivela representada en la figura P16-91 gira en sentido antihorario con velocidad angular constante igual a 20 rad/s. La barra AB pesa 100 N y está conectada a la manivela en A y a la corredera en B mediante rótulas. Determinar las reacciones en los extremos A y B de la barra cuando la manivela se halle en la posición indicada en la figura.

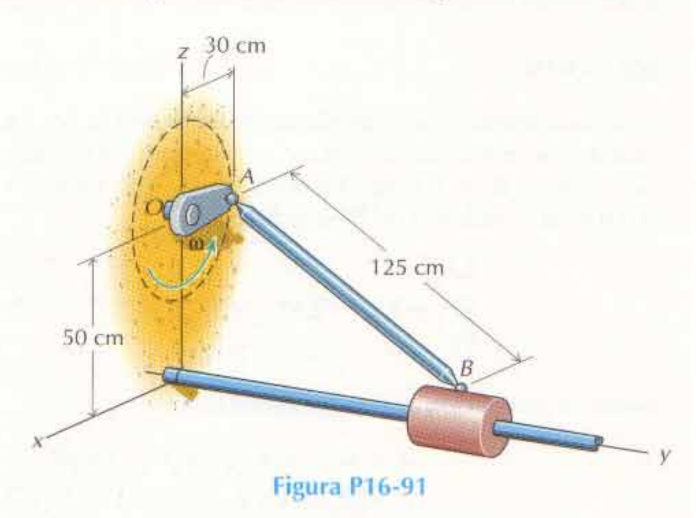


Figura P16-91

16-92* Un árbol vertical sostiene una varilla AB de masa 5 kg y una esfera de masa 6 kg según se indica en la figura P16-92. Determinar la reacción en A y la tensión del cable CD cuando gire el árbol en sentido antihorario con velocidad angular constante de 30 rad/s.

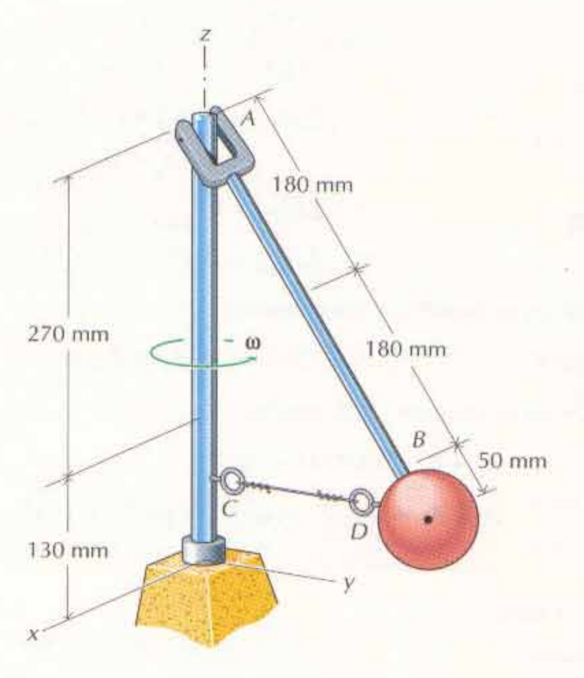


Figura P16-92

16-93 Resolver el problema 16-91 en el caso en que la manivela tenga una velocidad angular de 25 rad/s en sentido horario y una aceleración angular de 5 rad/s^2 en sentido antihorario.

16-94* Resolver el problema 16-92 en el caso en que el árbol tenga una velocidad angular de 30 rad/s en sentido antihorario y una aceleración angular de 10 rad/s^2 en sentido horario.

16-95 El disco macizo representado en la figura P16-95 pesa 125 N. Gira alrededor del eje *AB* con velocidad angular constante de 500 rpm. Al mismo tiempo, el eje *AB* gira en un plano vertical en torno a un pasador en el soporte *A*. Determinar la reacción en el soporte *A* cuando el sistema se halle en la posición representada y la velocidad y aceleración angulares del eje sean $\omega_z = 20$ rad/s y $\alpha_z = 5$ rad/s^2. Supóngase despreciable la masa del eje.

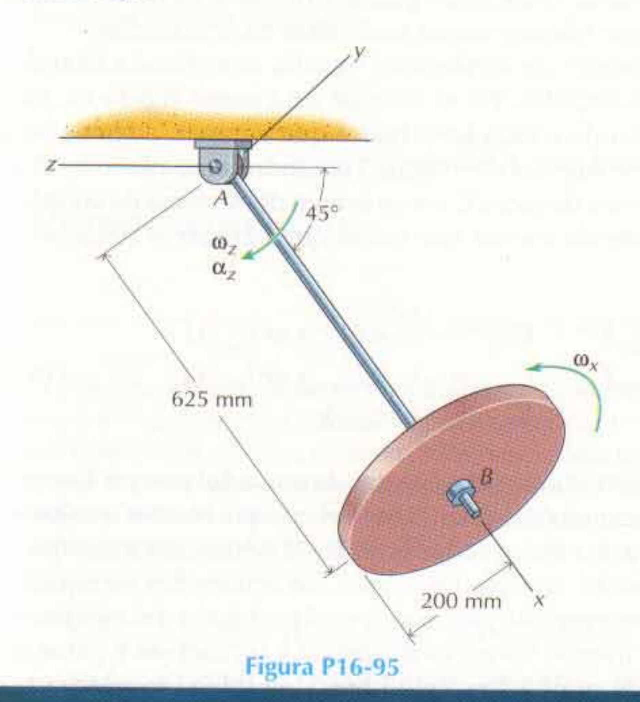


Figura P16-95

16-96* El disco macizo representado en la figura P16-96 rueda sin deslizamiento recorriendo un camino circular por la superficie horizontal mientras el eje sobre el que está montado gira en torno al montante. La masa del disco es de 50 kg. Supóngase que la masa del eje que sostiene el disco es despreciable y que los cojinetes en *A* y *B* giran libremente a lo largo del montante. Determinar las reacciones en los cojinetes y la fuerza que se ejerce entre el disco y la superficie horizontal cuando el eje gire con velocidad angular constante $\omega_y = 25$ rad/s.

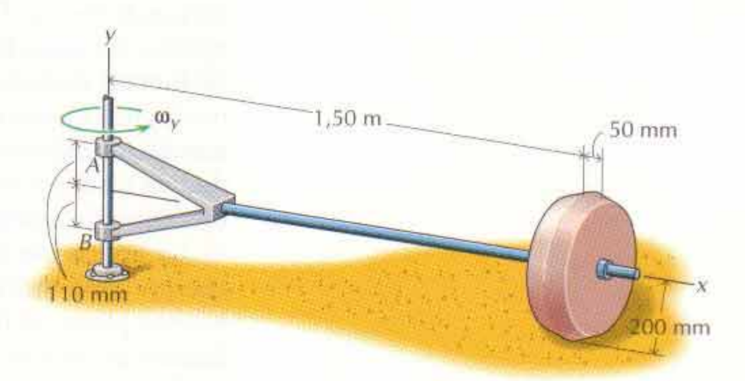


Figura P16-96

16.6 PRINCIPIO DE D'ALEMBERT —FUERZAS DE INERCIA

La segunda ley de Newton aplicada a un punto material o al centro de masa de un cuerpo rígido viene dada por la ecuación 15-16 en la forma

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \qquad (15\text{-}16)$$

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) sugirió que al sistema de fuerzas reales de los problemas de Dinámica se podía añadir un sistema de fuerzas de inercia ($m\mathbf{a}_G$) para obtener un sistema de fuerzas en equilibrio.[1] El proceso, conocido

[1] Dr. Ernst Mach, *The Science of Mechanics*, 9ª ed., The Open Court Publishing Company, LaSalle, Ill., 1942. Publicado originalmente en alemán en 1893 y traducido al inglés por Thomas H. McCormack en 1902.

por el nombre de principio de d'Alembert, puede expresarse matemáticamente en la forma

$$\mathbf{R} + (-m\mathbf{a}_G) = \mathbf{R} + \mathbf{F}_{in} = \mathbf{0} \tag{16-30}$$

El término $\mathbf{F}_{in} = (-m\mathbf{a}_G)$ de la ecuación 16-30 se denomina *fuerza de inercia*. Las fuerzas de inercia no son verdaderas fuerzas ya que no representan la acción de otro cuerpo sobre el cuerpo de interés.

Los problemas que entrañan la traslación de un cuerpo rígido, se pueden resolver mediante el principio de d'Alembert situando en su centro de masa la fuerza de inercia $\mathbf{F}_{in} = (-m\mathbf{a}_G)$ cuando se dibuja el diagrama de sólido libre. Se aplican entonces las ecuaciones de equilibrio $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\Sigma\mathbf{M} = \mathbf{0}$ tomando todas las fuerzas de dicho diagrama (incluida la fuerza de inercia). Las ecuaciones de momentos que se utilicen en la resolución del problema se podrán escribir tomando los momentos respecto a puntos del cuerpo o de fuera de él. La necesidad de resolver un sistema de ecuaciones puede evitarse a menudo tomando un centro de momentos que elimine varias incógnitas en la ecuación.

La aplicación del principio de d'Alembert resulta complicada cuando el cuerpo tiene movimiento angular. En el caso de un cuerpo rígido en movimiento plano, al diagrama de sólido libre habrá que agregar, además de las fuerzas de inercia, pares de fuerzas de inercia. Tomando como plano xy el plano de movimiento y el centro de masa G como origen del sistema de coordenadas xyz, las fuerzas y pares de inercia que habrá que agregar al diagrama de sólido libre son

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{inx} &= -ma_{Gx}\mathbf{i} & \mathbf{C}_{inx} &= -(-\alpha I_{Gzx} + \omega^2 I_{Gyz})\,\mathbf{i} \\ \mathbf{F}_{iny} &= -ma_{Gy}\mathbf{j} & \mathbf{C}_{iny} &= -(-\alpha I_{Gyz} + \omega^2 I_{Gzx})\,\mathbf{j} \\ \mathbf{F}_{inz} &= \mathbf{0} & \mathbf{C}_{inz} &= -(\alpha I_{Gz})\,\mathbf{k} \end{aligned} \tag{16-31}$$

Las fuerzas de inercia deben situarse en el centro de masa del cuerpo. Los pares de inercia se pueden colocar en cualquier lugar del cuerpo. Nótese que los momentos y productos de inercia de las ecuaciones 16-31 se refieren a ejes que pasan por el centro de masa del cuerpo. De nuevo, las ecuaciones de equilibrio $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\Sigma\mathbf{M} = \mathbf{0}$ se pueden emplear para resolver el problema del movimiento utilizando las fuerzas de inercia, los pares de inercia y las fuerzas y pares aplicados que figuran en el diagrama de sólido libre. Una selección adecuada de los centros de momentos para las ecuaciones correspondientes puede simplificar el proceso de resolución.

En los problemas de movimiento tridimensional cualquiera en que se considere el centro de masa como origen y los ejes principales como ejes de un sistema de coordenadas xyz, las fuerzas y pares de inercia que se necesitan para aplicar el principio de d'Alembert a la solución de problemas de Dinámica son

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{inx} &= -ma_{Gx}\mathbf{i} & \mathbf{C}_{inx} &= -[I_{Gx}\dot{\omega}_x - (I_{Gy} - I_{Gz})\,\omega_y\omega_z]\,\mathbf{i} \\ \mathbf{F}_{iny} &= -ma_{Gy}\mathbf{j} & \mathbf{C}_{iny} &= -[I_{Gy}\dot{\omega}_y - (I_{Gz} - I_{Gz})\,\omega_z\omega_x]\,\mathbf{j} \\ \mathbf{F}_{iny} &= -ma_{Gz}\mathbf{j} & \mathbf{C}_{inz} &= -[I_{Gz}\dot{\omega}_z - (I_{Gx} - I_{Gy})\,\omega_x\omega_y]\,\mathbf{k} \end{aligned} \tag{16-32}$$

El principio de d'Alembert proporciona otro método de resolución de los problemas de Dinámica, que algunos profesores consideran atractivo. Como el método no da nueva información, no insistiremos en él en este libro. Los dos ejemplos siguientes se introducen para ilustrar el método a quienes interese.

PROBLEMA EJEMPLO 16.15

Un automóvil cuya distancia entre ejes es de 2,85 m pesa 17,5 kN. Su centro de masa se halla 1,20 m detrás del eje delantero y 55 cm sobre la calzada. Determinar las fuerzas normales que la calzada ejerce sobre las ruedas delanteras y traseras cuando se reduce uniformemente la celeridad del coche de 100 km/h a 50 km/h en una distancia de 45 m sobre un tramo horizontal de la calzada.

SOLUCIÓN

Las velocidades inicial v_i y final v_f del coche son

$$v_i = \frac{100(1000)}{3600} = 27,28 \text{ m/s}$$

$$v_f = \frac{50(1000)}{3600} = 13,89 \text{ m/s}$$

La aceleración del automóvil es

$$a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2\,s}$$

$$= \frac{13,889^2 - 27,28^2}{2(45)} = -\,6,43 \text{ m/s}^2$$

La fuerza de inercia efectiva es

$$F_{ef} = -\,ma$$

$$= -\,\frac{17500}{9,81}(-6,43) = 11\,473 \text{ N}$$

En la figura 16-28 puede verse el diagrama de sólido libre del automóvil. La fuerza de inercia efectiva F_{ef} está dirigida hacia adelante ya que la aceleración del auto lo está hacia atrás. La reacción de las ruedas delanteras N_B se determina utilizando una ecuación de momentos tomando en A el centro de momentos para eliminar las fuerzas de rozamiento F_A y F_B. Análogamente, la reacción N_A de las ruedas traseras se calcula utilizando una ecuación de momentos con centro de momentos en B. Así pues,

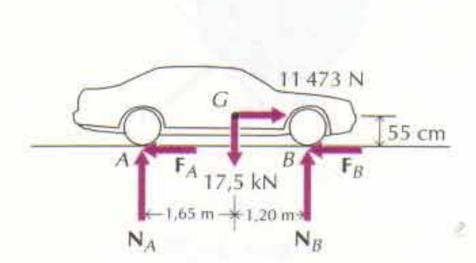


Figura 16-28

$+\circlearrowright\ \Sigma M_A = N_B(2,85) - 17\,500(1,65) - 11473(0,55) = 0 \quad N_B = 12346 \text{ N}$ Resp.

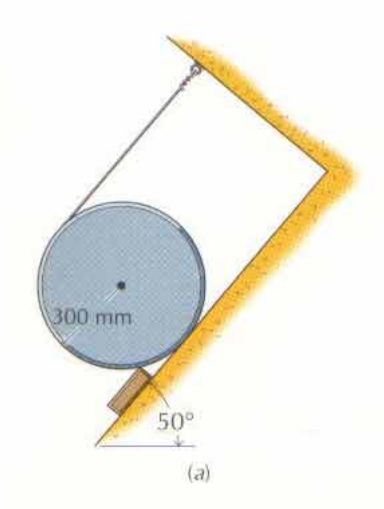
$+\circlearrowleft\ \Sigma M_B = N_A(2,85) - 17\,500(1,20) + 11\,473(0,55) = 0 \quad N_A = 5154 \text{ N}$ Resp.

Comprobación:

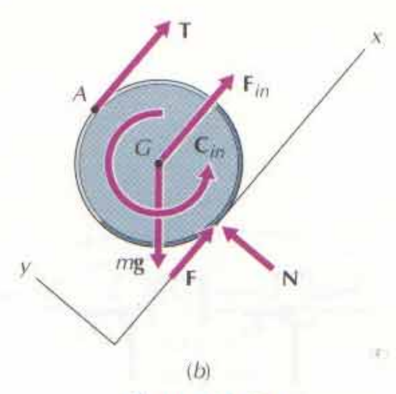
$$+\uparrow \Sigma F = N_A + N_B - W = 12\,346 + 5154 - 17\,500 = 0$$

PROBLEMA EJEMPLO 16.16

Un disco delgado de 600 mm de diámetro y masa 60 kg se mantiene sobre un plano inclinado gracias a un bloque y a un cable arrollado en su superficie según se indica en la figura 16-29*a*. Determinar la tensión T del cable y la aceleración a_G del centro de masa del disco una vez suprimido el bloque con lo que el disco podrá deslizarse libremente por el plano inclinado. El coeficiente de rozamiento cinético entre disco y plano vale 0,20.



(a)



(b)

Figura 16-29

SOLUCIÓN

En la figura 16-29*b* puede verse el diagrama de sólido libre del disco. El movimiento de éste sólo es posible si se desliza; por tanto, $F = \mu N$. Además, el punto donde el cable sale de la superficie del disco es el centro instantáneo de rotación; por tanto, $\mathbf{a}_G = R\boldsymbol{\alpha} = 0{,}300\boldsymbol{\alpha}$ o sea $\alpha = 3{,}333a_G$

Del Apéndice B

$$I_G = \frac{1}{2}mR^2$$
$$= \frac{1}{2}(60)(0{,}300)^2 = 2{,}70 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Por definición, la fuerza de inercia es

$$F_{in} = -ma_G = -60a_G$$

y el par de inercia tiene por momento

$$C_{in} = -I_G\alpha = -2{,}70(3{,}333a_G) = -9{,}00a_G$$

La aplicación de las tres ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M = 0$ respecto a todo punto, situado en el disco o fuera de él, da las restantes incógnitas

$$+\nwarrow \Sigma F_y = N - mg\cos 50° = 0$$
$$N = mg\cos 50°$$
$$= 60(9{,}81)\cos 50° = 378{,}3 = 378 \text{ N} \nwarrow$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = C_{in} + F_{in}R - mg \text{ sen } 50°\,(R) + \mu N(2R) = 0$$
$$-9{,}00a_G - 60a_G(0{,}300) = 60(9{,}81)(\text{ sen } 50°)(0{,}300)$$
$$-0{,}20(378{,}3)(0{,}600)$$

De donde

$$a_G = -3{,}328 = 3{,}33 \text{ m/s}^2 \swarrow \qquad \text{Resp.}$$
$$+\nearrow \Sigma F_x = F + T + F_{in} - mg \text{ sen } 50° = 0$$
$$T = mg \text{ sen } 50° - \mu N + 60a_G$$
$$= 60(9{,}81) \text{ sen } 50° - 0{,}20(378{,}3) + 60(-3{,}328)$$
$$= 175{,}55 = 175{,}6 \text{ N}$$

RESUMEN

Todo sistema de fuerzas que actúe sobre un cuerpo rígido puede sustituirse por un sistema equivalente consistente en una fuerza resultante **R** cuya recta soporte pase por el centro de masa *G* del cuerpo y un par resultante **C**. La segunda ley de Newton rige el movimiento del centro de masa *G* del cuerpo, la cual puede expresarse matemáticamente por la ecuación

$$\mathbf{R} = m\mathbf{a}_G \qquad (15\text{-}16)$$

La ecuación 15-16 expresa el hecho de que los módulos de **R** y $\mathbf{a}_G$ son proporcionales y que los vectores **R** y $\mathbf{a}_G$ tienen igual dirección y sentido dado que *m* es un escalar positivo. La ecuación 15-16 es válida tanto para fuerzas constantes como para fuerzas variables con el tiempo. El sistema de ejes que se utilice para medir la aceleración $\mathbf{a}_G$ debe ser un *sistema inercial primario* (que tenga una orientación constante respecto a las estrellas fijas). Sin embargo, todo *sis-*

tema de ejes no giratorio que esté en movimiento de *traslación* con velocidad constante respecto al sistema primario será igualmente satisfactorio. La ecuación 15-16 no será válida cuando $\mathbf{a}_G$ represente una aceleración relativa medida respecto a un sistema de ejes en rotación.

El movimiento real de la mayoría de los cuerpos rígidos consiste en una superposición de la traslación originada por la fuerza resultante **R** y la rotación que origina el par **C**. En un sistema de coordenadas *xyz* con origen en el centro de masa *G* del cuerpo y ejes de coordenadas que coincidan con los ejes principales que pasan por el centro de masa, las relaciones instantáneas entre las componentes del momento del par **C** y las velocidades angulares, aceleraciones angulares y propiedades inerciales del cuerpo rígido vienen dadas por las ecuaciones de Euler:

$$\begin{aligned} M_{Gx} &= I_{Gx}\dot{\omega}_x - (I_{Gy} - I_{Gz})\,\omega_y\omega_z \\ M_{Gy} &= I_{Gy}\dot{\omega}_y - (I_{Gz} - I_{Gx})\,\omega_z\omega_x \\ M_{Gx} &= I_{Gz}\dot{\omega}_z - (I_{Gx} - I_{Gy})\,\omega_x\omega_y \end{aligned} \qquad \textbf{(16-28)}$$

Muchos problemas de Dinámica entrañan un movimiento plano. Definimos el movimiento plano de un cuerpo rígido diciendo que es aquel movimiento en el que todos los elementos del cuerpo se mueven en planos paralelos. Al plano paralelo que contiene al centro de masa *G* del cuerpo le llamamos "plano del movimiento". Cuando un cuerpo rígido está animado de movimiento plano, los vectores velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ son paralelos entre sí y perpendiculares al plano del movimiento. Si se toma el sistema de coordenadas *xyz* de manera que el movimiento sea paralelo al plano *xy*, las ecuaciones 16-28 se reducen a

$$\begin{aligned} M_{Gx} &= 0 \\ M_{Gy} &= 0 \\ M_{Gz} &= I_{Gz}\alpha \end{aligned} \qquad \textbf{(16-5)}$$

Los problemas de movimiento plano se clasifican en tres categorías, que dependen de la naturaleza del movimiento: (1) traslación, (2) rotación en torno a un eje fijo y (3) movimiento plano cualquiera, que es una combinación de traslación y rotación. El movimiento de traslación es, por definición, aquel en el cual todo segmento rectilíneo del cuerpo se mantiene, durante el movimiento, paralelo a su posición inicial. La resultante de las fuerzas exteriores que se ejercen sobre el cuerpo en traslación es una fuerza **R** cuya recta soporte pasa por el centro de masa *G* del cuerpo. Las ecuaciones del movimiento para la traslación, cuando el origen *O* del sistema de coordenadas *xyz* se toma en el centro de masa *G* del cuerpo, son

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= m a_{Gx} \\ \Sigma F_y &= m a_{Gy} \\ \Sigma M_{Gz} &= 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(16-18)}$$

Cuando todos los elementos de un cuerpo describen trayectorias circulares centradas en un eje fijo y situadas en planos normales a él, se dice que el movimiento es de rotación en torno a un eje fijo. Las ecuaciones del movimiento de

un cuerpo rígido simétrico respecto al plano del movimiento y que gire en torno a un eje fijo que pase por el centro de masa G ($\mathbf{a}_G = \mathbf{0}$) son

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= ma_{Gx} = 0 \\ \Sigma F_y &= ma_{Gy} = 0 \\ \Sigma M_{Gz} &= I_{Gz}\alpha \end{aligned} \tag{16-20}$$

También pueden producirse rotaciones en torno a ejes fijos que no pasen por el centro de masa G del cuerpo. Las ecuaciones del movimiento para un cuerpo rígido simétrico respecto al plano del movimiento y que gire en torno a un eje fijo que pase por un punto arbitrario A ($\mathbf{a}_A = \mathbf{0}$) del eje x son

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= ma_{Gx} = -m\bar{x}\omega^2 \\ \Sigma F_y &= ma_{Gy} = m\bar{x}\alpha \\ \Sigma M_{Az} &= I_{Az}\alpha \end{aligned} \tag{16-21}$$

PROBLEMAS DE REPASO

16-97* El automóvil de la figura P16-97, que pesa 15,5 kN, reduce uniformemente su celeridad de 100 km/h a 20 km/h en una distancia de 50 m. Determinar las fuerzas normales que el pavimento ejerce sobre las ruedas delanteras y traseras durante la acción de frenado y el mínimo coeficiente de rozamiento que debe haber entre los neumáticos y el pavimento. El auto tiene frenos en las cuatro ruedas.

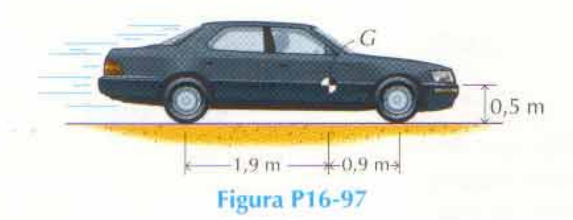


Figura P16-97

16-98* Un cable une dos cajas A y B según se indica en la figura P16-98. La masa de la caja A es 50 kg; la de la caja B, 40 kg. Las dos cajas son simétricas respecto al plano de movimiento y el cable AB y la fuerza $\mathbf{P}$ están en el plano de movimiento. El piso sobre el que están las cajas es liso. Determinar la máxima fuerza $\mathbf{P}$ que puede aplicarse a la caja B antes de que una de las cajas esté a punto de volcar.

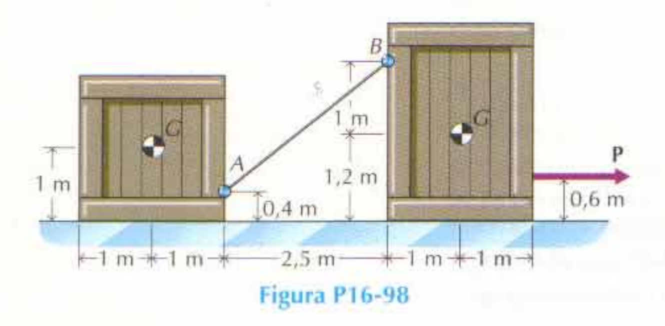


Figura P16-98

16-99 Un bloque que pesa 250 N descansa sobre una plataforma de 600 N de peso sostenida por cuatro barras de peso despreciable según se indica en la figura P16-99. El coeficiente de rozamiento entre plataforma y bloque vale 0,10. Se suelta la plataforma, partiendo del reposo en la posición representada, cortando el cable unido a A. Determinar la aceleración del centro de masa del bloque y las fuerzas que sobre la plataforma ejercen las barras en A y C en el instante en que se inicia el movimiento.

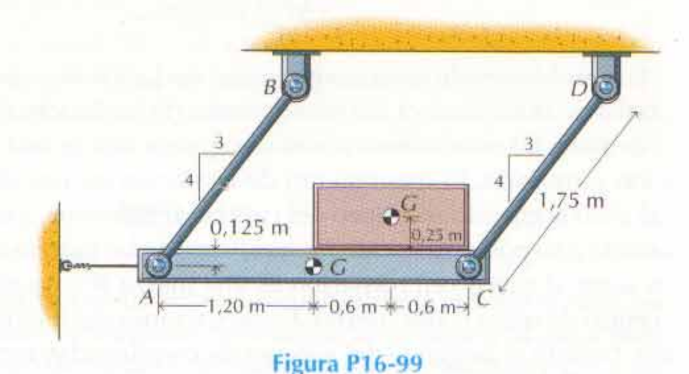


Figura P16-99

16-100 La plataforma y el sistema de palancas representados en la figura P16-100 se utilizan en una fábrica para llevar cajas de un piso a otro. En la posición representada, la palanca AB está girando en sentido horario con una velocidad angular de 0,5 rad/s, disminuyendo a razón de 1,5 rad/s^2. La masa de la caja es 500 kg. Determinar, para ese instante, las componentes verticales de las fuerzas que se ejercen sobre la caja en los apoyos C y D y el mínimo coeficiente de rozamiento que ha de haber para evitar que la caja se deslice.

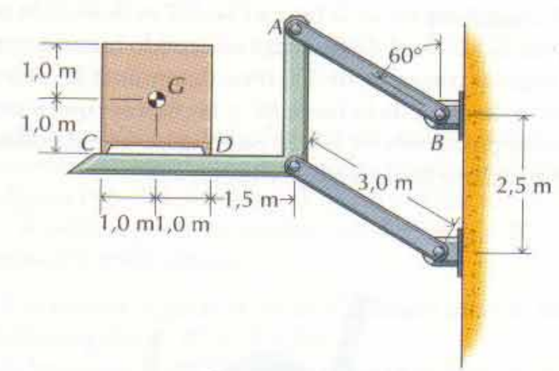


Figura P16-100

16-101* La barra esbelta de la figura P16-101 gira en un plano vertical en torno al pasador liso situado en el apoyo *B*. La barra tiene sección uniforme y pesa 210 N. Cuando se halla en la posición representada, su velocidad angular es 20 rad/s en sentido antihorario y su aceleración angular 5 rad/s^2 en sentido horario. Determinar el módulo del par **C** que se aplica a la barra y la fuerza que sobre ella ejerce el pasador en el apoyo *B*.

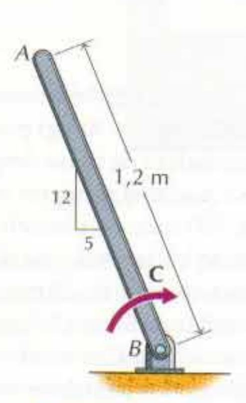


Figura P16-101

16-102* La masa del disco giratorio de la figura P16-102 es de 10 kg y su radio de giro respecto al eje de rotación es igual a 350 mm. Sobre el disco descansa un bloque *B* de 1 kg en la posición que se indica. El coeficiente de rozamiento entre bloque y disco vale 0,55. Si se aplica un par constante **C** de 5 m · N, determinar el número de rotaciones que se producirán antes de que el bloque comience a deslizarse y la velocidad angular del disco cuando se inicia el deslizamiento.

16-103 Una placa semicircular de grosor uniforme pende de dos cables según se indica en la figura P16-103. Pesa 500 N. Si se rompe el cable atado a *B*, determinar qué aceleración tomará el centro de masa de la placa y la reacción en el apoyo *A* en el instante en que se inicia el movimiento.

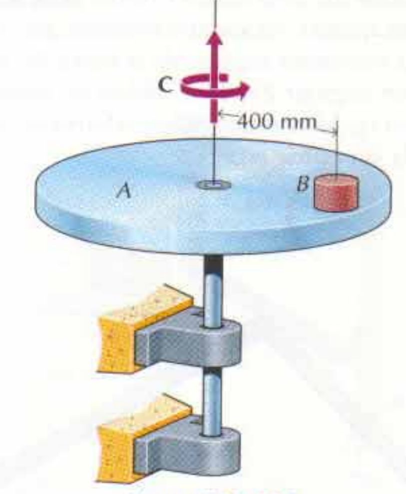


Figura P16-102

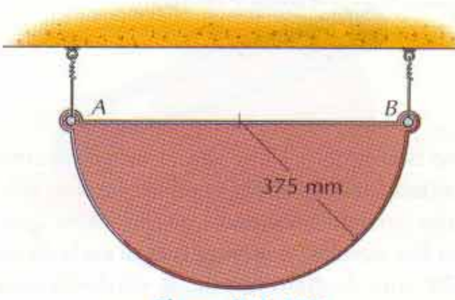


Figura P16-103

16-104* La barra esbelta *AB* representada en la figura P16-104 tiene sección uniforme y masa 15 kg. Determinar la aceleración de su centro de masa y la reacción en el apoyo *A* inmediatamente después de cortar el hilo atado a *B* si

a. La superficie horizontal en *A* es lisa ($\mu = 0$).
b. La superficie horizontal en *A* es rugosa ($\mu = 0{,}25$).

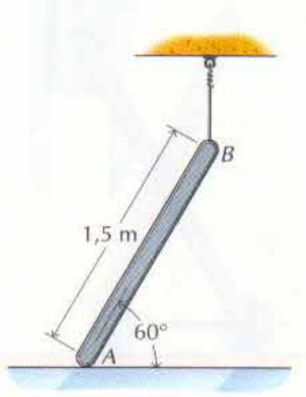


Figura P16-104

16-105 La barra *AB* de la figura P16-105 pesa 35 N y la barra *BC*, 50 N. En el apoyo *C*, la superficie es lisa. En la posición representada, la velocidad angular de la barra *AB* es de 5 rad/s y la aceleración angular 2 rad/s^2, ambas en sentido antihorario. Determinar las fuerzas que, sobre la barra *BC*, ejercen el pasador en *B* y la superficie en *C*.

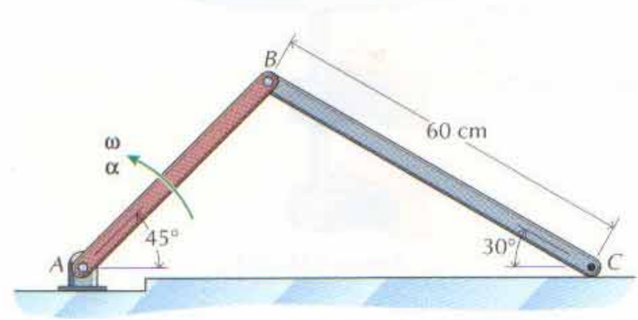


Figura P16-105

16-106* Una barra (m_B = 20 kg) de sección uniforme está unida a un disco macizo (m_D = 5 kg) por su extremo *A* y por su extremo *B* a una corredera de masa despreciable que se desliza por una guía lisa vertical, según se indica en la figura P16-106. El disco de 200 mm de diámetro rueda sin deslizamiento por la superficie horizontal y en el instante representado tiene una velocidad angular de 15 rad/s en sentido antihorario y una aceleración angular de 25 rad/s^2 en sentido horario. Determinar la fuerza **F** aplicada al pasador *A* y las fuerzas que sobre la barra ejercen los pasadores *A* y *B*.

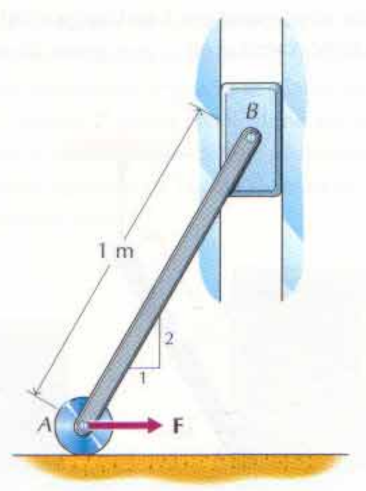


Figura P16-106

16-107 La barra *BC* de la figura P16-107 es de sección uniforme y pesa 125 N. Si el disco *A* gira en sentido horario con velocidad angular constante de 100 rpm, determinar la aceleración del centro de masa de la barra *BC* y las fuerzas que sobre ésta ejercen los pasadores en *B* y *D*. Supóngase que el collar en *D* puede deslizarse libremente por la barra *BC*.

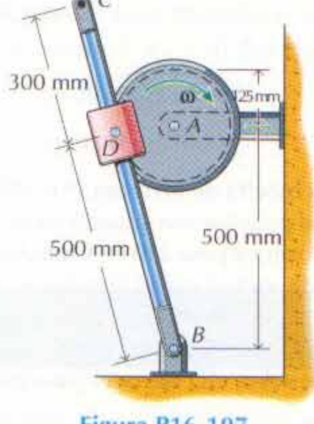


Figura P16-107

16-108 Una barra (m_B = 15 kg) de sección uniforme está articulada a un disco macizo (m_D = 30 kg) por su extremo *A* y por su extremo *B* a una corredera de masa despreciable que se desliza por una guía lisa horizontal, según se indica en la figura P16-108. El disco de 500 mm de diámetro rueda sin deslizamiento por la superficie horizontal y en el instante representado lleva una velocidad angular de 25 rad/s en sentido horario y una aceleración angular de 50 rad/s^2 en sentido antihorario. Determinar el módulo del par **C** aplicado al disco y las fuerzas que sobre la barra ejercen los pasadores en *A* y *B*.

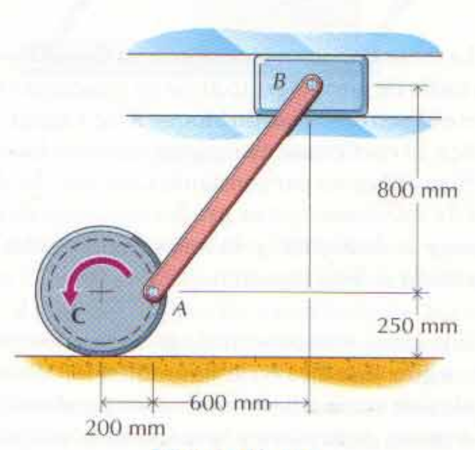


Figura P16-108

C16-109 Una placa rectangular de peso 80 N se balancea entre los extremos de dos varillas articuladas iguales según se indica en la figura P16-109. Si las masas de las varillas son despreciables y el sistema parte del reposo cuando $\theta = \theta_0 = 20°$, calcular y representar gráficamente:

a. La velocidad angular $\dot{\theta}$ de las varillas en función de su posición angular θ ($20° \leq \theta \leq 160°$).
b. Las tensiones T_{AB} y T_{CD} de las varillas en función de su posición angular θ ($20° \leq \theta \leq 160°$).
c. ¿Cuál es el mínimo ángulo inicial θ_0 para el cual las dos tensiones T_{AB} y T_{CD} serán siempre positivas?

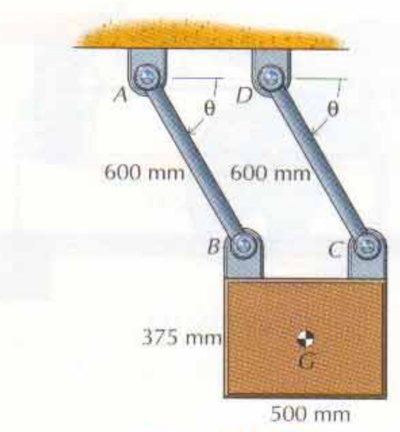


Figura P16-109

C16-110 El sistema de plataforma y palancas representado en la figura P16-110 se utiliza en una fábrica para pasar cajas de un piso a otro. La masa de la caja es 120 kg, la de la plataforma 30 kg y el centro de masa del conjunto se halla en el punto G. Si se hace descender lentamente la plataforma con celeridad angular constante $\dot{\theta} = 0{,}5$ rad/s por medio de un par T aplicado a la palanca AB, calcular y representar gráficamente:

a. El par T necesario en función de la posición angular θ ($5° \leq \theta \leq 175°$).
b. Las fuerzas que sobre la plataforma ejercen las palancas en A y C en función de θ ($5° \leq \theta \leq 175°$).
c. Las fuerzas normal y de rozamiento que sobre la base de la caja ejerce la plataforma en función de θ ($5° \leq \theta \leq 175°$).

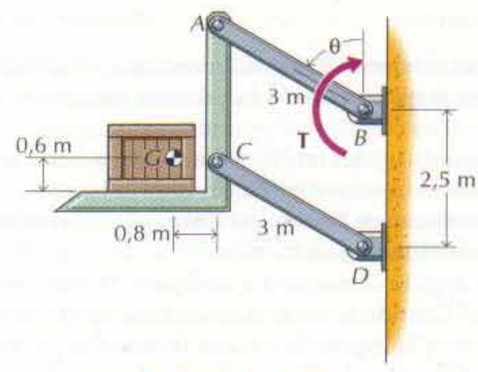


Figura P16-110

C16-111 El volante representado en la figura P16-111 gira con velocidad angular constante de 5 rad/s en sentido antihorario. La barra AB tiene 50 cm de longitud, pesa 25 N y tiene un momento de inercia $I_A = 0{,}16$ kg · m² respecto al eje horizontal que pasa por A. Calcular y representar gráficamente:

a. La fuerza que la barra AB ejerce sobre el pasador P en función de la posición angular θ ($0° \leq \theta \leq 360°$).
b. La fuerza que sobre la barra AB ejerce el apoyo A en función de θ ($0° \leq \theta \leq 360°$).

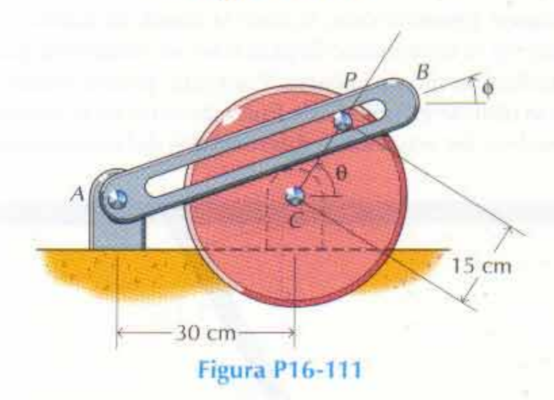


Figura P16-111

C16-112 La barra uniforme AB de masa 5 kg representada en la figura P16-112 puede girar en un plano vertical. Si se suelta, partiendo del reposo, cuando $\theta \cong 0°$, calcular y representar gráficamente:

a. Las componentes a_{Gx} y a_{Gy} de la aceleración del centro de masa de la barra en función de la posición angular θ ($0° \leq \theta \leq 90°$). (Téngase en cuenta que $a_{Gx} \neq 0$ y $a_{Gy} \neq -g$.)
b. La fuerza que sobre la barra ejerce en A el apoyo en función de θ ($0° \leq \theta \leq 90°$).

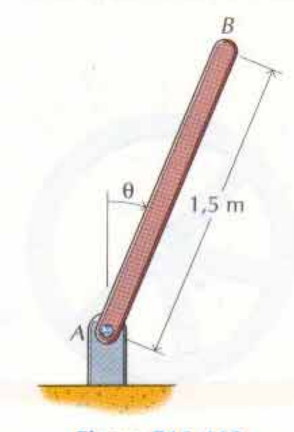


Figura P16-112

C16-113 La barra uniforme AB representada en la figura P16-113 pesa 50 N y puede girar en un plano vertical. El coeficiente de rozamiento entre la barra y la superficie en A vale 0,6. Si se suelta partiendo del reposo cuando $\theta \cong 0$, calcular y representar gráficamente:

a. Las fuerzas normal y de rozamiento que se ejercen sobre la barra en A en función de su posición angular θ ($0° \leq \theta \leq 90°$).
b. La ordenada y_G del centro de masa de la barra en función de la abscisa x_G cuando está cayendo la barra.
c. El movimiento de las coordenadas x_A e y_A del extremo A de la barra en función de t.
d. ¿A qué ángulo comenzará a deslizarse la barra sobre la superficie? Cuando se inicie el deslizamiento ¿lo hará el extremo A hacia la izquierda o hacia la derecha?¿Se elevará, en algún momento, el extremo A sobre la superficie?

(Téngase presente que, al caer la barra, la fuerza normal disminuye y el rozamiento llegará a no ser suficiente para evitar el deslizamiento de la barra. Por tanto, probablemente será necesario utilizar el método de Euler descrito en el Apéndice C para resolver las ecuaciones diferenciales del movimiento.)

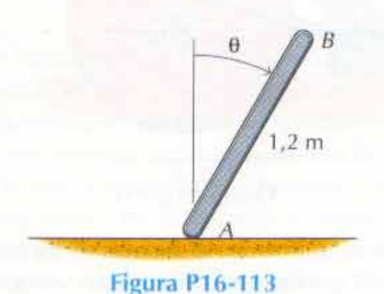


Figura P16-113

C16-114 La rueda con radios representada en la figura P16-114 rueda sin deslizamiento por una superficie horizontal. Como ha perdido un par de radios, el centro de masa de esta rueda de 12 kg se halla a 50 mm de su centro y el radio de giro respecto al eje horizontal que pasa por su centro de masa es igual a 0,6 m. Si el centro de la rueda tiene una celeridad de 3 m/s cuando $\theta = 0$, calcular y representar gráficamente:).



Figura P16-114

a. Las fuerzas normal y de rozamiento que se ejercen sobre la rueda en función de θ ($0° \leq \theta \leq 360°$).
b. La velocidad angular $\dot{\theta}$ de la rueda en función de θ ($0° \leq \theta \leq 360°$).

C16-115 La rueda desequilibrada A representada en la figura P16-115 pesa 100 N y su radio de giro respecto al eje de rotación es igual a 125 mm. El cable unido a la rueda sostiene un bloque B que pesa 50 N. Si se suelta el sistema partiendo del reposo cuando $\theta = 0$, calcular y representar gráficamente:

a. La fuerza que el eje en A ejerce sobre la rueda en función de su posición angular θ ($0° \leq \theta \leq 600°$).
b. La tensión del cable en función de θ ($0° \leq \theta \leq 600°$).

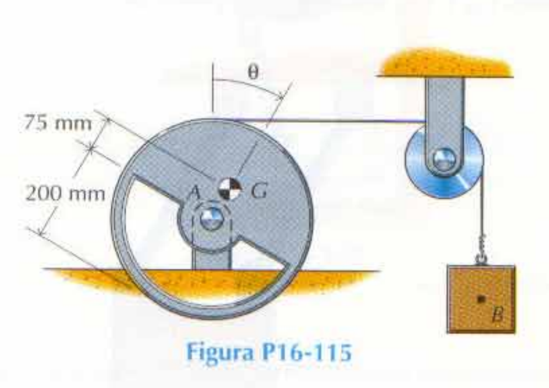


Figura P16-115

C16-116 El mecanismo biela-manivela de la figura P16-116 es una idealización de cigüeñal, biela y pistón de motor de automóvil. Trátese la biela como varilla uniforme de longitud l_{BC} = 175 mm y masa 0,12 kg. El brazo del cigüeñal tiene una longitud l_{AB} = 75 mm y la masa del pistón es 0,17 kg. Si el cigüeñal gira con velocidad angular constante $\dot{\theta}$ = 4800 rpm, calcular y representar gráficamente:.

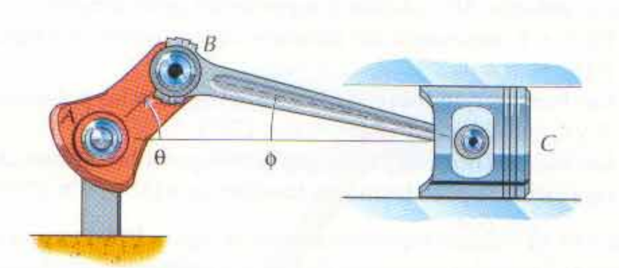


Figura P16-116

a. La fuerza que el cigüeñal ejerce en B a la biela en función de θ ($0° \leq \theta \leq 360°$).
b. La fuerza que la biela ejerce en el pistón en función de θ ($0° \leq \theta \leq 360°$).

C16-117 El mecanismo representado en la figura P16-117 es una simplificación de la prensa de imprenta. El rodillo es un cilindro macizo que pesa 80 N, la barra *AB* gira en sentido antihorario con velocidad angular constante $\dot{\theta} = 15$ rpm y el peso de la barra *BC* es despreciable. Si las longitudes son $l_{AB} = 0{,}75$ m, $l_{BC} = 1{,}2$ m y el radio del rodillo es de 0,30 m, calcular y representar gráficamente:

a. Las fuerzas normal y de rozamiento que se ejercen sobre el rodillo en función de θ ($0° \leq \theta \leq 360°$).
b. La fuerza que el miembro *BC* ejerce sobre el rodillo en función de θ ($0° \leq \theta \leq 360°$).
c. El par que se necesita para mover la barra *AB* con celeridad angular constante en función de θ ($0° \leq \theta \leq 360°$).

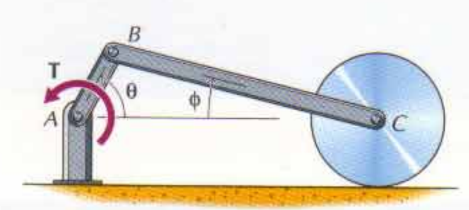
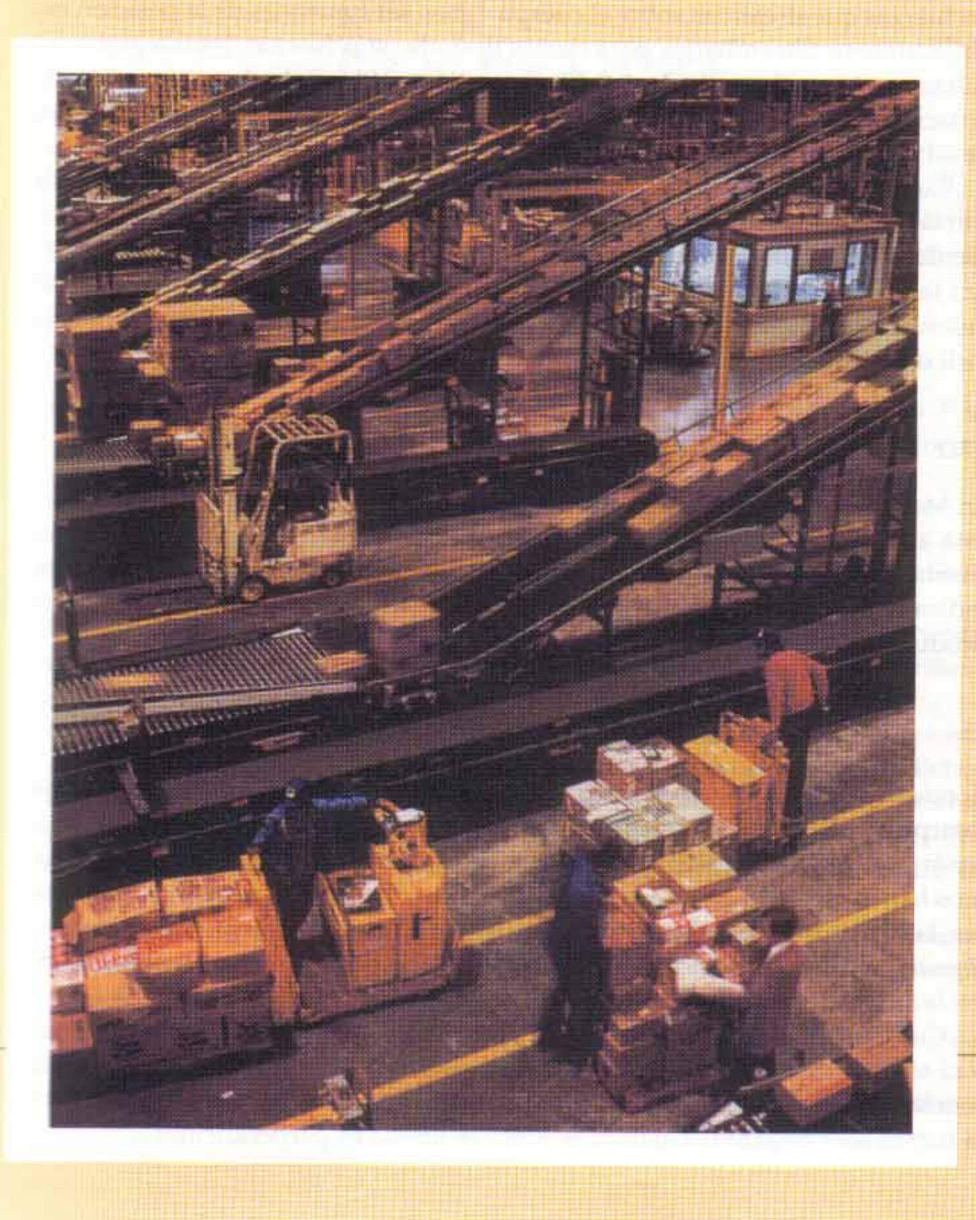


Figura P16-117

C16-118 Una bola de juego de bolos tiene una masa de 7 kg y un diámetro de 220 mm. Se suelta la bola por la pista con una velocidad inicial de 6 m/s y velocidad angular nula. Si el coeficiente de rozamiento entre bola y pista vale 0,1, calcular y representar gráficamente:

a. La velocidad v_G del centro de masa de la bola, la velocidad v_C del punto más bajo de la bola en contacto con la pista y la velocidad angular ω de la bola, todo ello en función de su posición x_G medida a partir del momento en que se suelta la bola hasta que choca con el bolo situado a 18,25 m.
b. La posición x_G y la velocidad v_G del centro de masa de la bola hasta que choca con el bolo situado a 18,25 m.

17 CINÉTICA DEL PUNTO: MÉTODOS DE TRABAJO Y ENERGÍA



Cuando baja una caja, convierte su energía potencial gravitatoria en energía cinética.

17.1 INTRODUCCIÓN

En los dos capítulos anteriores, se han resuelto problemas de Cinética utilizando la segunda ley de Newton. En este capítulo y el siguiente, presentaremos otro método —el del trabajo y la energía cinética— que resulta útil para resolver ciertos tipos de problemas de Cinética.

En el método de la segunda ley de Newton, se utilizaban las ecuaciones instantáneas del movimiento para relacionar las fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo con la aceleración de éste. Si se aplicaban las ecuaciones a una posición concreta del cuerpo, sólo se obtenían relaciones instantáneas. Si se aplicaran las ecuaciones a una posición arbitraria del cuerpo, la aceleración resultante se podía integrar utilizando los principios de Cinemática tratados en los capítulos 13 y 14.

El método trabajo-energía combina los principios de la Cinemática con la segunda ley de Newton para relacionar directamente la posición y la celeridad de un cuerpo. En este método, la segunda ley de Newton se integra en un sentido general respecto a la posición. Para que este método sea útil, está claro que las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo deben ser funciones de la posición exclusivamente. Sin embargo, para ciertos tipos de estas fuerzas, las integrales resultantes se pueden calcular en forma explícita. El resultado es una sencilla ecuación algebraica que relaciona las celeridades del cuerpo en dos posiciones de su movimiento diferentes.

Como el método trabajo-energía combina los principios de la Cinemática con la segunda ley de Newton, no constituye un principio ni nuevo ni independiente. Todo problema que pueda resolverse con el método trabajo-energía podrá también resolverse utilizando la segunda ley de Newton. No obstante, el método trabajo-energía, cuando sea aplicable, suele constituir la manera más fácil de resolución del problema.

17.2 TRABAJO DE UNA FUERZA

En Mecánica, una fuerza efectúa un trabajo solamente cuando el punto al cual está aplicada está en movimiento. Por ejemplo, cuando se aplica una fuerza constante **P** a una partícula que recorre en línea recta una distancia d, como se indica en la figura 17-1, el trabajo que efectúa la fuerza **P** es, por definición, el producto escalar

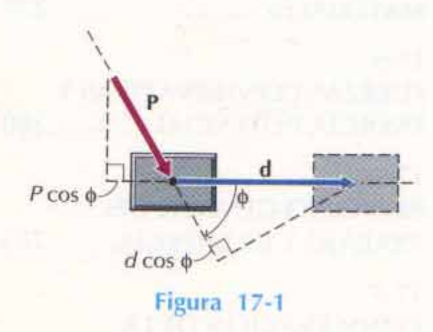


Figura 17-1

$$\begin{aligned} U &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{d} = Pd \cos\phi \\ &= P_x d_x + P_y d_y + P_z d_z \end{aligned} \tag{17-1}$$

donde ϕ es el ángulo que forman los vectores **P** y **d**. La ecuación 17-1 se suele interpretar diciendo: *El trabajo efectuado por la fuerza* **P** *es el producto de su módulo por la proyección sobre ella del desplazamiento, d cos* ϕ (fig. 17-1). También podríamos haber asociado cos ϕ a la fuerza **P** en vez de al desplazamiento d. Entonces, la ecuación 17-1 se interpretaría diciendo: *El trabajo efectuado por la fuerza es el producto del módulo d del desplazamiento por la proyección P cos* ϕ *de la fuerza sobre la dirección del desplazamiento* (fig. 17-1).

Cuando $0 \leq \phi < 90°$, la fuerza y el desplazamiento tienen el mismo sentido y el trabajo efectuado por la fuerza será positivo. Cuando $90° < \phi \leq 180°$, la fuerza y el desplazamiento tienen sentidos opuestos y el trabajo efectuado por la fuerza será negativo. Cuando $\phi = 90°$, la fuerza es perpendicular al despla-

zamiento y el trabajo que efectúa es nulo. Desde luego, cuando el desplazamiento sea nulo, $d = 0$, también lo será el trabajo efectuado por la fuerza.

Las dimensiones del trabajo son las del producto de una fuerza por una distancia. En el sistema SI de unidades, la unidad de trabajo es el *joule* (1 J = 1 N · m).[1] En el U.S. Customary system, la unidad de trabajo no tiene nombre particular y se expresa, simplemente, por ft · lb (pie · libra).

Cuando la fuerza no sea constante o el desplazamiento no sea rectilíneo, la ecuación 17-1 servirá para expresar el trabajo efectuado por la fuerza en una parte infinitesimal, $d\mathbf{r}$, del desplazamiento:

$$\begin{aligned} dU &= \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = P\,ds \cos\phi = P_t\,ds \\ &= P_x\,dx + P_y\,dy + P_z\,dz \end{aligned} \qquad (17\text{-}2)$$

donde $d\mathbf{r} = ds\,\mathbf{e}_t = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$. Integrando la ecuación 17-2 a lo largo del camino de la partícula desde la posición 1 a la posición 2 tendremos el trabajo $U_{1\to 2}$ efectuado por la fuerza

$$\begin{aligned} U_{1\to 2} &= \int_1^2 dU = \int_{s_1}^{s_2} P_t\,ds \\ &= \int_{x_1}^{x_2} P_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} P_y\,dy + \int_{z_1}^{z_2} P_z\,dz \end{aligned} \qquad (17\text{-}3)$$

En algunos casos podremos desconocer la relación funcional entre fuerza y desplazamiento. En su lugar, las componentes de la fuerza (P_t o bien P_x, P_y y P_z) pueden venir dadas en forma de gráficas (fig. 17-2). Entonces, las integrales de la ecuación 17-3 representan el área encerrada bajo la curva y se deberán calcular numéricamente.

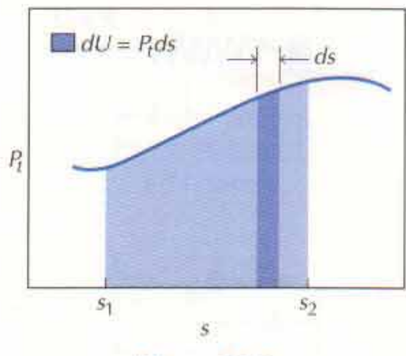


Figura 17-2

17.2.1 Trabajo efectuado por una fuerza constante

Cuando a un punto material se aplica una fuerza constante $\mathbf{P} = P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}$, la ecuación 17-3 da el trabajo efectuado por la fuerza sobre el punto en la forma

$$\begin{aligned} U_{1\to 2} &= P_x \int_{x_1}^{x} dx + P_y \int_{y_1}^{y_2} dy + P_z \int_{z_1}^{z_2} dz \\ &= P_x (x_2 - x_1) + P_y (y_2 - y_1) + P_z (z_2 - z_z) \end{aligned}$$

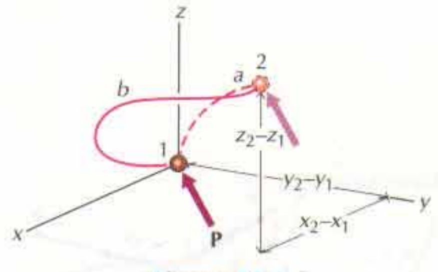


Figura 17-3

Obsérvese que el valor del trabajo efectuado por una fuerza constante depende de las coordenadas de los puntos extremos del camino recorrido pero no de la forma de éste. En el caso de la fuerza constante **P** representada en la figura 17-3, no importa que el punto material recorra el camino *a* que lleva del punto 1 al punto 2 o que recorra el camino *b* o cualquier otro camino entre dichos puntos. El trabajo efectuado por la fuerza **P** es siempre el mismo. Las fuerzas para las cuales el trabajo que efectúan es independiente del camino (entre dos puntos dados) se denominan fuerzas conservativas. Se estudiarán con mayor detalle en el apartado 17.5.

El peso *W* de una partícula constituye un ejemplo de fuerza constante. Cuando los cuerpos se mueven en la proximidad de la superficie de la Tierra,

[1] Observemos que el trabajo y el momento de una fuerza tienen iguales dimensiones: ambos son el producto de una fuerza por una longitud. Sin embargo, trabajo y momento son conceptos totalmente diferentes y la unidad particular *joule* sólo deberá utilizarse para describir un trabajo o una energía. El momento de una fuerza deberá siempre expresarse en N · m.

la fuerza de la gravedad terrestre es prácticamente constante ($P_x = 0$, $P_y = 0$ y $P_z = -W$). Por tanto, el trabajo que sobre una partícula efectúa su propio peso será $-W(z_2 - z_1)$. Cuando $z_2 > z_1$, la partícula se mueve hacia arriba (en sentido opuesto a la fuerza de la gravedad) y el trabajo efectuado por ésta es negativo. Cuando $z_2 < z_1$, la partícula se mueve hacia abajo (en el sentido de la fuerza de la gravedad) y el trabajo que ésta efectúa es positivo.

17.2.2 Trabajo efectuado por la fuerza de un resorte lineal sin masa

La fuerza necesaria para estirar un resorte lineal sin masa es directamente proporcional al alargamiento del resorte

$$P = k(\ell - \ell_0) = k\delta \qquad (17\text{-}4)$$

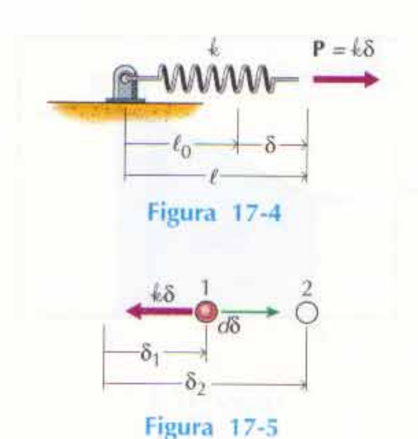


Figura 17-4

Figura 17-5

donde k es una constante llamada *módulo* del resorte y ℓ, ℓ_0 y δ son la longitud actual, la longitud natural y la deformación del resorte a partir de su posición relajada, respectivamente. Cuando la longitud actual es mayor que la natural ($\delta > 0$), el resorte está estirado y la fuerza P es positiva, como se indica en la figura 17-4. Cuando la longitud actual es menor que la natural ($\delta < 0$), el resorte está comprimido y la fuerza P es negativa (la fuerza está, en realidad, comprimiendo el resorte).

Cuando el resorte de la figura 17-4 se une a una partícula, la fuerza que sobre ella se ejerce tiene igual módulo y dirección, pero sentido opuesto, que la que se ejerce sobre el resorte (fig. 17-5). Si la partícula pasa de la posición 1 (donde la deformación del resorte es δ_1) a la posición 2 (donde la deformación del resorte es δ_2), el trabajo efectuado por el resorte sobre la partícula será

$$U_{1\to 2} = \int_{\delta_1}^{\delta_2} k\delta\, d\delta = -\frac{1}{2}k(\delta_2^2 - \delta_1^2) \qquad (17\text{-}5)$$

donde el signo menos se debe a que la fuerza $k\delta$ está dirigida hacia la izquierda de la partícula y el desplazamiento $d\delta$ lo está hacia la derecha. Si $0 < \delta_1 < \delta_2$, el movimiento resultante de la partícula tiene lugar hacia la derecha (opuesto a la fuerza del resorte) y el trabajo efectuado sobre la partícula es negativo. Si $0 < \delta_2 < \delta_1$, la fuerza del resorte y el movimiento están dirigidos hacia la derecha y el trabajo efectuado sobre la partícula es positivo.

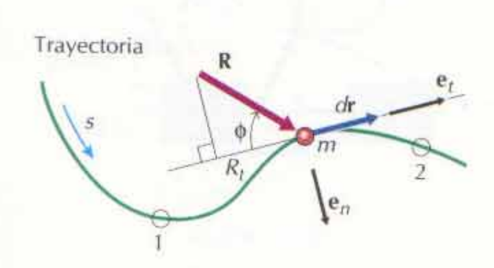


Figura 17-6

17.3 TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS

El teorema de las fuerzas vivas se obtiene integrando la segunda ley de Newton respecto a la posición. Consideremos el punto material de masa m cuyo diagrama de sólido libre es el representado en la figura 17-6. La fuerza $\mathbf{R}$ representa la resultante de todas las fuerzas exteriores que se ejercen sobre el punto. Según la segunda ley de Newton, su componente tangencial es

$$R_t = ma_t = m\frac{dv}{dt} \qquad (17\text{-}6)$$

donde $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t = (ds/dt)\mathbf{e}_t$ y $d\mathbf{r} = ds\,\mathbf{e}_t$. Aplicando la regla de la cadena para la derivación, la ecuación 17-6 puede escribirse en la forma

$$R_t = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds} \tag{17-7}$$

Por último, integrando esta ecuación a lo largo de la trayectoria del punto de 1 a 2 tenemos

$$\int_{s_1}^{s_2} R_t\, ds = m\int_{v_1}^{v_2} v\, dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \tag{17-8}$$

Pero el primer miembro de la ecuación 17-8 no es más que el trabajo total $U_{1\to 2} = \int_{s_1}^{s_2} R_t\, ds$ efectuado por la fuerza resultante **R** durante el movimiento sobre el punto material. Los términos del segundo miembro de la ecuación 17-8 reciben el nombre de energía cinética del punto material $T = \frac{1}{2}mv^2$, que es lo que antiguamente se llamaba *semifuerza viva*. Evidentemente, la unidad de medida de la energía cinética es la misma que la del trabajo: joule (J) o ft · lb.

La ecuación 17-8 expresa el *teorema de las fuerzas vivas:*

$$T_2 - T_1 = U_{1\to 2} \tag{17-9a}$$

que nos dice que *el incremento total de energía cinética de un punto material en un desplazamiento de una posición 1 a otra posición 2 es igual al trabajo efectuado sobre el punto por las fuerzas exteriores durante el desplazamiento.* De otra manera, el teorema de las fuerzas vivas se puede escribir en la forma

$$T_i + U_{i\to f} = T_f \tag{17-9b}$$

que dice que *la energía cinética final de un punto material es igual a la suma de su energía cinética inicial más el trabajo efectuado sobre el punto por las fuerzas exteriores.*

Como la masa m y el cuadrado de la velocidad v^2 son cantidades positivas, la energía cinética de un punto material será siempre positiva. Si es positivo el trabajo efectuado sobre el punto material, la energía cinética final será superior a la inicial ($0 < T_1 < T_2$). Si el trabajo efectuado fuese negativo, la energía cinética final sería inferior a la inicial ($0 < T_2 < T_1$).

La ventaja del método trabajo-energía es que relaciona directamente la celeridad del punto en dos posiciones diferentes de su movimiento con las fuerzas que trabajan durante éste. Si aplicáramos directamente la segunda ley de Newton, se obtendría la aceleración para una posición arbitraria del punto y luego tendríamos que integrarla utilizando los principios de la Cinemática. El método del teorema de las fuerzas vivas combina estos dos pasos en uno.

Las limitaciones de este método estriban en que la ecuación 17-9 es una ecuación escalar de la que sólo puede despejarse una incógnita, la aceleración no se puede calcular directamente y sólo intervienen las fuerzas que trabajan. Sin embargo, estas limitaciones no suelen ser serias. La componente normal de la aceleración es función de la velocidad $a_n = v^2/\rho$ y la velocidad se halla fácilmente utilizando el teorema de las fuerzas vivas. Entonces se puede utilizar la componente normal de la segunda ley de Newton para determinar las fuerzas que se ejercen normalmente a la trayectoria y, en consecuencia, no trabajan.

Por último, para asegurarnos de haber identificado y considerado todas las fuerzas, hay que dibujar el diagrama de sólido libre. Aun cuando en la ecuación del teorema de las fuerzas vivas no intervengan las fuerzas que no trabajan, éstas pueden ser necesarias para cualquier otra cuestión. Siempre será una buena costumbre trazar un diagrama de sólido libre completo.

17.4 SISTEMAS DE PUNTOS MATERIALES

La aplicación del teorema de las fuerzas vivas a un punto material nos da una ecuación escalar. Por tanto, cuando tengamos un grupo de puntos materiales en interacción, podremos aplicar el mencionado teorema a cada uno de ellos y sumar las ecuaciones que se obtengan. Tendremos así una ecuación escalar de la que podremos despejar una incógnita como máximo. A menos que conozcamos los movimientos de la mayoría de los puntos, esta ecuación no nos será muy útil. Una excepción de este hecho, en la que la ecuación es útil, la tenemos cuando los puntos están rígidamente unidos, en cuyo caso podremos utilizar la Cinemática para relacionar sus movimientos.

17.4.1 Dos partículas unidas por un vínculo rígido sin masa

Consideremos las dos partículas representadas en la figura 17-7*a*, que están unidas por un vínculo rígido sin masa. En la figura 17-7*b* podemos ver los diagramas de sólido libre de las partículas, donde $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ representan las resultantes de las fuerzas exteriores que se ejercen sobre dichas partículas; $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$

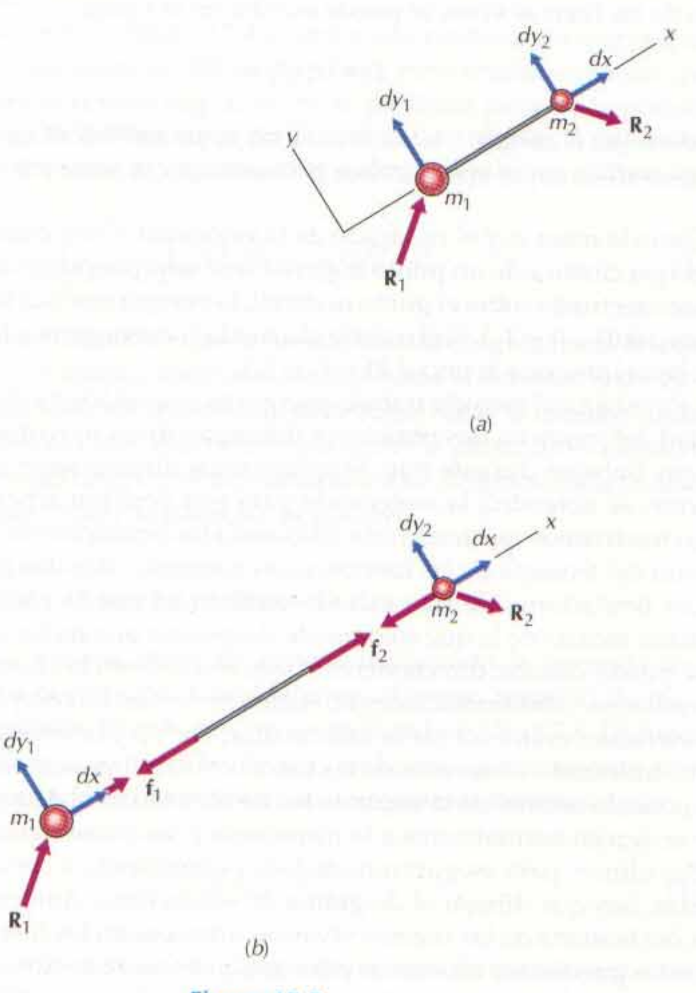


Figura 17-7

representan las fuerzas interiores entre el vínculo y las partículas. Como suponemos despreciable la masa del vínculo, la aplicación de la segunda ley de Newton al diagrama de sólido libre de éste nos da $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{0}$ y $\Sigma\mathbf{M}_G = I_G\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$. Por tanto, suponiendo que sobre el vínculo no se ejercen fuerzas exteriores, las fuerzas $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ estarán soportadas por el vínculo, serán de igual módulo y tendrán sentidos opuestos ($\mathbf{f}_2 = -\mathbf{f}_1$) tal como se indica en la figura 17-7*b*.

Durante un desplazamiento infinitesimal de las partículas, la 1 recorrerá una distancia dx a lo largo del vínculo y otra dy_1 perpendicularmente a él. Como el vínculo es rígido, la partícula 2 recorrerá la misma distancia dx a lo largo del vínculo, pero una distancia dy_2 diferente perpendicularmente a él. Así, el trabajo $[dU_2 = \mathbf{f}_2 \cdot (dx\mathbf{i}) = -\mathbf{f}_1 \cdot (dx\mathbf{i})]$ que el vínculo efectúa sobre la partícula 2 será el opuesto al $[dU_1 = \mathbf{f}_1 \cdot (dx\mathbf{i})]$ que efectúa sobre la partícula 1 durante el desplazamiento infinitesimal. Cuando se suman las ecuaciones que expresan el teorema de las fuerzas vivas aplicado a una y otra partícula, los trabajos efectuados por las fuerzas internas $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ se compensarán en todo instante quedando

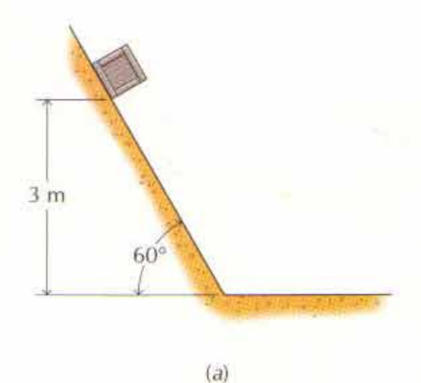
$$\left(\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \int_i^f \mathbf{R}_1 \cdot d\mathbf{r}_1\right) + \left(\frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 + \int_i^f \mathbf{R}_2 \cdot d\mathbf{r}_2\right) = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$$

Es decir, la ecuación 17-9 también será aplicable a la pareja de partículas unidas si interpretamos que T_i y T_f son, respectivamente, las sumas de las energías cinéticas iniciales y de las energías cinéticas finales de las partículas y que $U_{i \to f}$ es el trabajo efectuado sobre ambas partículas por las fuerzas exteriores que sobre ellas se ejercen. Mientras las partículas estén rígidamente unidas, las fuerzas internas entre el vínculo y las partículas no trabajan.

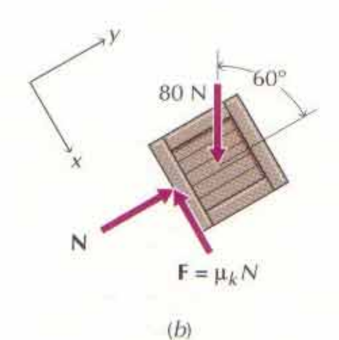
Análogamente, cuando dos cuerpos estén unidos por un hilo flexible e inextensible, el trabajo resultante que la fuerza del hilo efectúa sobre los cuerpos es nulo. Suponiendo despreciable la masa del hilo y que todas las poleas sean pequeñas, sin masa y/o sin rozamiento, las dos fuerzas de los extremos del hilo serán de igual módulo. Como el hilo es inextensible, las componentes, en las direcciones y sentidos de las fuerzas, de los desplazamientos de los extremos serán de igual valor y el trabajo total efectuado por el hilo será nulo.

17.4.2 Sistema cualquiera de partículas en interacción

En el caso general de un sistema cualquiera de partículas en interacción, también podemos sumar las ecuaciones resultantes de aplicar a cada partícula el teorema de las fuerzas vivas. El resultado será el mismo que se expresa en la ecuación 17-9 si se interpreta que T_i y T_f son las sumas de las energías cinéticas iniciales y finales, respectivamente, de todas las partículas que constituyen el sistema y que $U_{i \to f}$ es el trabajo que efectúan sobre las partículas *todas las fuerzas*, tanto *internas como externas*. Aun cuando las fuerzas internas siempre aparecen por parejas de igual módulo y dirección pero de sentidos opuestos, los desplazamientos de sus puntos de aplicación suelen ser diferentes a menos que las partículas estén unidas rígidamente. Por tanto, el trabajo efectuado por todas las fuerzas interiores no tiene por qué ser nulo.



(a)



(b)

Figura 17-8

PROBLEMA EJEMPLO 17.1

Una caja que pesa 80 N se desliza hacia abajo por una rampa según se indica en la figura 17-8*a*. Si se suelta la caja partiendo del reposo a 3 m por encima de la base de la rampa y el coeficiente de rozamiento entre caja y rampa vale $\mu_k = 0{,}20$, determinar la celeridad de la caja cuando llegue al punto más bajo de la rampa.

SOLUCIÓN

En la figura 17-8*b* se ha representado el diagrama de sólido libre de la caja en una posición genérica a lo largo de la rampa. La fuerza normal N no trabaja por ser perpendicular al movimiento. Sin embargo, aun cuando no afecte a la ecuación que da el teorema de las fuerzas vivas, deberá hallarse dicha fuerza para determinar el trabajo que efectúa el rozamiento. Como la caja no se mueve en la dirección y, se despejará fácilmente de la ecuación de la segunda ley de Newton $\Sigma F_y = ma_y = 0$, dando $N = 80 \cos 60° = 40$ N. Por tanto, la fuerza de rozamiento será $F = (0{,}20)(40) = 8{,}00$ N.

Como la caja parte del reposo, su energía cinética inicial es $T_i = 0$. La energía cinética final de la caja es

$$T_f = \frac{1}{2}\frac{80}{9{,}81}v_f^2 = 4{,}077 v_f^2$$

y los trabajos efectuados sobre la caja por las fuerzas normal, gravitatoria y de rozamiento cuando se desliza 3 / sen 60° = 3,464 m por la rampa son

$$(U_{i\to f})_N = 0$$
$$(U_{i\to f})_g = \int_0^{3{,}464} (80 \text{ sen } 60°)\ dx = 240{,}0 \text{ J}$$
$$(U_{i\to f})_F = \int_0^{3{,}464} -1{,}600\ dx = -27{,}7 \text{ J}$$

respectivamente. Aplicando estos valores en la ecuación que da el teorema de las fuerzas vivas se tiene

$$0 + 240{,}0 - 27{,}7 = 4{,}077 v_f^2$$

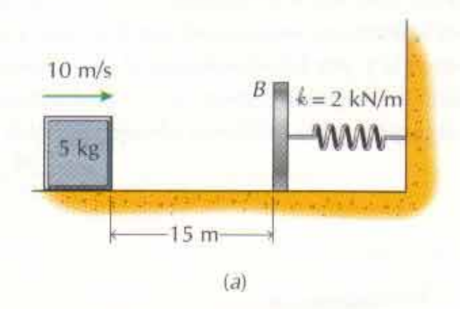
o sea

$$v_f = 7{,}22 \text{ m/s} \qquad \text{Resp.}$$

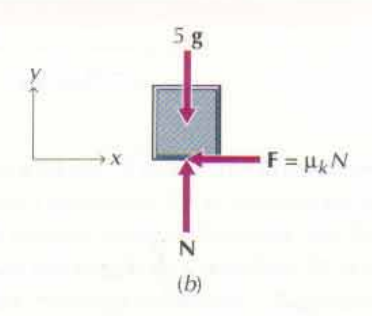
PROBLEMA EJEMPLO 17.2

El bloque de masa 5 kg representado en la figura 17-9*a* se desliza por un suelo horizontal y choca contra el tope *B*. El coeficiente de rozamiento entre bloque y suelo es $\mu_k = 0{,}25$ y la masa del tope es despreciable. (En lo sucesivo, cuando se escriba solamente coeficiente de rozamiento, se referirá al coeficiente de rozamiento *cinético* μ_k.) Si la celeridad del bloque es de 10 m / s cuando se halla a 15 m del tope, determinar

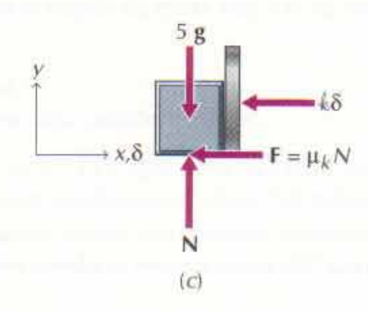
a. La celeridad v_C del bloque en el instante en que choca contra el tope.
b. La deformación máxima $\delta_{máx}$ del muelle debida al movimiento del bloque.



(a)



(b)



(c)

Figura 17-9

SOLUCIÓN

a. En la figura 17-9*b* puede verse el diagrama de sólido libre del bloque antes de entrar en contacto con el tope. Según la segunda ley de Newton,

$$\Sigma F_y = ma_y = 0 \text{ da } N = (5)(9{,}81) = 49{,}05 \text{ N}$$

Luego, la fuerza de rozamiento será $F = (0{,}25)(49{,}05) = 12{,}263$ N.

La energía cinética inicial del bloque es

$$T_i = \frac{1}{2}(5)(10)^2 = 250{,}0 \text{ J}$$

y la energía cinética cuando está a punto de chocar contra el tope es

$$T_f = \frac{1}{2}(5)v_C^2 = 2{,}500v_C^2$$

El trabajo efectuado por el rozamiento sobre el bloque cuando éste se desliza sobre el suelo es

$$(U_{i\to f})_F = \int_0^{15} -12{,}263\; dx = -183{,}95 \text{ J}$$

y como la fuerza normal es perpendicular al movimiento, no efectúa trabajo. Por tanto, según el teorema de las fuerzas vivas, se tiene

$$250{,}0 - 183{,}95 = 2{,}500v_C^2 \qquad \text{o sea} \qquad v_C = 5{,}14 \text{ m/s} \qquad \text{Resp.}$$

b. Una vez en contacto, bloque y tope se moverán juntos. En la figura 17-9*c* puede verse el correspondiente diagrama de sólido libre del sistema. Las fuerzas normal y de rozamiento siguen siendo $N = 49{,}05$ N y $F = \mu_k N = 12{,}263$ N, respectivamente. La velocidad inicial del bloque en esta fase del movimiento es $v_C = 5{,}14$ m/s y la energía cinética inicial será

$$T_i = \frac{1}{2}(5)(5{,}14)^2 = 66{,}05 \text{ J}$$

En el punto de máxima deformación del muelle, la velocidad del bloque es nula y por tanto, la energía cinética final lo será también ($T_f = 0$). El trabajo que sobre el bloque efectúan el rozamiento y el muelle cuando aquél se desliza sobre el suelo una distancia adicional $\delta_{máx}$ será

$$(U_{i\to f})_F = \int_0^{\delta_{max}} -12{,}263\; dx = -12{,}263\; \delta_{max}$$

$$(U_{i\to f})_s = \int_0^{\delta_{max}} -2000\; \delta\, d\delta = -1000\; \delta^2_{max}$$

El teorema de las fuerzas vivas da entonces

$$66{,}05 - 12{,}26\; \delta_{max} - 1000\; \delta^2_{max} = 0 \text{ de donde } \delta_{max} = 0{,}251 \text{ m} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 17.3

Dos bloques están unidos por una cuerda que pasa por una pequeña polea exenta de rozamientos (fig. 17-10*a*). Las masas de la cuerda y la polea son despreciables. El coeficiente de rozamiento entre el bloque A y la superficie horizontal es $\mu_k = 0{,}4$. Si se suelta el sistema partiendo del reposo, determinar la celeridad de los dos bloques cuando el A haya recorrido 1,8 m hacia la derecha.

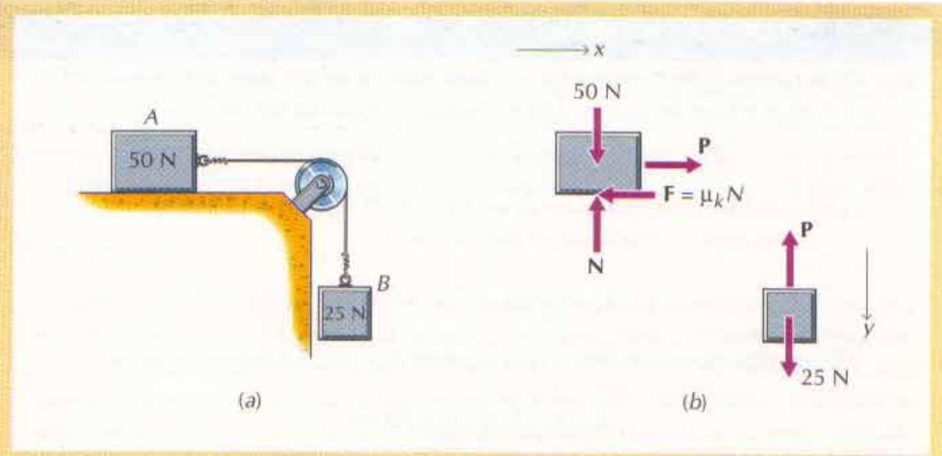


Figura 17-10

SOLUCIÓN

En la figura 17-10b pueden verse los diagramas de sólido libre de los bloques. Aplicando al bloque A la segunda ley de Newton para las componentes y, se tiene $N = 50$ N. Entonces, la fuerza de rozamiento aplicada al bloque A resulta ser $F = (0{,}4)(50) = 20$ N.

El trabajo que el rozamiento efectúa sobre el bloque A durante su movimiento es

$$(U_{i\to f})_F = \int_0^{1,8} -20\,dx = -36 \text{ J}$$

Cuando el bloque A recorre 1,8 m hacia la derecha, el bloque B desciende 1,8 m, por lo que el trabajo que la gravedad efectúa sobre el bloque B será

$$(U_{i\to f})_g = \int_0^{1,8} 25\,dy = 45{,}00 \text{ J}$$

Ni la fuerza normal N ni el peso del bloque A efectúan trabajo ya que actúan perpendicularmente al movimiento. Por último, considerando como sistema el conjunto de los dos bloques, el trabajo que efectúan las fuerzas **P** se anulará por ser la cuerda inextensible.

Los dos bloques parten del reposo, por lo que la energía cinética inicial del sistema será nula ($T_i = 0$). En el instante final, las celeridades de los dos bloques son iguales y la energía cinética de la pareja de bloques será

$$T_f = \frac{1}{2}\,\frac{50}{9{,}81}v_f^2 + \frac{1}{2}\,\frac{25}{9{,}81}v_f^2 = 3{,}823v_f^2$$

Aplicando todos esos valores en la ecuación que traduce el teorema de las fuerzas vivas, se tiene

$$0 - 36{,}00 + 45{,}00 = 3{,}823v_f^2$$

o sea

$$v_f = 1{,}534 \text{ m/s}$$ Resp.

PROBLEMAS

17-1* Un camión que pesa 37,5 kN va por una carretera a 100 km/h cuando el conductor ve, de pronto, una res parada en su camino a 60 m delante de él (fig. P17-1). Si el conductor tarda 0,4 s en pisar el freno y el coeficiente de rozamiento entre ruedas y calzada vale 0,5.

a. ¿Puede evitar el atropello sin desviarse a un lado?
b. ¿En qué posición relativa a la res quedaría detenido el camión?
c. Si el conductor debiera desviarse a un lado, determinar la celeridad que llevaría el camión al pasar junto a la res.

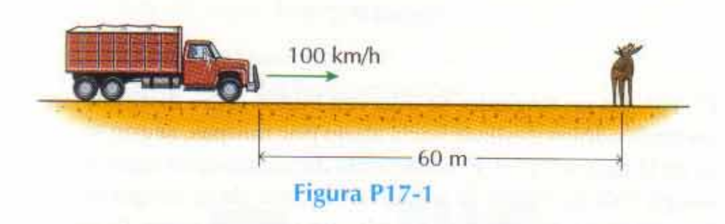


Figura P17-1

17-2 Un automóvil de masa 1200 kg recorre una carretera de montaña a 90 km/h cuando se produce un desprendimiento 60 m delante de él (fig. P17-2). La carretera es horizontal y el coeficiente de rozamiento entre ella y los neumáticos vale 0,5. Si el conductor tarda 0,4 s en pisar el freno,

a. ¿Podrá evitar estrellarse contra las rocas desprendidas, sin desviarse a un lado?
b. Si debe desviarse a un lado, determinar la celeridad que llevará el auto al pasar junto a las rocas desprendidas.

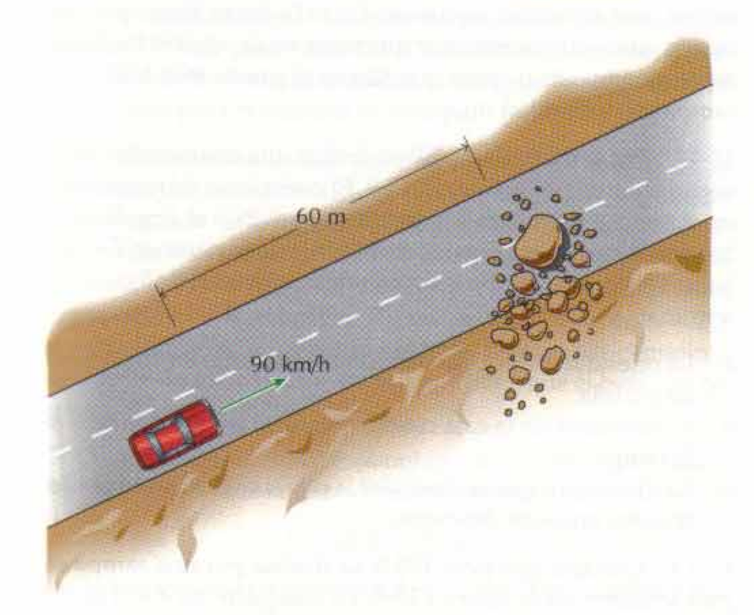


Figura P17-2

17-3* Un Boeing 747 totalmente cargado tiene un peso en el despegue de 3300 kN y sus motores desarrollan un empuje total de 1000 kN. Si se desprecian la resistencia del aire y el rozamiento entre los neumáticos y la pista, determinar qué longitud ha de tener ésta para que la celeridad en el despegue sea de 225 km/h (fig. P17-3).

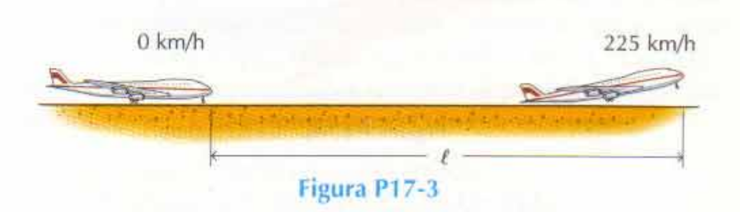


Figura P17-3

17-4* Un tren se mueve a 30 km/h cuando se le desprende el último vagón por rotura del enganche. En el instante en que se desprende el vagón, se aplican automáticamente los frenos, trabando todas las ruedas del vagón desprendido. Si el coeficiente de rozamiento entre ruedas y raíles vale 0,2, determinar la distancia que recorrerá el vagón de masa 180 000 kg antes de quedar detenido

a. Si la vía es horizontal.
b. Si la vía desciende con una pendiente de 5°.

17-5 Se catapulta un avión F15, que pesa 125 kN, desde la cubierta de un portaaviones mediante un ariete hidráulico (fig. P17-5). Determinar la fuerza media que ejerce el ariete sobre el avión si en 90 m lo acelera desde el reposo hasta 257 km/h.

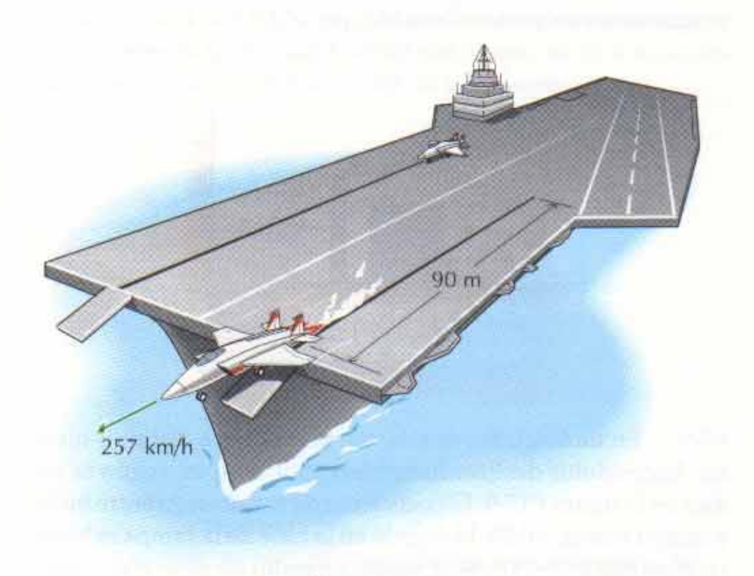


Figura P17-5

17-6* Una bala de masa 10 g lleva una velocidad horizontal de 400 m/s cuando incide sobre un blanco de madera de 25 mm de grosor. Aun cuando el blanco la frena, lo atraviesa y cae en un estanque a 50 m (fig. P17-6). Determinar la fuerza media que el blanco ejerce sobre la bala.

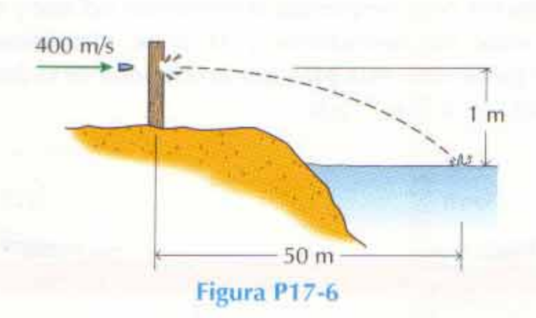


Figura P17-6

17-7 Cuando el avión de 125 kN de peso, citado en el problema 17-5, regresa al portaaviones, lo detiene una combinación de rozamiento y cable que le aplica una fuerza semejante a la de un resorte. Si la celeridad de aterrizaje del avión es de 225 km/h y el coeficiente de rozamiento entre neumáticos y pista vale 0,6, determinar la constante elástica k necesaria para detener al avión en una distancia de 120 m

17-8* Una bala de masa 10 g lleva una velocidad horizontal de 400 m/s cuando incide en un bloque de madera de 2,5 kg (fig. P17-8) incrustándose en él. El bloque se halla inicialmente en reposo, la masa del tope B es despreciable y el suelo es liso. En el movimiento posterior al impacto, la compresión máxima del resorte resulta ser de 73 mm. Determinar

a. El tanto por ciento de la energía cinética inicial de la bala que se pierde en el impacto.
b. La velocidad de bloque y bala en el instante en que el bloque entra en contacto con el tope.

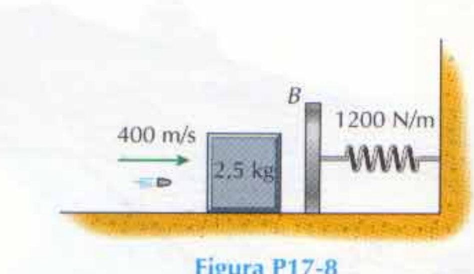


Figura P17-8

17-9 En un tinglado, se mueven bultos entre distintos niveles haciéndolos deslizar hacia abajo por rampas, según se indica en la figura P17-9. El coeficiente de rozamiento entre bulto y rampa vale $\mu_k = 0,25$. El ángulo en la base de la rampa es brusco pero liso y $\theta = 30°$. Si se suelta un bulto de peso 100 N partiendo del reposo en $\ell = 3$ m, determinar

a. La celeridad del bulto cuando llega al punto más bajo de la rampa.
b. La distancia d que recorrerá el bulto sobre la superficie horizontal antes de detenerse.

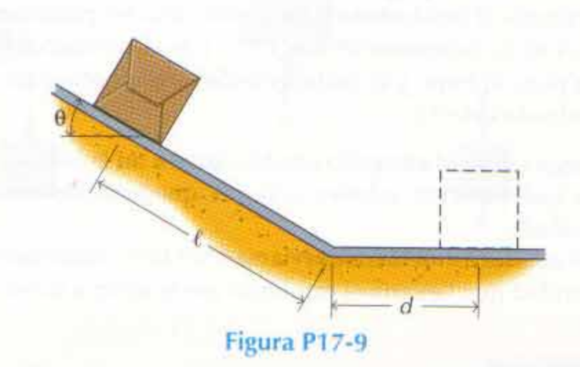


Figura P17-9

17-10* En un tinglado, se mueven bultos entre distintos niveles haciéndolos deslizar hacia abajo por rampas, según se indica en la figura P17-9. El coeficiente de rozamiento entre bulto y rampa vale $\mu_k = 0,20$. El ángulo en la base de la rampa es brusco pero liso y $\theta = 30°$. Si se suelta un bulto de masa 10 kg partiendo del reposo en $\ell = 3$ m con una velocidad inicial de 5 m/s hacia abajo de la rampa, determinar

a. La celeridad del bulto cuando llega al punto más bajo de la rampa.
b. La distancia d que recorrerá el bulto sobre la superficie horizontal antes de detenerse.

17-11 En un tinglado, se mueven bultos entre distintos niveles haciéndolos deslizar hacia abajo por rampas, según se indica en la figura P17-9. Si un bulto de peso 150 N parte en $\ell = 7,5$ m con una celeridad inicial de 4,5 m/s hacia abajo por una rampa de $\theta = 10°$, determinar qué valor ha de tener el coeficiente de rozamiento μ_k para que llegue al punto más bajo de la rampa con velocidad nula.

17-12* Por una rampa de 30° se desliza una caja de masa 10 kg según se indica en la figura P17-9. El coeficiente de rozamiento en el suelo y entre caja y rampa es $\mu_k = 0,25$ y el ángulo en la base de la rampa es brusco pero liso. Si la caja parte en $\ell = 3$ m, hacia arriba de la rampa con una celeridad inicial de 5 m/s, determinar

a. La celeridad de la caja cuando vuelva a estar en su posición de partida.
b. La celeridad de la caja cuando llegue al punto más bajo de la rampa.
c. La distancia d que se deslizará la caja sobre la superficie horizontal antes de detenerse.

17-13 Una caja que pesa 100 N se desliza por una rampa según se indica en la figura P17-9. La caja parte en $\ell = 3$ m con una celeridad de 4,5 m/s hacia arriba de la rampa y el ángulo en la base de ésta es brusco pero liso. Si los coeficientes de ro-

zamiento estático y cinético valen 0,40 y 0,30, respectivamente, determinar

a. El mínimo ángulo θ para el cual la caja volverá a su posición inicial.
b. La celeridad de la caja cuando llegue al punto más bajo de la rampa.
c. La distancia d que se deslizará la caja sobre la superficie horizontal antes de detenerse.

17-14* Cuando los bultos del problema 17-10 salgan de la rampa con demasiada velocidad, será necesario un tope como el representado en la figura P17-14 para pararlos. El coeficiente de rozamiento entre bulto y suelo es $\mu_k = 0,25$, la constante del resorte es $k = 1750$ N/m y la masa del tope B es despreciable. Si la celeridad de un bulto de 2,5 kg es $v_0 = 8$ m/s cuando se halle a $\ell = 3$ m del tope, determinar

a. El máximo acortamiento δ del resorte.
b. La posición final del bulto en reposo.

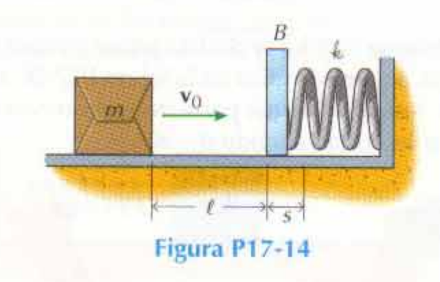


Figura P17-14

17-15 Cuando los bultos del problema 17-9 salgan de la rampa con demasiada velocidad, será necesario un tope como el representado en la figura P17-14 para pararlos. La constante del resorte es $k = 100$ N/m y la masa del tope B es despreciable. Si los coeficientes de rozamiento estático y cinético de un bulto de 75 N de peso valen 0,6 y 0,4, respectivamente, determinar la máxima celeridad inicial v_0 que puede tener el bulto en $\ell = 1,5$ m para no rebotar en el tope.

17-16* Cuando los bultos del problema 17-10 salgan de la rampa con demasiada velocidad, será necesario un tope como el representado en la figura P17-14 para pararlos. El coeficiente de rozamiento cinético entre bulto y suelo es $\mu_k = 0,2$, la constante del resorte es $k = 250$ N/m y la masa del tope B es despreciable. Si la celeridad de un bulto de 5 kg es $v_0 = 3,5$ m/s cuando se halla a $\ell = 3$ m del tope, determinar el mínimo coeficiente de rozamiento estático que haga que el bulto no rebote en el tope.

17-17 Un punto material está unido a un resorte alineal (suavizante) para el cual la relación entre fuerza y deformación es

$$F = 60\ \delta - 267\ \delta$$

donde F se expresa en newton y δ en metros. Determinar el trabajo que el resorte efectúa sobre el punto cuando su alargamiento pasa de $\delta = 25$ mm hasta $\delta = 62,5$ mm.

17-18* Un punto material está unido a un resorte alineal (endurecedor) para el cual la relación entre fuerza y deformación es

$$F = 1200\,(\ \delta + 10\ \delta^2)$$

donde F se expresa en newton y δ en metros. Determinar el trabajo que el resorte efectúa sobre el punto cuando su alargamiento pasa de $\delta = 150$ mm a $\delta = 50$ mm.

17-19 La presión en el cuerpo de bomba cilíndrico de la figura P17-19 es inversamente proporcional al volumen del gas (p = constante / volumen). Inicialmente, el émbolo está en reposo, $x = 15$ cm y $p = 2p_{atm}$ donde $p_{atm} = 1,013 \times 10^5$ Pa. Si se mantiene constante la presión del aire en la superficie exterior del émbolo ($= p_{atm}$), determinar para el ulterior movimiento

a. La celeridad máxima $v_{máx}$ del émbolo.
b. El desplazamiento máximo $x_{máx}$ del émbolo.
c. La mínima fuerza constante F que hay que aplicar al émbolo para limitar su movimiento de manera que $x_{máx} < 45$ cm.

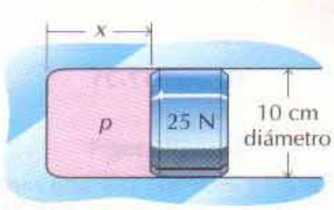


Figura P17-19

17-20* Un bloque de 2 kg se desliza por un piso exento de rozamientos y choca contra los topes representados en la figura P17-20. Los dos resortes lineales son iguales y de constantes recuperadoras $k = 1,5$ kN/m, pudiéndose despreciar las masas de los topes. Si la celeridad inicial del bloque es de 4 m/s, determinar la máxima deformación de los resortes.

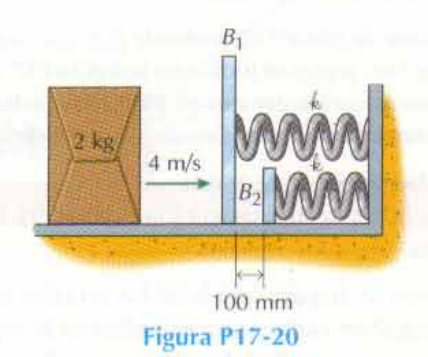


Figura P17-20

17-21 Una caja de peso 25 N asciende por una rampa inclinada 25° con una celeridad inicial de 13,5 m/s según se indica en

la figura P17-21. Si el coeficiente de rozamiento entre rampa y caja es $\mu_k = 0{,}3$ y $\ell = 3$ m, determinar

a. La celeridad de la caja cuando alcance la parte alta de la rampa.
b. La máxima altura h que alcanzará la caja.
c. La distancia d a la cual la caja chocará contra la superficie horizontal.

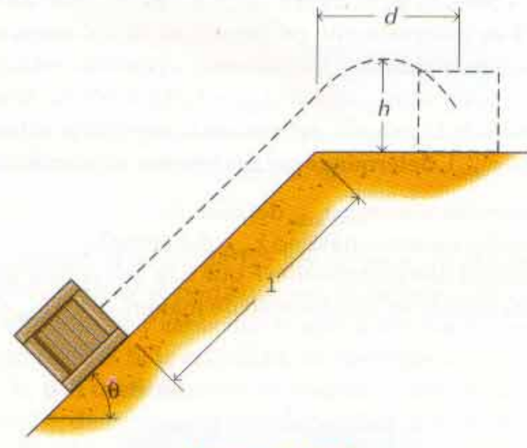


Figura P17-21

17-22* Una caja de 5 kg asciende por una rampa inclinada 25° con $\ell = 5$ m, según se indica en la figura P17-21. Si el coeficiente de rozamiento entre rampa y caja es $\mu_k = 0{,}5$, determinar la celeridad inicial v_0 para la cual la caja alcanzará el ángulo de arriba con celeridad nula.

17-23 Una caja de peso 50 N asciende por una rampa inclinada 30° con $\ell = 4{,}0$ m, según se indica en la figura P17-21. Si el coeficiente de rozamiento entre rampa y caja es $\mu_k = 0{,}3$ y la caja choca contra la superficie horizontal en $d = 1{,}5$ m, determinar

a. La celeridad inicial v_0 de la caja.
b. La máxima altura h que alcanza la caja.

17-24* Una caja de masa 7 kg asciende por una rampa inclinada 60° con $\ell = 3$ m, según se indica en la figura P17-21. Si el coeficiente de rozamiento entre rampa y caja es $\mu_k = 0{,}3$ y la máxima altura alcanzada por la caja es de 360 mm, determinar

a. La celeridad inicial v_0 de la caja.
b. La distancia d a la cual chocará la caja contra la superficie horizontal.

17-25 Cuando se dispara una bala con un rifle, la presión en el interior del cañón varía según se indica en la figura P17-25. El cañón tiene una longitud de 60 cm y un diámetro de 6,25 mm. Si la bala pesa 0,125 N y las fuerzas de rozamiento son despreciables frente a la fuerza del gas, estimar la velocidad inicial (con la que la bala sale por la boca del cañón).

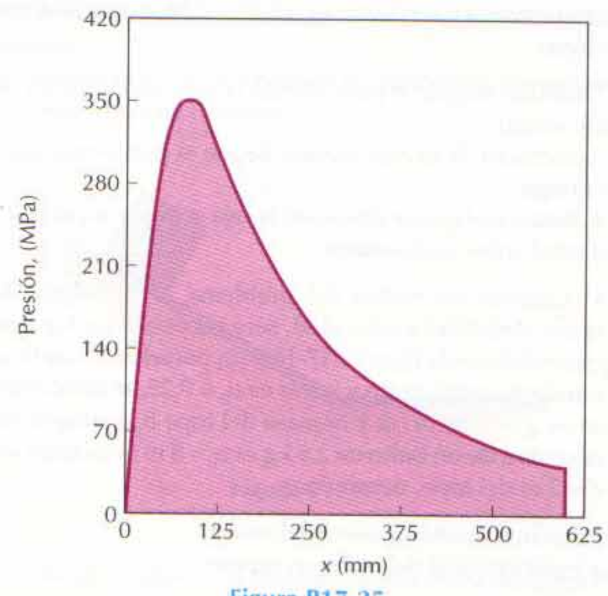


Figura P17-25

17-26* Un bloque de 5 kg se desliza por el interior de un canjilón cilíndrico, según se indica en la figura P17-26. El radio del cilindro es de 3 m. Si el bloque parte del reposo cuando $\theta = 30°$, determinar su celeridad cuando $\theta = 90°$.

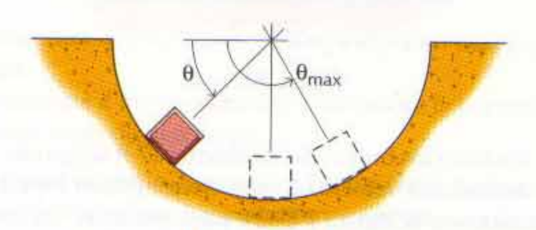


Figura P17-26

17-27 Los dos bloques representados en la figura P17-27 están unidos mediante un hilo inextensible y sin peso. Se sueltan,

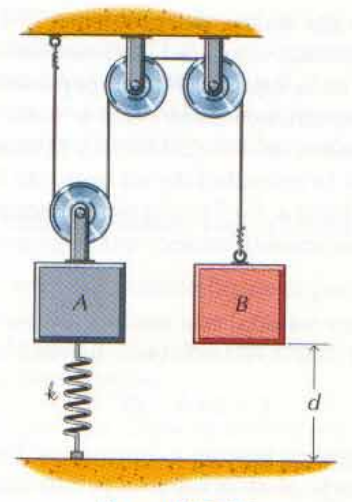


Figura P17-27

partiendo del reposo, siendo $d = 45$ cm. Sus pesos son $W_A = 25$ N y $W_B = 50$ N y el resorte ($k = 333$ N/m) se halla indeformado en la posición inicial. Determinar qué velocidad lleva el bloque B cuando alcanza el suelo

17-28* Los dos bloques representados en la figura P17-27 están unidos mediante un hilo inextensible y sin peso. Se sueltan, partiendo del reposo, siendo $d = 500$ mm. Las masas de los bloques son $m_A = 6$ kg y $m_B = 4$ kg y el resorte está indeformado en la posición inicial. Determinar el mínimo valor que ha de tener la constante del resorte para que el bloque B no choque contra el suelo en el ulterior movimiento.

17-29 Los dos bloques representados en la figura P17-29 están unidos mediante un hilo inextensible y sin peso. Se sueltan, partiendo del reposo, cuando el resorte está indeformado. Los coeficientes de rozamiento estático y dinámico valen 0,2 y 0,1, respectivamente. Para el ulterior movimiento, determinar

a. La máxima velocidad de los bloques y el alargamiento que, en esa condición, sufre el resorte.
b. La máxima caída del bloque de 25 N.
c. Si rebotarán los bloques en la posición del apartado *b*.

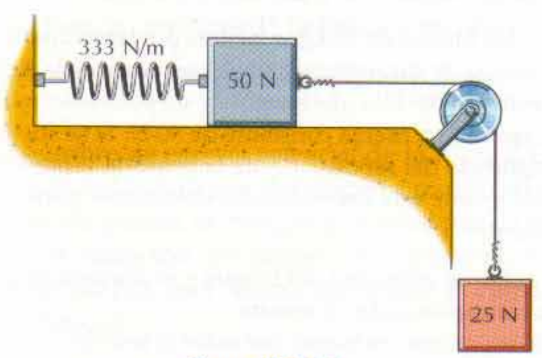


Figura P17-29

17-30* Los dos bloques representados en la figura P17-30 están unidos mediante un hilo inextensible y sin peso. Se sueltan, partiendo del reposo, cuando el resorte está indeformado. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético valen 0,3 y 0,2, respectivamente. Para el ulterior movimiento, determinar.

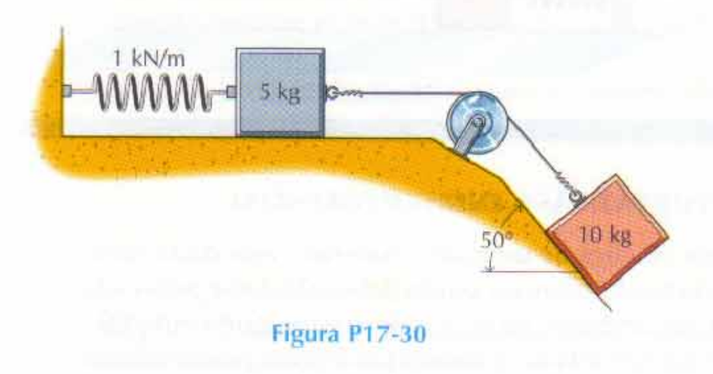


Figura P17-30

a. La máxima velocidad de los bloques y el alargamiento que, en esa condición, sufre el resorte.
b. La máxima distancia que recorrerá el bloque de 10 kg, hacia abajo, por el plano inclinado.
c. Si rebotarán los bloques en la posición del apartado *b*.

17-31 Los dos bloques representados en la figura P17-31 están unidos mediante un hilo inextensible y sin peso. El coeficiente de rozamiento entre el bloque de 50 N y el suelo es $\mu_k = 0{,}6$. Si se sueltan los bloques partiendo del reposo cuando el resorte está alargado 375 mm, determinar, para el ulterior movimiento, la máxima velocidad de los bloques y el alargamiento que, en esa condición, sufre el resorte.

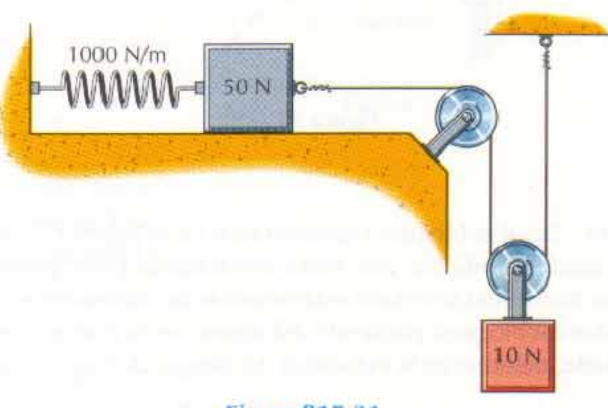


Figura P17-31

17-32* Los dos bloques representados en la figura P17-32 están unidos mediante un hilo inextensible y sin peso. Se sueltan, partiendo del reposo, en la posición representada, en la que el resorte está alargado 150 mm. Rozamientos despreciables. Para el ulterior movimiento, determinar la máxima distancia sobre el suelo a la que ascenderá el bloque de 2 kg.

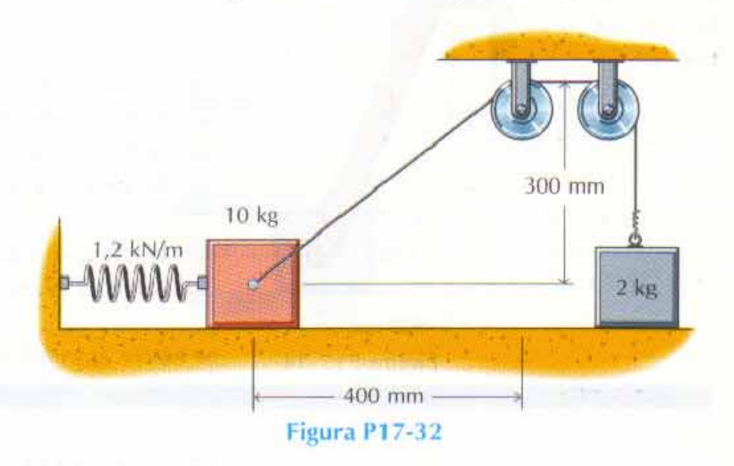


Figura P17-32

17-33 Los dos bloques representados en la figura P17-33 están unidos mediante un hilo inextensible y sin peso. La superficie horizontal y el poste vertical carecen de rozamiento. En la posición representada, el bloque de 10 N lleva una velocidad

de 1,5 m / s hacia la derecha. Determinar, para el ulterior movimiento, la máxima distancia a la que ascenderá, desde su posición inicial, el bloque de 25 N.

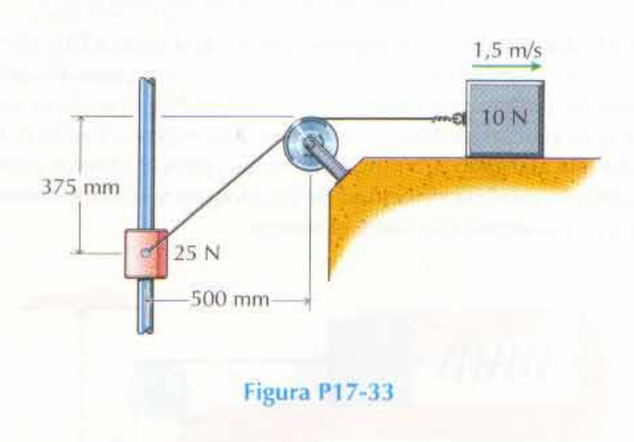


Figura P17-33

17-34 Los dos bloques representados en la figura P17-34 están unidos mediante una barra inextensible y sin peso. Las guías horizontal y vertical están exentas de rozamientos. Si se sueltan los bloques, partiendo del reposo, en la posición representada, determinar la velocidad del bloque de 3 kg cuando:

a. Esté al mismo nivel que el bloque de 2 kg.
b. Esté 150 mm por debajo del bloque de 2 kg.

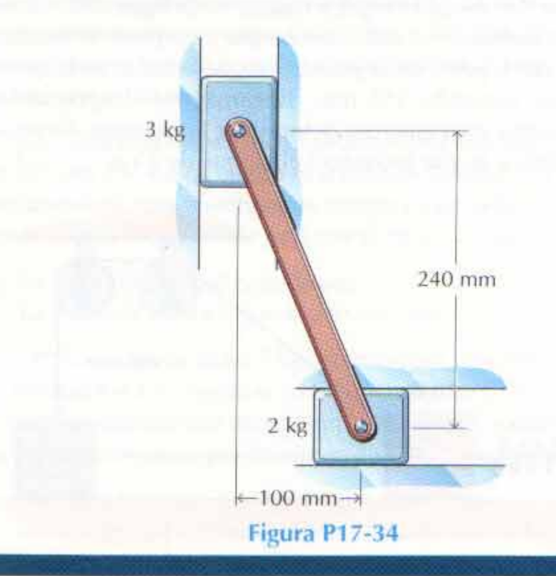


Figura P17-34

17-35 Un bloque de 15 N se desliza por una guía vertical sin rozamiento, según se indica en la figura P17-35. Al extremo del hilo inextensible y sin peso amarrado al bloque, se aplica una fuerza de 60 N. Si se suelta el bloque, partiendo del reposo, cuando $d = 80$ cm, determinar la velocidad del bloque cuando $d = 45$ cm.

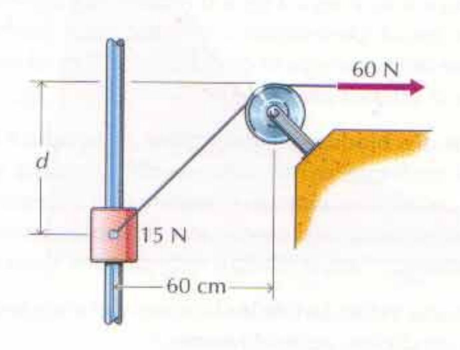


Figura P17-35

17-36* Un bloque de 10 kg se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamientos, según se indica en la figura P17-36. Al extremo del hilo inextensible y sin peso amarrado al bloque se aplica una fuerza constante de 50 N. Si se suelta el bloque, partiendo del reposo, desde la posición representada en la cual el resorte está indeformado, determinar para el ulterior movimiento

a. La máxima velocidad del bloque y el alargamiento que, en esa condición, sufre el resorte.
b. El alargamiento máximo que sufre el resorte.

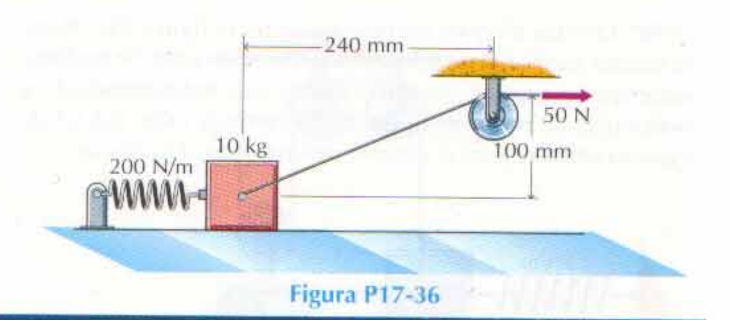


Figura P17-36

17.5 FUERZAS CONSERVATIVAS Y ENERGÍA POTENCIAL

Aun cuando la energía cinética de un punto material viene dada siempre por $T = \frac{1}{2}mv^2$, el trabajo efectuado sobre un punto debe calcularse para cada fuerza que sobre él se ejerza. Sin embargo, en el caso de una categoría especial de fuerzas, llamadas fuerzas conservativas, el trabajo también se puede calcular en un

sentido general, simplificando considerablemente los cálculos que comporta el teorema de las fuerzas vivas. Para estas fuerzas conservativas, el trabajo efectuado sobre un punto material se calcula a partir de una función energía potencial que sólo depende de la posición del punto.

17.5.1 Energía potencial de una fuerza constante

La fuerza constante constituye un ejemplo trivial de fuerza para la cual el trabajo efectuado se puede sustituir por una función energía potencial. Consideremos una fuerza constante **P** aplicada al punto material representado en la figura 17-11. Tomaremos el sistema de coordenadas con el eje x dirigido en la dirección y sentido de la fuerza. Entonces, el trabajo efectuado por la fuerza P cuando el punto pasa de la posición 1 a la 2 es

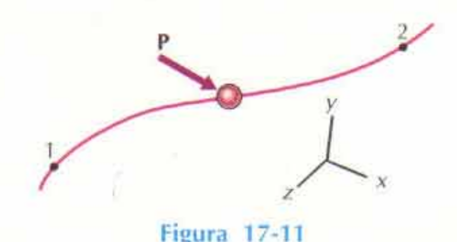


Figura 17-11

$$\begin{aligned} U_{1\to 2} &= \int_1^2 \mathbf{P}\cdot d\mathbf{r} = \int_{x_1}^{x_2} P\,dx = P\int_{x_1}^{x_2} dx \\ &= Px_2 - Px_1 \end{aligned} \tag{17-10}$$

La integral tiene siempre el mismo valor, independientemente de cuál sea el camino seguido por el punto. Por tanto, el trabajo efectuado por la fuerza **P** se obtiene restando el valor de Px correspondiente a la posición inicial (posición 1) del valor de Px correspondiente a la posición final (posición 2).

Para la fuerza constante **P**, la función escalar[1]

$$V_P = -Px \tag{17-11}$$

recibe el nombre de *energía potencial* de la fuerza. El valor de la energía potencial depende de la situación del origen a partir del cual se mide x. Para una posición dada del punto, la energía potencial puede ser positiva, negativa o nula, según sea la situación del origen. No obstante, el trabajo efectuado sobre el punto material por una fuerza constante **P** viene dado por la diferencia de energía potencial

$$U_{1\to 2} = (V_P)_1 - (V_P)_2$$

y esta diferencia es la misma independientemente de cual sea la situación del punto a partir del cual se mida x. La situación a la que corresponde una energía potencial nula se denomina punto de referencia o cero de potencial. El punto de referencia suele tomarse de manera que haga nula la energía potencial inicial o la final.

La unidad de medida para la energía potencial es la misma que para el trabajo o la energía cinética: el joule (J) en el sistema SI y el ft · lb en el U.S. Customary System.

En función de la energía potencial, pues, el teorema de las fuerzas vivas se traduce en

$$T_1 + (V_P)_1 - (V_P)_2 + \tilde{U}_{1\to 2} = T_2$$

[1] La elección $V_p = -Px$ en vez de $V_p = Px$ es arbitraria. El signo menos se incluye para que T_1 y $(V_p)_1$ tengan el mismo signo en la ecuación 17-12.

o sea

$$T_1 + (V_P)_1 + \tilde{U}_{1\to 2} = T_2 + (V_P)_2 \qquad \text{(17-12)}$$

donde $\tilde{U}_{1\to 2}$ es el trabajo efectuado sobre el punto material por las fuerzas que no son la **P**.

17.5.2 Energía potencial gravitatoria (g constante)

La fuerza de gravedad que se ejerce sobre los cuerpos próximos a la superficie terrestre puede considerarse constante. Por tanto, la fuerza de gravedad que actúe sobre un punto material no es sino un ejemplo particular de fuerza constante y el trabajo que la fuerza de gravedad efectúa sobre un punto material podrá calcularse mediante una función energía potencial

$$U_{1\to 2} = (V_g)_1 - (V_g)_2$$

donde

$$V_g = mgh = Wh \qquad \text{(17-13)}$$

y h es la altura a la que está el punto material.[1] Por tanto, el trabajo efectuado por las fuerzas gravitatorias se puede incluir en el teorema de las fuerzas vivas en la forma

$$T_1 + (V_g)_1 + \tilde{U}_{1\to 2} = T_2 + (V_g)_2 \qquad \text{(17-14)}$$

donde $\tilde{U}_{1\to 2}$ es el trabajo que las fuerzas distintas de la gravitatoria actúan sobre el punto material.

La elección del punto de referencia (altura a la cual es nula la energía potencial gravitatoria) es arbitraria. Aun cuando a menudo se toma la superficie terrestre, también suele tomarse la altura inicial o final a la que se encuentre el punto.

17.5.3 Energía potencial gravitatoria (fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia)

Cuando los puntos materiales se muevan de tal manera que las alturas varíen mucho, la fuerza gravitatoria $\mathbf{W} = -(GMm/r^2)\mathbf{e}_r$ ya no puede aproximarse a una constante. A menudo, el valor de GM se pone en otra forma teniendo en cuenta que el peso de un cuerpo es $W = mg$ en la superficie terrestre. Comparando estas dos expresiones del peso tenemos $GM = gR^2$, donde R es el radio de la Tierra. Entonces, si se expresa el desplazamiento en coordenadas cilíndricas,

$$d\mathbf{r} = dr\ \mathbf{e}_r + r\ d\theta\ \mathbf{e}_\theta + dz\ \mathbf{e}_z$$

el trabajo efectuado por la gravedad será

$$\begin{aligned} U_{1\to 2} &= \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{W} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{mgR^2}{r^2}\, dr = \left[\frac{mgR^2}{r}\right]_{r_1}^{r_2} \\ &= \frac{mgR^2}{r_2} - \frac{mgR^2}{r_1} \end{aligned} \qquad \text{(17-15)}$$

---

[1] La energía potencial gravitatoria es $+mgh$ ya que la altura a que se halla el punto aumenta en sentido opuesto al de la fuerza gravitatoria. En el apartado anterior, la distancia x aumentaba en el sentido de la fuerza **P** y por ello la energía potencial era $-Px$.

El trabajo que efectúa la fuerza gravitatoria es, pues, independiente del camino seguido y sólo depende de la posición del punto al principio y al final del movimiento. La energía potencial gravitatoria se define entonces en la forma

$$V_g = -\frac{mgR^2}{r} = -\frac{GMm}{r} \tag{17-16}$$

y el trabajo efectuado por la fuerza gravitatoria es

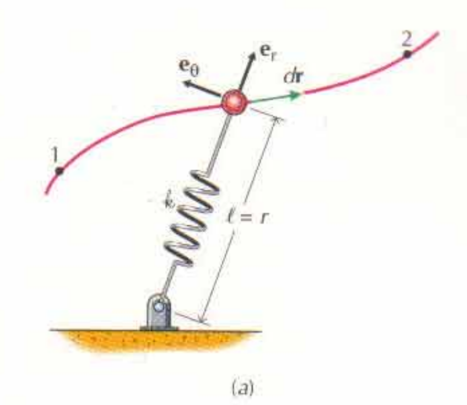
$$U_{1\to 2} = (V_g)_1 - (V_g)_2$$

Salvo en lo que respecta a la definición de la función energía potencial, el teorema de las fuerzas vivas se traduce también en este caso en la ecuación 17-14.

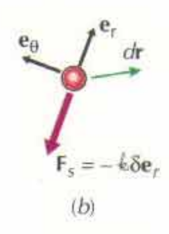
Observemos que el punto de referencia de la energía potencial gravitatoria definido por la ecuación 17-16 se encuentra en $r = \infty$ y que V_g es negativa para $r < \infty$. Desde luego, a la energía potencial se le puede sumar siempre una constante,[1] dando así un punto de referencia distinto, si se quiere.

17.5.4 Energía potencial de la fuerza elástica de un resorte lineal

Consideremos ahora un punto material unido a un resorte lineal en la forma que se indica en la figura 17-12*a*. La fuerza que el resorte ejerce sobre el punto es $\mathbf{F}_s = -k\delta\mathbf{e}_r$ y está representada en la figura 17-12*b*. Por tanto, cuando el resorte esté estirado, δ será positiva y el resorte tira del punto en sentido opuesto al de $\mathbf{e}_r$. En cambio, cuando el resorte esté comprimido, δ será negativa y el resorte empujará en el mismo sentido de $\mathbf{e}_r$.



(a)



(b)

Figura 17-12

Expresando el desplazamiento en coordenadas cilíndricas, el trabajo que la fuerza del resorte $\mathbf{F}_s$ efectúa sobre el punto es

$$U_{1\to 2} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F}_s \cdot dr = -\int_{r_1}^{r_2} k\delta\, dr$$

Pero la deformación del resorte es la diferencia entre su longitud actual y su longitud natural (no deformado) $\delta = \ell - \ell_0 = r - \ell_0$ con lo que $d\delta = dr$. Así pues, el trabajo será

$$\begin{aligned} U_{1\to 2} &= -\int_{\delta_1}^{\delta_2} k\delta\, d\delta = -\left[\frac{1}{2}k\delta^2\right]_{\delta_1}^{\delta_2} \\ &= -\frac{1}{2}k\,\delta_2^2 + \frac{1}{2}k\delta_1^2 \end{aligned} \tag{17-17}$$

que vuelve a ser independiente de la trayectoria del punto y sólo depende del alargamiento del resorte en las posiciones inicial y final. La energía potencial de la fuerza del resorte se define entonces en la forma[2]

$$V_s = \frac{1}{2}k\delta^2 \tag{17-18}$$

[1] Importa distinguir entre sumar una constante a la función energía potencial y sumar una constante al radio r. La forma correcta de fijar el cero de energía potencial en la superficie terrestre es $V_g = mgR - mgR^2/r$ (y no $-mgR^2/h$) donde $h = r - R$ es la altura sobre la superficie terrestre.

[2] Notemos que lo que está elevado al cuadrado es la *deformación* del resorte y *no su longitud* o sea,

$$V_s = \tfrac{1}{2}k\delta^2 = \tfrac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 \neq \tfrac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

y el trabajo efectuado por la fuerza del resorte se puede incluir en la expresión del teorema de las fuerzas vivas de la manera siguiente:

$$T_1 + (V_s)_1 + \tilde{U}_{1 \to 2} = T_2 + (V_s)_2 \tag{17-19}$$

donde $\tilde{U}_{1 \to 2}$ es el trabajo que efectúan sobre la partícula todas las fuerzas menos la del resorte.

Notemos que la energía potencial de la fuerza del resorte definida por la ecuación 17-18 es nula cuando éste no está deformado. El punto de referencia podemos colocarlo al nivel que queramos escribiendo la energía potencial en la forma $V_s = \frac{1}{2}k\delta^2 - \frac{1}{2}k\delta_d^2$ donde δ_d es la deformación del resorte en el nuevo punto de referencia.[1]

17.5.5 Rozamiento

Para dar un ejemplo de fuerza no conservativa, citaremos las fuerzas de rozamiento dado que el trabajo que efectúan depende del camino que se siga. Las fuerzas de rozamiento se oponen siempre al movimiento, por lo que su trabajo es siempre negativo. Entonces, cuanto más largo sea el camino recorrido por el punto, mayor será el trabajo efectuado por el rozamiento. Como el trabajo efectuado por las fuerzas de rozamiento no es independiente del camino, las fuerzas de rozamiento no son conservativas y el trabajo que efectúan no podrá calcularse a partir de una energía potencial.

17.5.6 Fuerzas conservativas

El concepto de energía potencial se puede utilizar siempre que el trabajo de la fuerza considerada sea independiente del camino que sigue su punto de aplicación cuando éste pase de una posición inicial a una posición final dadas. De dichas fuerzas se dice que son *fuerzas conservativas*.

Consideremos una fuerza genérica **F** para la cual el trabajo efectuado cuando su punto de aplicación pasa de un punto 1 a un punto 2 es

$$U_{1 \to 2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 (F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz) \tag{17-20}$$

Si la integral ha de ser independiente del camino y sólo depende de los extremos de éste, el integrando de la ecuación 17-20 debe ser una diferencial exacta

$$U_{1 \to 2} = \int_1^2 (-\,dV) = V_1 - V_2 \tag{17-21}$$

Es decir,

$$-\,dV = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz \tag{17-22}$$

donde se incluye el signo menos a fin de que T_1 y V_1 tengan igual signo en la ecuación 17-12. Como la energía potencial es función de las tres variables de posición $V = V(x, y, z)$, su diferencial vendrá dada por

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\, dx + \frac{\partial V}{\partial y}\, dy + \frac{\partial V}{\partial z}\, dz \tag{17-23}$$

[1] Nótese que $V_s = \frac{1}{2}k\delta^2 - \frac{1}{2}k\delta_d^2$ *no* es lo mismo que $\frac{1}{2}k(\delta - \delta_d^2)$ y que estas dos expresiones no difieren en una constante.

donde $\partial V/\partial x$, $\partial V/\partial y$, $\partial V/\partial z$ son las derivadas parciales de la función energía potencial $V(x,y,z)$. Por tanto, la comparación de las ecuaciones 17-22 y 17-23 nos da

$$\frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz = -(F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) \qquad (17\text{-}24)$$

o sea

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} + F_x\right)dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + F_y\right)dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + F_z\right)dz = 0 \qquad (17\text{-}25)$$

Si el trabajo es efectivamente independiente del camino, la ecuación 17-25 deberá satisfacerse para cualquier elección de dx, dy y dz, de donde se deduce que

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (17\text{-}26)$$

Es decir, las componentes de la fuerza conservativa **F** se obtienen derivando la función energía potencial $V(x,y,z)$.

La ecuación 17-26 se puede expresar con notación vectorial

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathbf{k}\right) = -\nabla V \qquad (17\text{-}27)$$

en donde ∇ es el operador vectorial, llamado *nabla*,

$$\nabla = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \qquad (17\text{-}28)$$

El vector ∇V recibe el nombre de *gradiente de V*.

Como las componentes de **F** se derivan todas de una sola función escalar, estarán relacionadas entre sí. Por ejemplo, tomando las derivadas parciales de F_x y F_y respecto a y y a x, respectivamente, tenemos

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \qquad (17\text{-}29)$$

Sin embargo, el orden de derivación es indiferente, por lo que

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \qquad (17\text{-}30a)$$

Tendremos relaciones análogas entre F_y y F_z así como entre F_x y F_z

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \qquad (17\text{-}30b,c)$$

Por tanto, será fácil determinar si una fuerza es conservativa o no. Si sus componentes satisfacen las ecuaciones 17-30, la fuerza es conservativa y podremos hallar una energía potencial. Si sus componentes no satisfacen las ecuaciones 17-30, la fuerza no es conservativa y no existirá función energía potencial.

17.6 PRINCIPIO GENERAL DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA

Cuando se utiliza el principio general del trabajo y la energía (ec. 17-9) para resolver un problema, el trabajo que se efectúa sobre un punto material debe cal-

cularse para cada fuerza que se ejerza sobre dicho punto. El cálculo del término trabajo $U_{1 \to 2}$ se simplifica mucho utilizando el concepto de energía potencial. El término trabajo del principio trabajo-energía puede dividirse en dos partes

$$U_{1 \to 2} = U_{1 \to 2}^{(c)} + U_{1 \to 2}^{(o)} \tag{17-31}$$

El término $U_{1 \to 2}^{(c)}$ representa el trabajo efectuado por todas las fuerzas conservativas que se ejercen sobre el punto; es decir, por todas las fuerzas que derivan de una energía potencial conocida. Análogamente, el término $U_{1 \to 2}^{(o)}$ representa el trabajo efectuado por las otras fuerzas que se ejercen sobre el punto material; es decir, por las otras fuerzas que no derivan de una energía potencial o de las cuales no se conoce la energía potencial de la que derivan. Entonces, el principio del trabajo y la energía se puede formular de la manera siguiente:

$$T_1 + U_{1 \to 2}^{(c)} + U_{1 \to 2}^{(o)} = T_2 \tag{17-32}$$

Ahora bien, la parte conservativa del trabajo se puede sustituir por la disminución de energía potencial, $U_{1 \to 2}^{(c)} = V_1 - V_2$, donde $V = V_g + V_e + \ldots$ es la suma de las energías potenciales de las que derivan las fuerzas conservativas. Ello nos da

$$T_1 + V_1 + U_{1 \to 2}^{(o)} = T_2 + V_2 \tag{17-33}$$

La suma $T + V$ es la llamada *energía mecánica total*[1] E. La ecuación 17-33 expresa que el incremento resultante de la energía mecánica total entre las posiciones inicial y final del punto es igual al trabajo que ejercen las fuerzas no conservativas sobre el punto material.

La ecuación 17-33 se utiliza corrientemente para determinar la celeridad o la posición de un punto material antes o después de que haya tenido lugar un deplazamiento particular. Como el nivel de referencia a partir del cual se determina la energía potencial es arbitrario, los cálculos se simplificarán si se toma dicho nivel de manera que se anulen uno o más términos de la ecuación 17-33. De hecho, se pueden elegir situaciones diferentes de los puntos de referencia para los distintos términos energía potencial.

17.7 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

En muchos problemas de interés, las fuerzas de rozamiento resultan despreciables y las únicas fuerzas que se ejercen sobre un punto material se deben a resortes elásticos y a la gravedad. En tales casos, $U_{1 \to 2}^{(o)} = 0$ y la ecuación 17-33 queda en la forma

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{17-34}$$

Es decir, cuando las fuerzas que se ejerzan sobre el punto material sean todas conservativas, la energía mecánica total se mantiene constante

$$E_1 = E_2 = \text{constante} \tag{17-35}$$

[1] La energía mecánica total es un término relativo. Como el punto de referencia o nivel cero de la energía potencial es arbitrario, un punto material en movimiento puede tener un valor nulo e incluso negativo de la energía mecánica total.

La ecuación 17-34 expresa el *Principio de conservación de la energía*. La energía mecánica total del punto material se conserva en el sentido de que cualquiera que sea el valor que $E = T + V$ tenga en la posición 1, tendrá el mismo valor en la posición 2. Toda disminución de la energía potencial vendrá acompañada de un aumento de igual valor de la energía cinética y recíprocamente. La constante de la ecuación 17-35 se determina a partir de la posición y velocidad conocidas del punto en un determinado instante. Como el cero de energía potencial está situado arbitrariamente, dicha constante puede ser positiva, nula o negativa.

En realidad, la conservación de la energía no constituye un principio nuevo. No es más que un caso particular del principio del trabajo y la energía (ec. 17-33).

17.8 POTENCIA Y RENDIMIENTO

Potencia y rendimiento son conceptos íntimamente relacionados con los de trabajo mecánico y energía mecánica. Toda medida de la energía mecánica que una máquina entrega al medio exterior debe tener en cuenta el trabajo que realiza por unidad de tiempo (potencia) así como la cantidad total de trabajo que efectúa la máquina. Además, la clasificación de la máquina debe tener en cuenta la cantidad de energía que ha de consumir para efectuar el trabajo.

17.8.1 Potencia

La potencia de una fuerza **F** viene dada por el trabajo que efectúa por unidad de tiempo

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \qquad (17\text{-}36)$$

Como $d\mathbf{r}$ es el desplazamiento del punto al que se aplica la fuerza, $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ será la velocidad del punto.

La potencia tiene las dimensiones de un *trabajo* (*fuerza* por *longitud*) dividido por un *tiempo*. En el sistema SI de unidades, esta combinación de unidades lleva el nombre de *watt* ($1\ \text{W} = 1\ \text{J/s} = 1\ \text{N} \cdot \text{m/s}$). En el U.S. Customary system, la unidad es el *caballo de vapor* ($1\ \text{hp} = 550\ \text{ft} \cdot \text{lb/s} = 33\,000\ \text{ft} \cdot \text{lb/min}$).

17.8.2 Rendimiento mecánico

Los sistemas mecánicos reales pierden energía en los rozamientos con lo que el trabajo que una máquina entrega al exterior (trabajo útil) es siempre inferior al trabajo que se efectúa sobre la máquina (trabajo consumido). Definimos el rendimiento mecánico η_{mec} diciendo que es el cociente entre estas dos cantidades

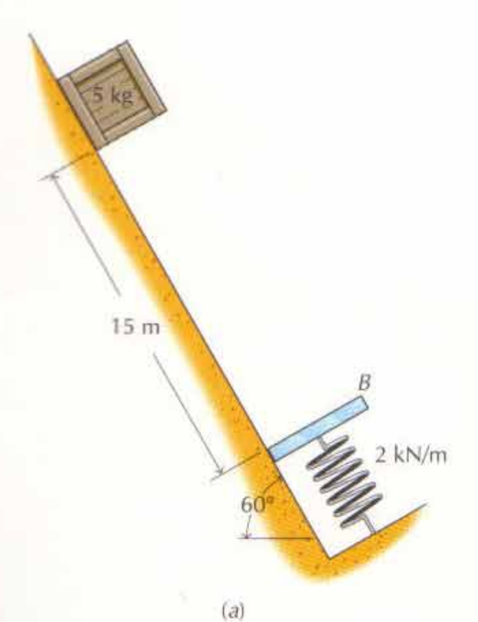
$$\eta_{\text{mec}} = \frac{\text{trabajo útil}}{\text{trabajo consumido}} \qquad (17\text{-}37)$$

Dividiendo por dt numerador y denominador de la ecuación 17-37, tenemos

$$\eta_{\text{mec}} = \frac{\text{potencia útil}}{\text{potencia consumida}} \qquad (17\text{-}38)$$

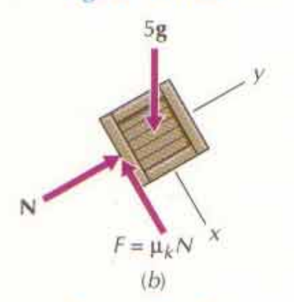
Como todos los sistemas reales pierden energía en los rozamientos, el trabajo útil será siempre menor que el consumido y η_{mec} siempre es menor que la unidad.

Desde luego, en un sentido termodinámico, no hay pérdida de energía. En una máquina ordinaria, la pérdida de energía mecánica debida al trabajo negativo de las fuerzas de rozamiento entre partes móviles se convierte en energía calorífica, la cual se disipa hacia el ambiente de la máquina. Sin embargo, cuando se tienen en cuenta todas las formas de energía (mecánica, eléctrica, química, etc.), la energía total se conserva.



(a)

Figura 17-13a



(b)

Figura 17-13b

PROBLEMA EJEMPLO 17.4

Por una rampa cae una caja de 5 kg en la forma que se indica en la figura 17-13*a* e incide sobre el tope *B*. El coeficiente de rozamiento entre caja y suelo es μ_k = 0,25 y la masa del tope es despreciable. Si se suelta la caja partiendo del reposo cuando se halla a 15 m del tope, determinar:

a. La celeridad v_C de la caja cuando choca contra el tope.
b. El acortamiento máximo $\delta_{máx}$ del muelle debido al movimiento de la caja.

SOLUCIÓN

a. En la figura 17-13*b* puede verse el diagrama de sólido libre de la caja, correspondiente a una posición genérica anterior a su contacto con el tope. Como la caja no se mueve en la dirección *y* (perpendicular a la superficie), según la ley de Newton $\Sigma F_y = ma_y = 0$, es decir, $N = (5)(9{,}81)\cos 60° = 24{,}53$ N. Luego la fuerza de rozamiento será $F = (0{,}25)(24{,}53) = 6{,}13$ N.

La fuerza de la gravedad $W = mg$ es conservativa y se podrá determinar su trabajo mediante su energía potencial. Tomando como referencia la altura inicial de la caja, la energía potencial inicial será nula $V_1 = 0$ y la energía potencial gravitatoria cuando la caja choca contra el tope será

$$V_2 = (5)(9{,}81)(15 \operatorname{sen} 60°) = -637{,}2 \text{ J}$$

La fuerza de rozamiento no es conservativa y habrá que calcular directamente el trabajo que efectúa

$$(U_{1\to 2})_F = \int_0^{15} -6{,}13\, dx = -91{,}95 \text{ J}$$

La fuerza *N* es normal al movimiento, por lo que no efectúa trabajo sobre la caja $(U_{1\to 2})_N = 0$.

Como la caja parte del reposo, su energía cinética inicial es nula $T_1 = 0$ y su energía cinética inmediatamente antes de chocar contra el tope es

$$T_2 = \tfrac{1}{2}(5)v_C^2 = 2{,}50v_C^2$$

Aplicando estos valores en la ecuación que traduce el teorema de las fuerzas vivas, se tiene

$$0 + 0 - 91{,}95 = 2{,}50v_c^2 - 637{,}2$$

o sea

$$v_C = 14{,}77 \text{ m/s} \qquad \text{Resp.}$$

b. Después del choque, caja y tope se mueven juntos. En la figura 17-13*c* puede verse el diagrama de sólido libre del sistema. Las fuerzas normal y de rozamiento siguen siendo $N = 24{,}53$ N y $F = 6{,}13$ N, respectivamente. La velocidad inicial de la caja, en esta fase del movimiento, es $v_C = 14{,}77$ m/s y la energía cinética inicial es

$$T_2 = \frac{1}{2}(5)(14{,}77)^2 = 545{,}4 \text{ J}$$

En el instante de máxima deformación del muelle, la velocidad de la caja es nula y por tanto, también lo será la energía cinética $T_3 = 0$.

El trabajo efectuado por el rozamiento sobre la caja cuando se desliza por el suelo una distancia adicional $\delta_{máx}$ es

$$(U_{i\to f})_F = \int_0^{\delta_{máx}} -6{,}13\, dx = -6{,}13\ \delta_{máx}$$

La fuerza del muelle y la de la gravedad son ambas conservativas y el trabajo que efectúan se puede determinar mediante sus respectivas energías potenciales. Tomando como referencia la posición ocupada por la caja cuando entra en contacto con el tope, la energía potencial gravitatoria será nula $(V_g)_2$ la energía potencial gravitatoria final es

$$(V_g)_3 = 5g\,(-\delta_{máx} \text{ sen } 60°) = -42{,}48\,\delta_{máx}$$

Como en el instante en que la caja entra en contacto con el tope el muelle está indeformado, tomaremos la misma posición que antes como referencia para la energía potencial de la fuerza del muelle. Entonces, la energía potencial inicial de la fuerza del muelle será nula $(V_s)_2 = 0$ y la energía potencial final de dicha fuerza es

$$(V_s)_3 = \frac{1}{2}(2000)\delta_{máx}^2 = 1000\,\delta_{máx}^2$$

El teorema de las fuerzas vivas da entonces

$$545{,}4 + 0 + 0 - 6{,}13\,\delta_{máx} = 0 - 42{,}48\,\delta_{máx} + 1000\,\delta_{máx}^2$$

de donde resulta

$$\delta_{máx} = 0{,}757 \text{ m} \qquad \text{Resp.}$$

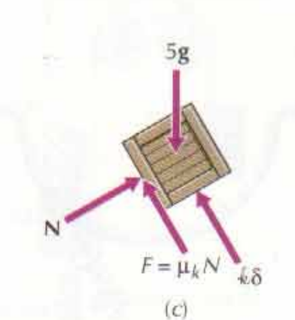


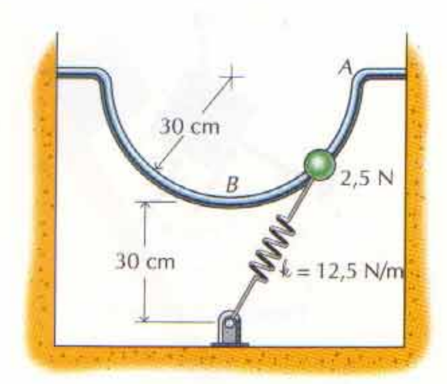
Figura 17-13c

PROBLEMA EJEMPLO 17.5

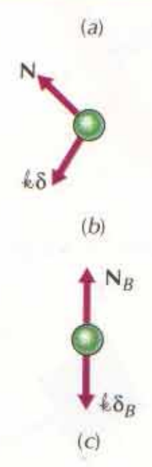
Una cuenta que pesa 2,5 N se mueve por un alambre semicircular situado en un plano horizontal, según se indica en la figura 17-14*a*. La longitud natural del resorte es de 20 cm y el rozamiento es despreciable. Si se suelta la cuenta partiendo del reposo en la posición *A*, determinar

a. Su velocidad en la posición *B*.

b. La fuerza que el alambre ejerce sobre la cuenta en la posición *B*.



(a)



(b)

(c)

Figura 17-14

SOLUCIÓN

a. En la figura 17-14*b* puede verse el diagrama de sólido libre de la cuenta correspondiente a una posición genérica a lo largo del alambre. La fuerza peso es perpendicular al movimiento (perpendicular a la figura) y no efectúa trabajo. La fuerza normal N tampoco trabaja por ser también perpendicular al movimiento. La fuerza del resorte es conservativa y el trabajo que efectúa se puede calcular mediante su energía potencial. La longitud del resorte en la posición A es $\ell_A = \sqrt{60^2 + 30^2} = 67{,}08$ cm ; la deformación del resorte en la posición A es $\ell_A = (67{,}08 - 20)/100 = 0{,}4708$ m. Por tanto, la energía potencial de la fuerza del resorte, en la posición A, vale

$$(V_s)_A = \frac{1}{2}(12{,}5)(0{,}4708)^2 = 1{,}3853 \text{ J}$$

En la posición B, la deformación del resorte es $\delta_B = (30 - 20)/100 = 0{,}1000$ m y la energía potencial de la fuerza del resorte, en la posición B, vale

$$(V_s)_B = \frac{1}{2}(12{,}5)(0{,}1000)^2 = 0{,}0625 \text{ J}$$

Como no hay fuerzas no conservativas, $U_{1\to 2}^{(o)} = 0$. Como la cuenta parte del reposo, su energía cinética inicial es nula ($T_A = 0$); en la posición B, la energía cinética de la cuenta es

$$T_B = \frac{1}{2}\left(\frac{2{,}5}{9{,}81}\right)v_B^2 = 0{,}12742 v_B^2$$

Aplicando estos valores en la ecuación que traduce el teorema de las fuerzas vivas, se tiene

$$0 + 1{,}3853 + 0 = 0{,}12742 v_B^2 + 0{,}0625$$

de donde

$$v_B = 3{,}22 \text{ m/s} \qquad \text{Resp.}$$

b. En la figura 17-14*c* puede verse el diagrama de sólido libre de la cuenta correspondiente a la posición B. La componente de la aceleración de la cuenta, que es normal al alambre, es $a_n = v^2/r = 3{,}22^2/0{,}30 = 34{,}56$ m/s^2. Entonces, de la segunda ley de Newton, $\Sigma F_n = ma_n$, se tiene

$$N - (12{,}5)(0{,}1000) = \frac{2{,}5}{9{,}81}(34{,}56)$$

de donde

$$N = 10{,}06 \text{ N} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 17.6

Dos bloques están unidos mediante un hilo inextensible y sin peso que pasa por pequeñas poleas de masa despreciable, según se indica en la figura 17-15*a*. Si se tira del bloque B hacia abajo 500 mm a partir de su posición de equilibrio y se suelta partiendo del reposo, determinar su celeridad cuando vuelve a su posición de equilibrio.

SOLUCIÓN

Los bloques A y B constituyen un sistema de puntos materiales en interacción. Las ecuaciones que da el teorema de las fuerzas vivas para cada uno de ellos se pueden sumar y dan una ecuación semejante para el sistema

$$T_i + V_i + U_{i \to f}^{(o)} = T_f + V_f \qquad (a)$$

En la ecuación a, T representa la suma de las energías cinéticas de los dos puntos, V la suma de las energías potenciales de todas las fuerzas conservativas que se ejercen sobre ambos y $U_{i \to f}^{(o)}$ la suma de los trabajos efectuados por las demás fuerzas que se ejercen sobre dichos puntos.

En las figuras 17-15*b* y 17-15*c* pueden verse los diagramas de sólido libre de los dos bloques. En la posición de equilibrio, la suma de fuerzas es nula para ambos.

$$\uparrow \Sigma F = 2T_{st} - (2)(9{,}81) - 800\ \delta_{st} = 2a_A = 0$$
$$\uparrow \Sigma F = T_{st} - (10)(9{,}81) = 10a_B = 0$$

Por tanto, la tensión estática del hilo será $T_{st} = 98{,}1$ N y la deformación estática del resorte será $\delta_{st} = 0{,}2207$ m.

Como la longitud del hilo es constante, el bloque A subirá cuando baje el B y recíprocamente. Con referencia a la figura 17-15*d*, la longitud del hilo en la posición de equilibrio ($y_A = y_B = 0$) viene dada por

$$\ell = 2d + b + c \qquad (b)$$

Cuando el bloque A ascienda una distancia y_A y el B descienda una distancia y_B, la longitud de la cuerda vendrá dada por

$$\ell = 2(d - y_A) + b + (c + y_B) \qquad (c)$$

Restando la ecuación b de la ecuación c, se tiene la relación de posiciones $y_B = 2y_A$; derivando esta ecuación se tiene la relación de velocidades $v_B = \dot{y}_B = 2\dot{y}_A = 2v_A$.

Como el sistema se suelta partiendo del reposo, las energías cinéticas iniciales de los bloques son nulas $(T_A)_i = (T_B)_i = 0$. Cuando los bloques vuelvan a su posición de equilibrio, la suma de sus energías cinéticas será

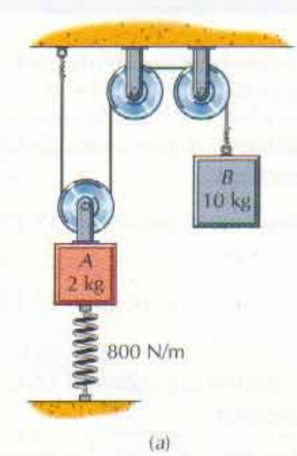
$$(T_A)_f + (T_B)_f = \tfrac{1}{2}(2)v_A^2 + \tfrac{1}{2}(10)v_B^2 = 5{,}25v_B^2$$

Como el hilo es inextensible, al sumar los trabajos para ambos puntos materiales se anularán entre sí los trabajos efectuados por las fuerzas de tensión. Tanto la fuerza de la gravedad como la del resorte son conservativas y por tanto, el trabajo efectuado por fuerzas no conservativas será nulo $U_{1 \to 2}^{(o)} = 0$. Midiendo las energías potenciales de las fuerzas que se ejercen sobre cada bloque a partir de su posición de equilibrio, se tiene

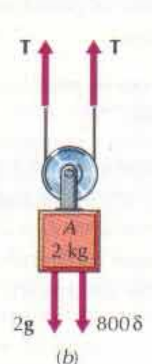
$$(V_A)_i = (V_{Ag})_i + (V_{As})_i = (2)(9{,}81)\left(\frac{0{,}5}{2}\right) + \frac{1}{2}(800)(0{,}2207 + 0{,}500)^2$$
$$= 212{,}67 \text{ J}$$
$$(V_A)_f = (V_{Ag})_f + (V_{As})_f = \frac{1}{2}(800)(0{,}2207)^2 = 19{,}48 \text{ J}$$
$$(V_B)_i = (V_{Bg})_i = (10)(9{,}81)(-0{,}5) = -49{,}05 \text{ J} \quad \text{y} \quad (V_B)_f = (V_{Bg})_f = 0 \text{ J}$$

Aplicando estos valores en la ecuación a, se tiene

$$0 + 212{,}67 - 49{,}05 + 0 = 5{,}25v_B^2 + 19{,}48 \qquad \text{o sea} \qquad v_B = 5{,}24 \text{ m/s} \qquad \text{Resp.}$$



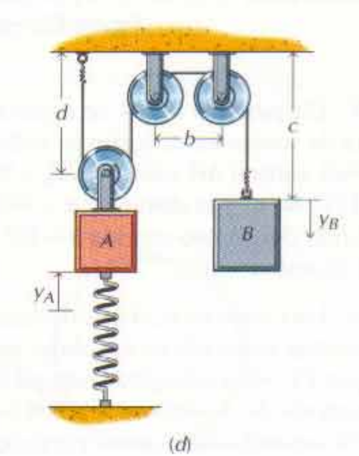
(*a*)



(*b*)



(*c*)



(*d*)

Figura 17-15

PROBLEMAS

17-37* Resolver el problema 17-11 (pág. 276) utilizando energías potenciales.

17-38* Resolver el problema 17-12 (pág. 276) utilizando energías potenciales.

17-39* Resolver el problema 17-13 (pág. 276) utilizando energías potenciales.

17-40* Resolver el problema 17-14 (pág. 277) utilizando energías potenciales.

17-41 Resolver el problema 17-15 (pág. 277) utilizando energías potenciales.

17-42* Resolver el problema 17-22 (pág. 278) utilizando energías potenciales.

17-43 Resolver el problema 17-23 (pág. 278) utilizando energías potenciales.

17-44* Una masa de 0,5 kg se desliza sin rozamiento por una varilla vertical según se indica en la figura P17-44. La longitud natural del resorte es $\ell_0 = 200$ mm y la distancia $d = 300$ mm. Si se suelta la masa partiendo del reposo cuando $b = 0$, determinar la constante del resorte que haga $b_{máx} = 400$ mm.

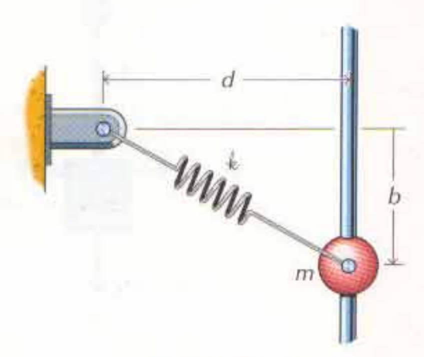


Figura P17-44

17-45 Un peso de 7,5 N se desliza por una varilla vertical exenta de rozamiento, según se indica en la figura P17-44. La longitud natural del resorte es $\ell_0 = 200$ mm y su constante es $k = 1333$ N/m y la distancia $d = 300$ mm. Si se suelta el peso partiendo del reposo cuando $b = 225$ mm, determinar su celeridad cuando $b = 0$.

17-46* Una masa de 0,5 kg se desliza por una varilla exenta de rozamiento y situada en un plano vertical, según se indica en la figura P17-46. La longitud natural del resorte es $\ell_0 = 250$ mm, la constante del resorte es $k = 600$ N/m y la distancia $d = 800$ mm. Si se suelta dicha masa partiendo del reposo cuando $b = 300$ mm, determinar su celeridad en las posiciones A y B.

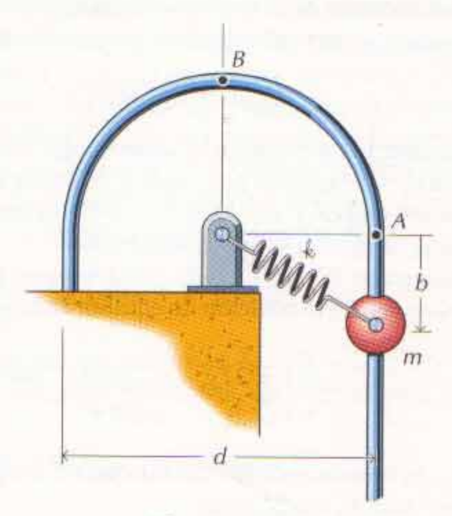


Figura P17-46

17-47 Un peso de 2,5 N se desliza por una varilla exenta de rozamiento y situada en un plano vertical, según se indica en la figura P17-46. La longitud natural del resorte es $\ell_0 = 150$ mm, la constante del resorte es $k = 83$ N/m y la distancia $d = 450$ mm. Si el peso lleva una velocidad de 0,6 m/s hacia la derecha en la posición B, determinar su celeridad en la posición A y en la posición en que $b = 225$ mm.

17-48* Una cantante hace girar un micrófono de 0,35 kg, situado al extremo de un hilo de 750 mm de longitud, en un plano vertical (fig. P17-48). Determinar

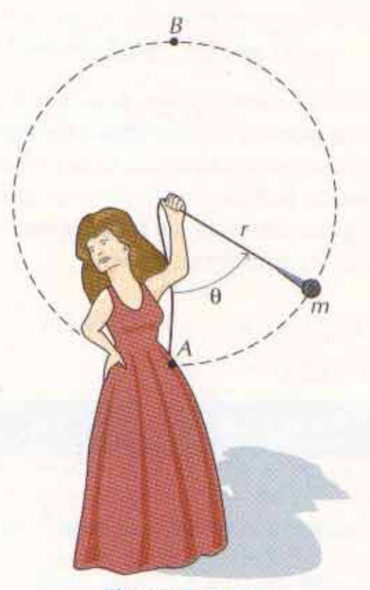


Figura P17-48

a. La mínima celeridad que debe tener el micrófono en la posición A para poder recorrer toda la trayectoria circular.
b. La máxima tensión del hilo.

17-49 Una cantante hace girar un micrófono que pesa 3,75 N, situado al extremo de un hilo de 45 cm de longitud, en un plano vertical (fig. P17-48). Si la celeridad del micrófono es de 3,6 m/s en la posición A, determinar

a. El ángulo θ al cual se afloja el hilo (tensión = 0).
b. La tensión máxima del hilo.

17-50* Una cantante hace girar un micrófono de 0,35 kg, situado al extremo de un hilo de 600 mm de longitud, en un plano vertical (fig. P17-48). Si el hilo se afloja (tensión = 0) cuando $\theta = 120°$, determinar

a. La celeridad del micrófono en A ($\theta = 0°$).
b. La tensión máxima del hilo.

17-51 Una cantante hace girar un micrófono que pesa 3,75 N, situado al extremo de un hilo de 60 cm de longitud, en un plano vertical (fig. P17-48). Si la tensión del hilo, cuando el micrófono está en A, es el doble que cuando está en B, determinar la velocidad del micrófono y la tensión del hilo cuando pase por A.

17-52* Un saquito que contiene 1,5 kg de bolitas está sujeto al extremo de un hilo de 800 mm de longitud, según se indica en la figura P17-52. La máxima tensión que puede resistir el hilo es $P_{máx} = 30$ N. Si el muchacho saca lentamente el saco del estante, determinar el ángulo θ que girará el saco antes de romper el hilo.

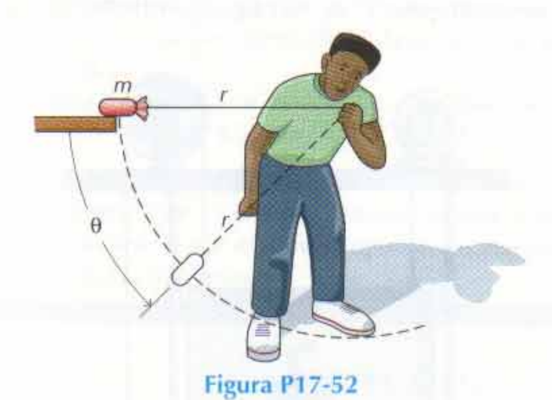


Figura P17-52

17-53 Un saquito de bolas está sujeto al extremo de un hilo de 45 cm de longitud, según se indica en la figura P17-52. El muchacho saca lentamente el saco del estante y el hilo se rompe cuando $\theta = 70°$. Si la máxima tensión que puede resistir el hilo es $P_{máx} = 20$ N, determinar el peso de las bolas contenidas en el saco.

17-54* Un saquito de bolas está sujeto al extremo de un hilo de 500 mm de longitud, según se indica en la figura P17-52. Si la máxima tensión que puede resistir el hilo es $P_{máx} = 50$ N, determinar el máximo peso de bolas que no rompería el hilo cuando el muchacho sacara despacio el saco del estante.

17-55 Una cajita se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamiento y llega a una rampa circular, según se indica en la figura P17-55. Si la celeridad inicial de la caja es $v_0 = 1,5$ m/s y $r = 375$ mm, determinar el ángulo θ al cual la caja perderá el contacto con la rampa.

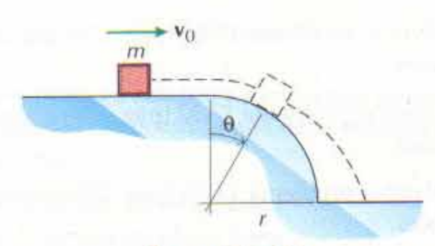


Figura P17-55

17-56* Una cajita se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamiento y llega a una rampa circular, según se indica en la figura P17-55. Si el radio de la rampa es $r = 750$ mm y la caja pierde contacto con ella cuando $\theta = 25°$, determinar la celeridad inicial v_0 de la caja.

17-57 Una cajita se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamiento y llega a una rampa circular, según se indica en la figura P17-55. Si el radio de la rampa es $r = 75$ cm, determinar el máximo ángulo $\theta_{máx}$ al cual la caja mantendrá contacto con la rampa.

17-58* Un cochecito de juguete desciende por una rampa y sigue luego por un rizo vertical, según se indica en la figura P17-58. La masa del cochecito es $m = 50$ g y el diámetro del rizo vertical es $d = 300$ mm. Si se suelta el cochecito partiendo del reposo, determinar:

a. La mínima altura h desde la que hay que soltar el cochecito para que recorra todo el rizo.
b. La fuerza que el cochecito ejerce sobre la pista cuando se halla en el punto B (un cuarto del rizo).

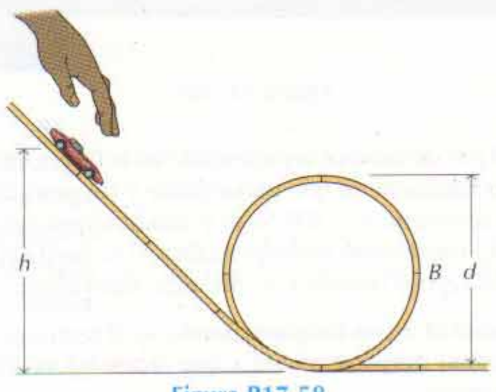


Figura P17-58

17-59 Resolver el problema 17-27 (pág. 278) utilizando energías potenciales.

17-60* Resolver el problema 17-28 (pág. 279) utilizando energías potenciales.

17-61 Resolver el problema 17-29 (pág. 279) utilizando energías potenciales.

17-62* Resolver el problema 17-30 (pág. 279) utilizando energías potenciales.

17-63 Resolver el problema 17-31 (pág. 279) utilizando energías potenciales.

17-64* Resolver el problema 17-32 (pág. 279) utilizando energías potenciales.

17-65 Resolver el problema 17-33 (pág. 279) utilizando energías potenciales.

17-66* Resolver el problema 17-34 (pág. 280) utilizando energías potenciales.

17-67 El par de bloques representado en la figura P17-67 está conectado mediante un hilo inextensible y sin peso. El resorte tiene una constante $k = 1200$ N/m y una longitud natural $\ell_0 = 30$ cm. El rozamiento es despreciable. Si se suelta el sistema a partir del reposo cuando $x = 0$, determinar

a. La celeridad de los bloques cuando $x = 10$ cm.
b. El máximo desplazamiento x que alcanzará en el ulterior movimiento.

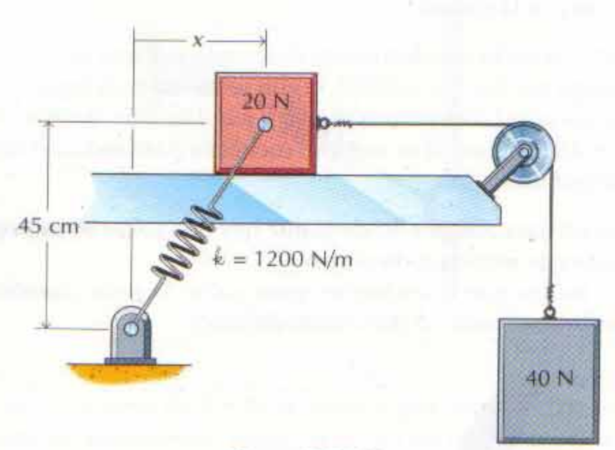


Figura P17-67

17-68* El par de bloques representado en la figura P17-68 está conectado mediante un hilo inextensible y sin peso. El resorte tiene una constante $k = 500$ N/m y una longitud natural $\ell_0 = 400$ mm. El rozamiento es despreciable. Si se suelta el sistema a partir del reposo cuando $x = -800$ mm, determinar

a. La celeridad de los bloques cuando $x = 0$ mm.
b. El máximo desplazamiento x que alcanzará en el ulterior movimiento.

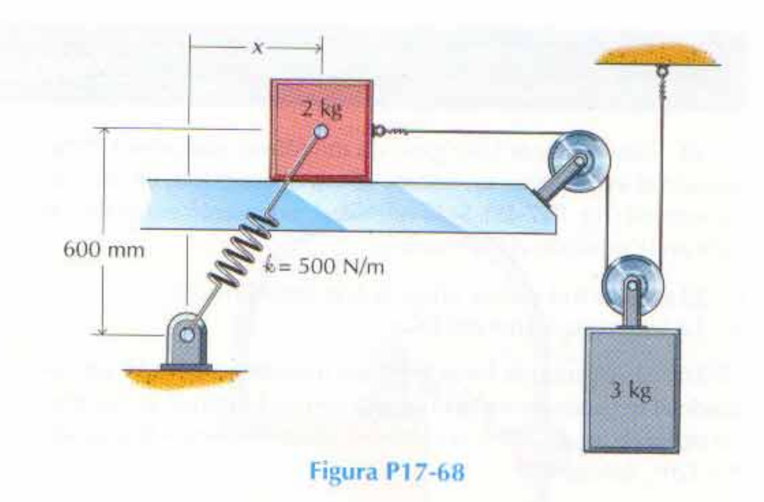


Figura P17-68

17-69 La fuerza retardadora debida a la resistencia del aire que se ejerce sobre un ciclista que se mueve con celeridad v viene dada por

$$F_R = \frac{v^2}{3}$$

donde F_R se expresa en newton y v en metros por segundo. Si el peso del conjunto ciclista-bicicleta es de 900 N, determinar

a. La potencia necesaria para mantener una celeridad constante de 32 km/h en el llano.
b. La máxima celeridad que podría mantener el ciclista subiendo una pendiente de 5° desarrollando la misma potencia.

17-70* Un ascensor E está unido mediante un cable inextensible a un contrapeso C de 900 kg (fig. P17-70). El conjunto

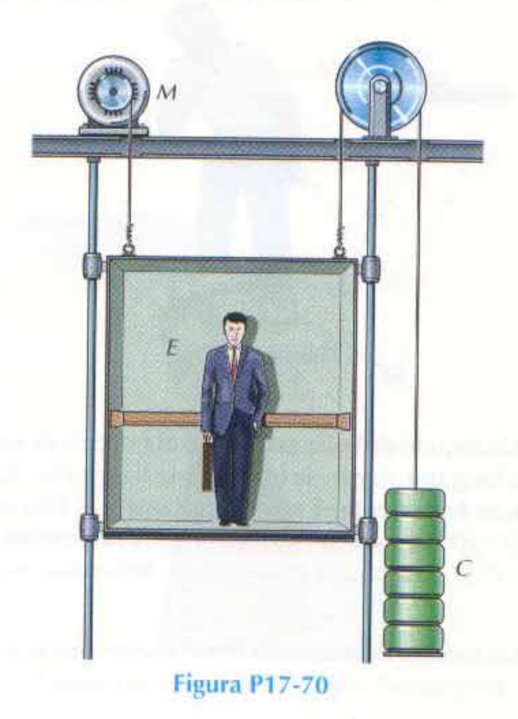


Figura P17-70

hombre-ascensor tiene una masa de 1000 kg. El motor M, unido al ascensor mediante otro cable, lo hace subir y bajar. Determinar la potencia que ha de desarrollar el motor si el ascensor

a. Sube con celeridad constante de 0,5 m/s.
b. Baja con celeridad constante de 0,5 m/s

17-71 Una caja C que pesa 2 kN está unida a un torno W según se indica en la figura P17-71. Si el coeficiente de rozamiento dinámico entre la caja y el plano inclinado 25° vale 0,2 y la máxima potencia que puede desarrollar el torno es de 368 W, determinar la máxima celeridad constante a la cual podrá hacer subir la caja.

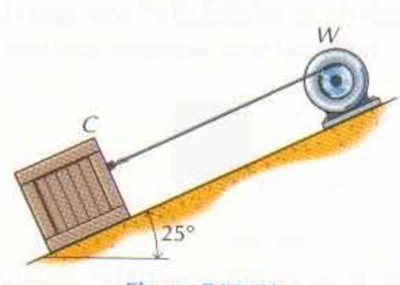


Figura P17-71

17-72* Un ciclista puede mantener una celeridad de 30 km/h por el llano desarrollando una potencia de 275 W. El peso combinado del ciclista y la bicicleta es 800 N. Suponiendo constantes las fuerzas retardadoras, determinar

a. La máxima celeridad uniforme que podría mantener el ciclista subiendo una pendiente de 5° desarrollando la misma potencia.
b. La potencia que habría de desarrollar el ciclista para subir por la pendiente de 5° a 30 km/h.

17-73 Un automóvil que pesa 12,5 kN debe entregar a sus ruedas una potencia de 15 kW para mantener una velocidad constante de 80 km/h por el llano. Suponiendo constante la fuerza retardadora, determinar

a. La celeridad máxima que podría mantener el auto subiendo la pendiente de 5° entregando a sus ruedas la potencia de 15 kW.
b. La potencia que debería entregar a las ruedas para subir la pendiente de 5° con celeridad constante igual a 80 km/h.

17-74* La suma de todas las fuerzas retardadoras que se ejercen sobre un automóvil de 1200 kg que se mueve con una celeridad v viene dada por

$$F_R = 200 + 0{,}8v^2$$

donde F_R se expresa en newton y v en metros por segundo (fig. P17-74). Determinar la potencia que debe entregarse a las ruedas para moverse

a. A 40 km/h en una carretera llana.
b. A 80 km/h en una carretera llana.
c. A 40 km/h subiendo una carretera inclinada 5°.



Figura P17-74

17-75 La suma de todas las fuerzas retardadoras que se ejercen sobre un automóvil que pesa 16 kN al moverse con celeridad v viene dada por

$$F_R = a + bv^2$$

donde a representa la resistencia a la rodadura de los neumáticos y bv^2 la resistencia del aire. Si hay que entregar a las ruedas una potencia de 6 kW para mantener una celeridad constante de 50 km/h y de 10 kW para mantener una celeridad constante de 60 km/h (en ambos casos en el llano), determinar la potencia necesaria para moverse

a. A 90 km/h en el llano.
b. A 60 km/h subiendo una carretera inclinada 5°.

RESUMEN

El método del trabajo y la energía combina los principios de la Cinemática con la segunda ley de Newton para relacionar directamente la posición con la celeridad de un cuerpo. Para que resulte útil este método, las fuerzas que actúen sobre el cuerpo deberán ser función exclusiva de su posición. Sin embargo, para ciertos tipos de estas fuerzas, las integrales resultantes se pueden obtener en forma explícita. El resultado es una sencilla ecuación algebraica que relaciona las celeridades del cuerpo correspondientes a dos de sus posiciones en el movimiento.

El trabajo que efectúa una fuerza sobre un punto material es el producto del desplazamiento del punto por la componente de la fuerza segun dicho desplazamiento. Si no hubiese desplazamiento o componente de la fuerza según su dirección, la fuerza no efectuaría trabajo sobre el punto material.

En el caso de fuerzas conservativas, el trabajo efectuado sólo depende de la posición de la partícula al principio y al final de su movimiento. Como ejemplos de fuerzas conservativas podemos citar: fuerzas constantes, fuerzas gravitatorias y fuerzas de resortes linealmente elásticos.

Las fuerzas conservativas se pueden siempre expresar en forma de gradientes de funciones energía potencial. El trabajo efectuado por la fuerza durante un movimiento es igual a la energía potencial inicial menos la energía potencial final.

La energía cinética de un punto material sólo depende de su celeridad $T = \frac{1}{2} mv^2$. Como la masa m y el cuadrado de la celeridad v^2 son cantidades positivas, la energía cinética de un punto material será siempre positiva.

El teorema de las fuerzas vivas

$$T_i = U_{i \to f} = T_f \qquad (17\text{-}9b)$$

nos dice que la energía cinética final de un punto material es igual a la suma de su energía cinética inicial más el trabajo que sobre el punto efectúan fuerzas exteriores a él. Si el término del trabajo se descompone en dos partes: una debida a fuerzas conservativas, $U_{i \to f}^{(c)} = V_i - V_f$, y otra debida a las demás fuerzas, $U_{i \to f}^{(o)}$, el teorema de las fuerzas vivas se puede escribir en la forma

$$T_i + V_i + U_{i \to f}^{(o)} = T_f + V_f \qquad (17\text{-}33)$$

La ventaja del método del trabajo y la energía estriba en que relaciona directamente la celeridad de un punto material en dos posiciones diferentes con las fuerzas que trabajan sobre dicho punto durante su movimiento. Si se aplicara directamente la segunda ley de Newton, debería obtenerse la aceleración para una posición arbitraria del punto. Después habría que integrarla utilizando los principios de la Cinemática. El método del trabajo y la energía combina en uno estos dos pasos.

Las limitaciones del método del trabajo y la energía estriban en que la ecuación 17-9 es una ecuación escalar de la que sólo puede despejarse una incógnita, la aceleración no puede calcularse directamente y sólo intervienen fuerzas que trabajan. En cambio, la componente normal de la aceleración es función de la velocidad y ésta se halla fácilmente utilizando el método del trabajo y la energía. Entonces, podremos utilizar la componente normal de la segunda ley de Newton para determinar las fuerzas que se ejercen normalmente a la trayectoria y las que no efectúen trabajo.

Como el método del trabajo y la energía combina los principios de la Cinemática con la segunda ley de Newton, no constituye en realidad un principio nuevo o independiente. No hay ningún problema que pueda resolverse mediante el método del trabajo y la energía y no se pueda resolver utilizando la segunda ley de Newton. No obstante, cuando sea aplicable el método del trabajo y la energía, suele ser el más fácil para resolver el problema.

PROBLEMAS DE REPASO

17-76* Se deja caer un paquete de 1,5 kg, desde una altura de 600 mm, sobre la plataforma ligera de un dinamómetro, según se indica en la figura P17-76. La plataforma se apoya en dos resortes iguales (k = 150 N/m) que están comprimidos 50 mm cuando sobre aquélla no hay ningún objeto (posición representada). Si no se pierde energía cuando choca el paquete con el dinamómetro, determinar la máxima compresión que sufrirán los resortes a consecuencia de la caída del paquete sobre el dinamómetro. Comparar este valor con la compresión estática del dinamómetro (cuando se deposite lentamente el paquete sobre él).

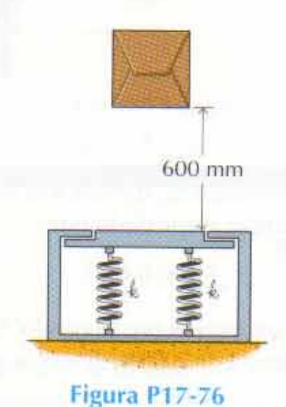


Figura P17-76

17-77 El movimiento de la lenteja de un péndulo, de peso 20 N, lo perturba una pequeña espiga situada directamente debajo del punto de suspensión (fig. P17-77). Si el péndulo tiene una celeridad angular de 3 rad/s cuando $\theta = 75°$, determinar la tensión del hilo

a. En la posición A.
b. En la posición B.

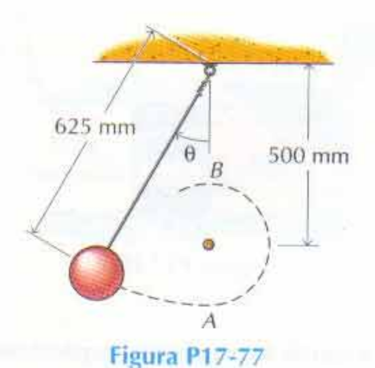


Figura P17-77

17-78* Un telesquí de arrastre hace ascender esquiadores por una pendiente según se indica en la figura P17-78. Si el coeficiente de rozamiento entre los esquís y la nieve vale 0,1 y el peso medio de los esquiadores es de 650 N, determinar

a. La potencia necesaria para que la cuerda de arrastre vaya a 2 m/s cuando tire de 50 esquiadores.
b. La celeridad de la cuerda de arrastre si se mantuviera constante la potencia pero se agregaran 25 esquiadores a la cuerda.

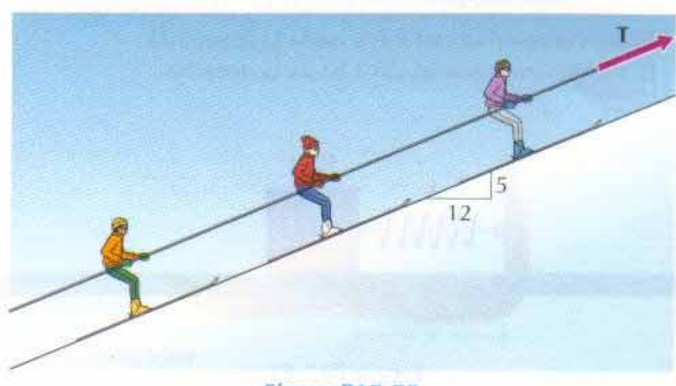


Figura P17-78

17-79 En un almacén de carga, los paquetes descienden por una rampa y caen al suelo según se indica en la figura P17-79. El coeficiente de rozamiento entre paquete y rampa es $\mu_k = 0{,}40$ y $\theta = 20°$. Si un paquete pesa 25 N y lleva una celeridad de 2,4 m/s en A, determinar

a. La celeridad del paquete cuando llega al suelo.
b. La distancia d entre el pie de la rampa y el punto en que el paquete incide sobre el suelo.

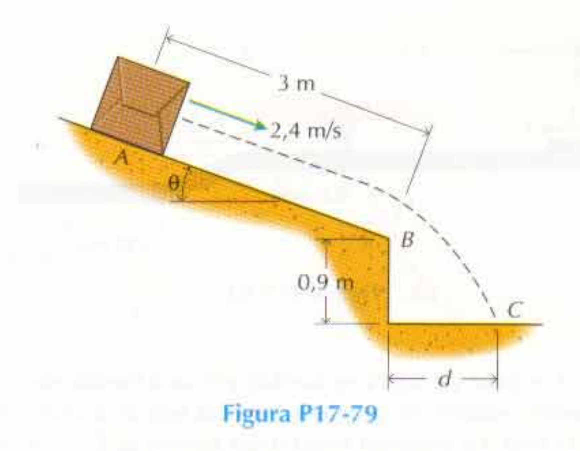


Figura P17-79

17-80* En un juego de habilidad, los jugadores hacen que un disco de hockey de 60 g se deslice por un suelo horizontal de madera. El objetivo es que el disco se detenga lo más cerca po-

sible de la pared sin tocarla. El coeficiente de rozamiento entre disco y suelo vale 0,4 y el punto desde el cual el jugador ha de soltar el disco se halla a 2 m de la pared. Si el disco ha de quedar a menos de 100 mm de la pared, determinar el campo de velocidades iniciales que darían un tiro ganador.

17-81 Un bloque que pesa 50 N está unido a un resorte de $k = 800$ N/m y longitud natural $\ell_0 = 45$ cm, según se indica en la figura P17-81. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre el bloque y el piso horizontal valen 0,5 y 0,4, respectivamente. Si el bloque tiene una celeridad inicial de 2,1 m/s cuando el resorte está indeformado, determinar la posición x a la que se detendrá el bloque y la fuerza F_s del resorte en esta posición en el caso en que

a. El movimiento inicial vaya hacia la izquierda.
b. El movimiento inicial vaya hacia la derecha.

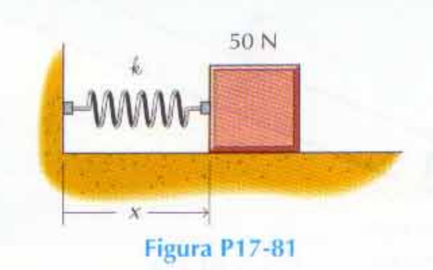


Figura P17-81

17-82* En un juego de habilidad, los jugadores hacen que se deslicen monedas por una superficie de madera, según se indica en la figura P17-82. Para ganar, la moneda ha de detenerse entre las líneas C y D de la superficie inferior. El coeficiente de rozamiento entre las monedas de 5 g y el suelo vale 0,2, las aristas son bruscas pero lisas y el punto desde el cual el jugador ha de soltar la moneda se halla a 1 m de la arista B. Determinar el campo de velocidades iniciales correspondientes a tiros ganadores.

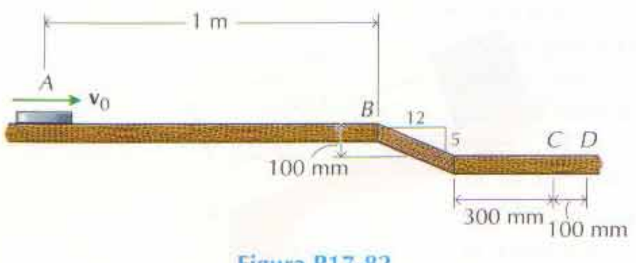


Figura P17-82

17-83 Un peso de 2,5 N se desliza por una varilla exenta de rozamiento, situada en un plano vertical, según se indica en la figura P17-83. La longitud natural del resorte es $\ell_0 = 15$ cm, su constante es $k = 83$ N/m y la distancia $d = 45$ cm. Si se tira del peso hacia abajo una distancia b y se suelta partiendo del reposo, determinar

a. La mínima distancia b para la cual el peso recorrería toda la varilla hasta la posición C.
b. La celeridad que llevaría el peso en C.

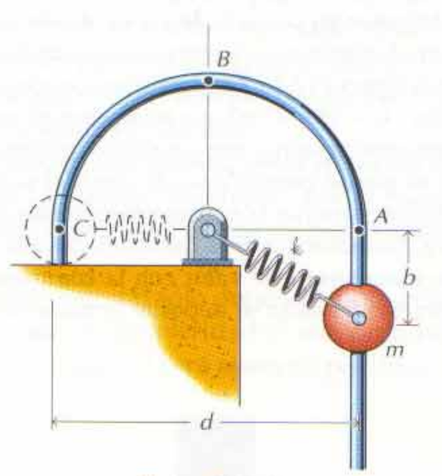


Figura P17-83

17-84* La fuerza retardadora, debida a la resistencia del aire, ejercida sobre un ciclista viene dada por

$$F_R = 0{,}8\, v^2$$

donde v se expresa en metros por segundo. Si el ciclista puede desarrollar una potencia de 200 W, determinar la celeridad que puede mantener

a. En el llano.
b. Subiendo una pendiente de 5°.
c. Bajando una pendiente de 5°.

17-85 La presión en el cuerpo de bomba cilíndrico de la figura P17-85 es inversamente proporcional al volumen (p = constante/volumen). La presión en el interior es igual a la atmosférica ($p_{atm} = 1{,}013 \times 10^5$ Pa) cuando el émbolo de 25 N de peso está en $x = 25$ cm. Si $dx/dt = -1{,}2$ m/s cuando $x = 25$ cm, determinar la carrera ($x_{mín}$ y $x_{máx}$) del émbolo.

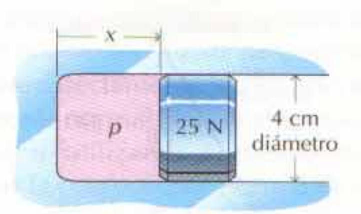


Figura P17-85

17-86 En un juego de habilidad, los participantes lanzan monedas hacia arriba por un plano inclinado mediante un émbolo accionado por resorte, para que caigan en un canal de anchura 50 mm según se indica en la figura P17-86. El coeficiente de ro-

zamiento entre las monedas de 5 g y el piso de madera vale 0,2 y la constante del resorte es k = 75 N/m. Si se tira hacia atrás del émbolo una distancia δ y se suelta partiendo del reposo, determinar la gama de valores de δ que daría tiros ganadores. (Despréciese el pequeño tamaño de la moneda cuando se decida si cae en el canal).

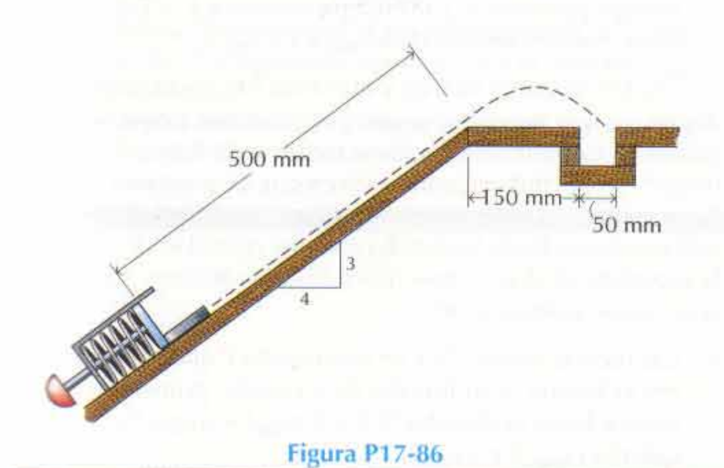


Figura P17-86

17-87* La fuerza retardadora ejercida sobre un vehículo que se mueve con celeridad v viene dada por

$$F_R = 0{,}017W + 0{,}067v^2 \text{ N}$$

donde W es el peso del vehículo expresado en newton, C es una constante que depende de la forma y tamaño del vehículo y v se expresa en metros por segundo. Si un camión de peso 18 kN que transporta una carga de 7,5 kN (C = 18) al mercado mantiene una celeridad constante de 72 km/h, determinar

a. La potencia que hay que entregar a las ruedas.
b. La celeridad que puede mantener el camión al regresar vacío del mercado (C = 14) para la misma potencia.

Problemas para resolver con ordenador

C17-88 Un cubo de hielo se desliza por el interior de una superficie cilíndrica exenta de rozamiento, según se indica en la figura P17-88. La masa del cubo es de 20 g y el radio del cilindro es r = 300 mm. Si el cubo de hielo parte del reposo en θ = 75°, calcular y representar gráficamente la energía cinética T, la energía potencial V, la energía mecánica $E = T + V$ y la fuerza normal N que el cilindro ejerce sobre el cubo, todo en función del ángulo θ ($-60° \leq \theta \leq 75°$). (Tómese el cero de energía potencial en $\theta = 90°$).

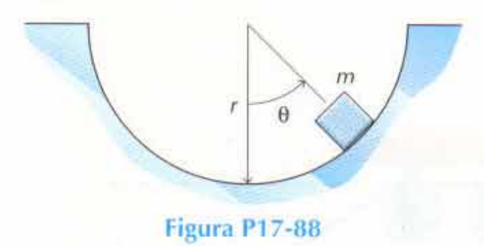


Figura P17-88

C17-89 El péndulo representado en la figura P17-89 consiste en una lenteja de peso 20 N situada al extremo de un hilo de 45 cm. Se suelta el péndulo a partir del reposo en $\theta = \theta_0 = 60°$. El cero de energía potencial se toma en $\theta = 90°$.

a. Calcular y representar gráficamente la energía cinética T, la energía potencial V, la energía mecánica $E = T + V$ y la tensión P del hilo, todo en función del ángulo θ ($-45° \leq \theta \leq 60°$).
b. Si el hilo se rompe cuando la tensión alcanza los 35 N, determinar el ángulo θ_r correspondiente a la rotura. Calcular y representar gráficamente el movimiento (y en función de x) de la lenteja del péndulo a partir del instante en que se suelta hasta que llega al suelo.

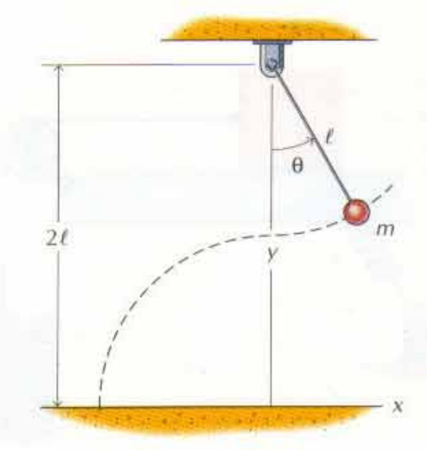


Figura P17-89

C17-90 Un cubo de hielo que está en equilibrio sobre una pelota de playa sufre una perturbación y comienza a deslizarse (fig. P17-90). La masa del cubo es de 20 g y el radio de la pelota 300 mm. Tómese nula la energía potencial en el centro de la pelota $\theta = 90°$.

a. Calcular y representar gráficamente la energía cinética T, la enegía potencial V, la energía mecánica $E = T+V$ y la fuerza normal N entre la pelota y el cubo de hielo, todo en función del ángulo θ ($0° \leq \theta \leq \theta_{máx}$). ¿A qué ángulo $\theta_{máx}$ perderá contacto el cubo con la pelota?
b. Calcular y representar gráficamente el movimiento (y en función de x) del cubo de hielo a partir del instante en que se suelta hasta que llega al suelo.

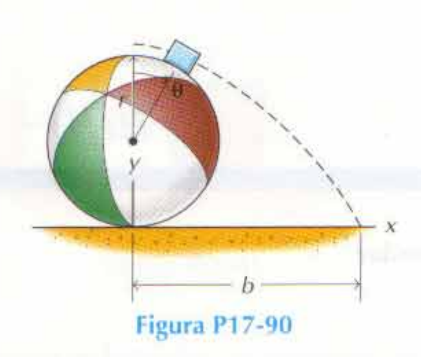


Figura P17-90

C17-91 Un bloque A y un bloque B, cuyos pesos respectivos son 20 N y 40 N, están unidos mediante un hilo inextensible que pasa por una pequeña polea exenta de rozamientos, según se indica en la figura P17-91. El bloque A está también unido a un resorte de constante k = 800 N/m y longitud natural 30 cm.

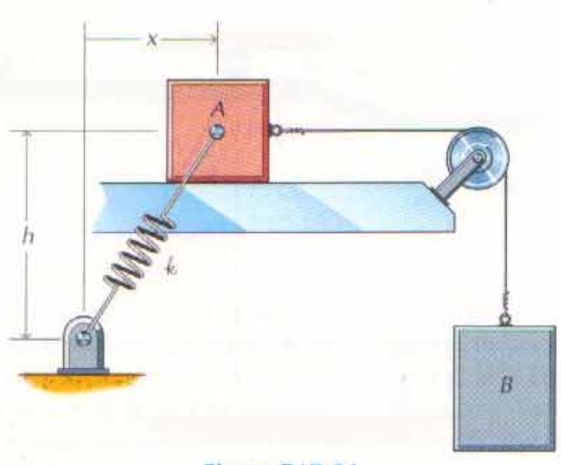


Figura P17-91

Cuando $x = 0$, el bloque A se está moviendo hacia la derecha con una celeridad de 3 m/s. Si la superficie de A es lisa y $h = 45$ cm,

a. Determinar el recorrido ($x_{mín}$ y $x_{máx}$) del bloque A. ¿Es $|x_{mín}| = |x_{máx}|$?
b. Calcular y representar gráficamente la energía cinética T, la energía potencial V y la energía mecánica $E = T+V$ del sistema, todo en función de $x(x_{mín} \leq x \leq x_{máx})$

C17-92 Un bloque A de 2 kg y otro B de 5 kg están unidos mediante un hilo inextensible que pasa por una pequeña polea exenta de rozamientos, según se indica en la figura P17-91. El bloque A está también unido a un resorte de constante k = 750 N/m y longitud natural 300 mm. Cuando $x = 0$, el bloque A se está moviendo hacia la derecha con una celeridad de 3 m/s. Si la superficie de A es rugosa ($\mu = 0{,}35$) y $h = 400$ mm, calcular y representar gráficamente

a. Las fuerzas normal N y de rozamiento F que se ejercen sobre el bloque A en función de x cuando primeramente se mueve hacia la derecha ($0 \leq x \leq x_{máx}$) y luego hacia la izquierda ($x_{máx} \geq x \geq x_{mín}$).
b. El trabajo $U^{(o)}$ que efectúa el rozamiento sobre el bloque A cuando se mueve de su posición inicial $x = 0$ a la posición $x_{máx}$ y luego a la $x_{mín}$.
c. La energía cinética T, la energía potencial V y la energía mecánica $E = T+V$ del sistema, todo en función de x ($0 \leq x \leq x_{máx}$ y $x_{máx} \geq x \geq x_{mín}$).

C17-93 Un bloque A y otro B, de pesos respectivos 25 N y 5 N, están unidos mediante un hilo inextensible que pasa por dos pequeñas poleas exentas de rozamientos, según se indica en la figura P17-93. El bloque A está también unido a un resorte de constante k = 1417 N/m. La superficie de A es lisa y $h = 45$ cm. Si se suelta el sistema a partir del reposo en $x = 40$ cm estando estirado el resorte 15 cm,

a. Determinar el alcance $x_{máx}$ del recorrido del bloque A.
b. Calcular y representar gráficamente la energía cinética T, la energía potencial V y la energía mecánica $E = T + V$ del sistema, todo en función de x (40 cm $\leq x \leq x_{máx}$).

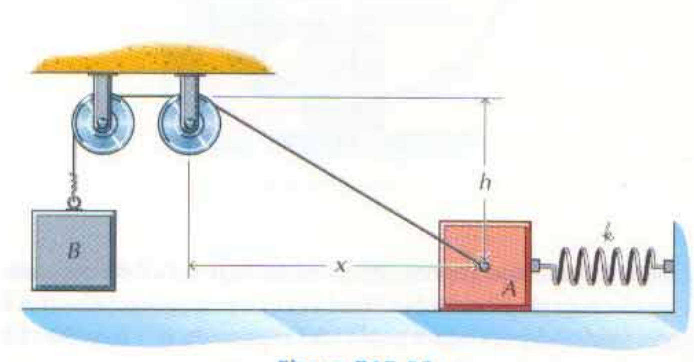


Figura P17-93

C17-94 Un bloque A de 10 kg y un bloque B de 2 kg están unidos mediante un hilo inextensible que pasa por dos pequeñas poleas exentas de rozamientos, según se indica en la figura P17-94. El bloque A está también unido a un resorte de constante $k = 1000$ N/m. La superficie de A es rugosa ($\mu = 0{,}35$). Si se suelta el sistema a partir del reposo en $x = 400$ mm y el resorte está estirado 150 mm, calcular y representar gráficamente

a. El trabajo $U^{(\rho)}$ que efectúa el rozamiento sobre el bloque A cuando va de su posición inicial $x = 0$ a la posición $x_{máx}$ y luego a la $x_{mín}$.

b. La energía cinética T, la energía potencial V y la energía mecánica $E = T + V$ del sistema, todo en función de x ($0 \leq x \leq x_{máx}$ y $x_{máx} \geq x \geq x_{mín}$).

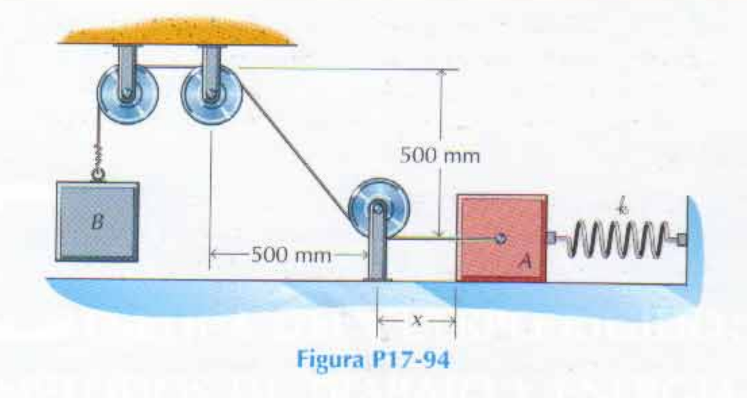
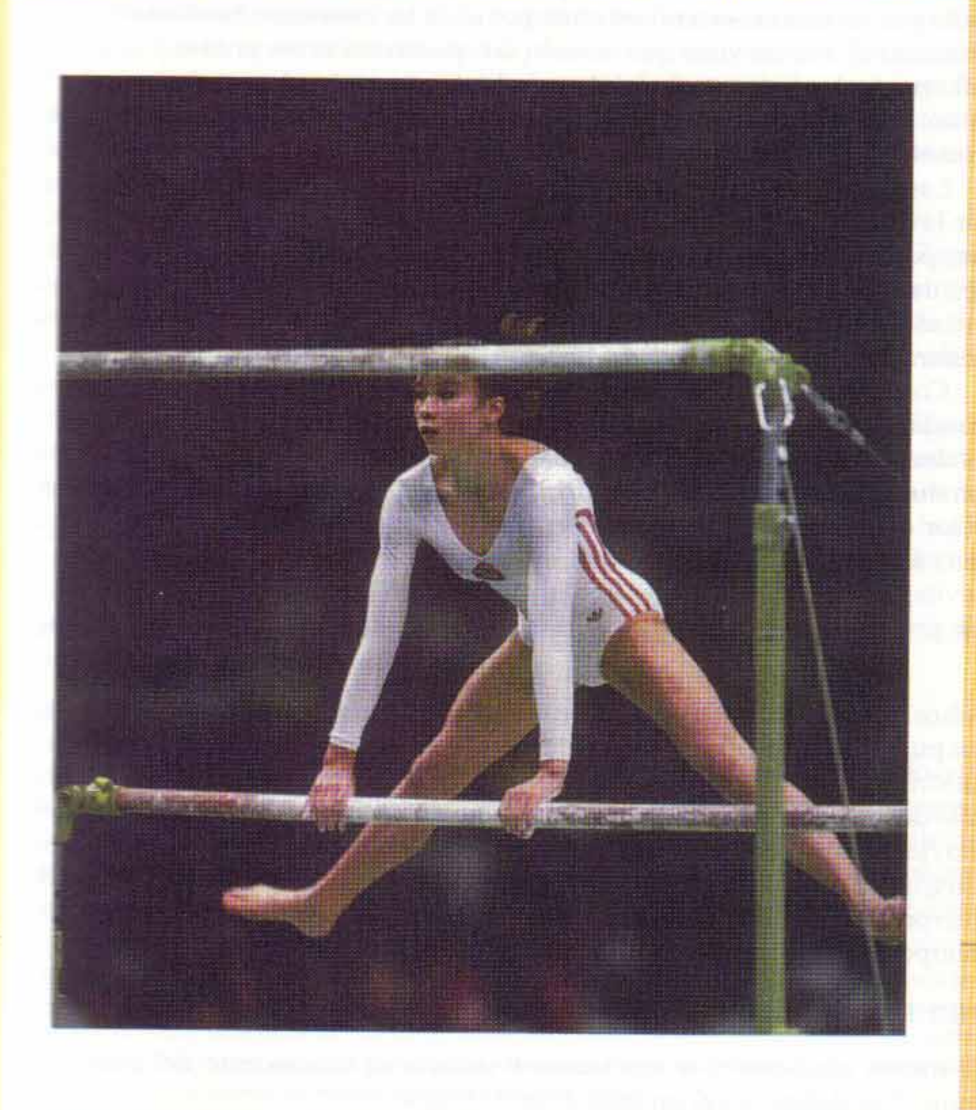


Figura P17-94

18 Cinética del cuerpo rígido: métodos de trabajo y energía



La gimnasta utiliza la robustez de sus brazos y el peso de su cuerpo para crear las fuerzas y momentos que necesita para ejecutar movimientos gimnásticos en las paralelas asimétricas.

18.1 INTRODUCCIÓN

El método del trabajo y la energía combina los principios de la Cinemática con la segunda ley de Newton para relacionar directamente la posición y la celeridad de un cuerpo. Por tanto, este método no constituye un principio nuevo sino que es una manera particular de resolver las ecuaciones diferenciales que surgen al aplicar la segunda ley de Newton. A pesar de todo, el método trabajo-energía facilita en gran manera la solución de cierta clase de problemas.

En el método del trabajo y la energía, la segunda ley de Newton se integra, en un sentido general, respecto a la posición. Para que dicho método sea útil, las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo deben ser función de la posición solamente. En el caso de fuerzas conservativas, las integrales resultantes se pueden expresar en forma explícita en un sentido general. El resultado es una simple ecuación algebraica que relaciona las celeridades del cuerpo en dos posiciones diferentes durante su movimiento.

En el caso de un sistema de puntos materiales genérico, el método trabajo-energía no ha resultado ser especialmente útil. Ello se debe a que (1) los movimientos de los distintos puntos no están relacionados entre sí y se han de especificar independientemente y (2) que hay que considerar el trabajo efectuado tanto por las fuerzas exteriores como por el de las interiores. No obstante, en el apartado 17.4 se ha visto que cuando dos partículas están unidas por un vínculo rígido, los trabajos efectuados por las fuerzas interiores se destruyen. Por tanto, el método trabajo-energía resulta muy útil cuando el sistema de puntos materiales forme un cuerpo rígido, que es el caso que se trata en este capítulo.

Las principales ventajas del método trabajo-energía (no es necesario conocer la aceleración e integrarla para determinar la variación de velocidad del cuerpo; las fuerzas que no trabajan no tienen efecto alguno sobre las ecuaciones trabajo-energía y no hay por qué incluirlas) son también las principales limitaciones del método (el método del trabajo y la energía no puede determinar aceleraciones ni fuerzas que no trabajen sobre el cuerpo).

Como junto con el método del trabajo y la energía se utiliza a menudo la segunda ley de Newton, deberá dibujarse un diagrama de sólido libre completo. Es decir, deberán representarse todas las fuerzas y no solamente las que trabajen durante un movimiento particular del cuerpo. También puede ser útil dibujar diagramas de sólido libre separados correspondientes a las posiciones inicial y final del cuerpo.

18.2 TRABAJO DE FUERZAS Y PARES QUE SE EJERCEN SOBRE UN CUERPO RÍGIDO

Sobre los cuerpos rígidos pueden ejercerse tanto fuerzas como pares o momentos puros. Además, el cuerpo puede estar animado tanto de movimiento de rotación como de movimiento de traslación. El trabajo efectuado por una fuerza sólo depende del movimiento de su punto de aplicación. No depende de si este movimiento se debe a una traslación o una rotación del cuerpo rígido. Sin embargo, veremos que un momento no efectúa trabajo debido a la traslación del cuerpo sobre el cual se ejerce. Los momentos sólo efectúan trabajo sobre un cuerpo cuando éste está en rotación.

18.2.1 Trabajo de fuerzas

El trabajo efectuado por una fuerza **P** durante el movimiento del punto 1 al punto 2 se definió en el capítulo 17 en la forma

$$U_{1\to 2} = \int_1^2 \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} \qquad (18\text{-}1)$$

El cálculo del trabajo utilizando la ecuación 18-1 no depende de que la fuerza esté aplicada a una partícula, a un cuerpo rígido en traslación, a un cuerpo rígido en rotación o a un cuerpo rígido animado de traslación y rotación simultáneamente. En el apartado 17.2 se estudió el trabajo efectuado por diversos tipos de fuerzas y no lo vamos a repetir aquí.

En el caso de fuerzas conservativas, la energía potencial V se define y determina de igual manera que se hizo para un punto material. El trabajo efectuado por fuerzas conservativas se puede calcular por integración directa utilizando la ecuación 18-1 o utilizando funciones energía potencial tal como se vio en el apartado 17.5.

18.2.2 Trabajo de las fuerzas interiores

El trabajo efectuado por las fuerzas interiores en un cuerpo rígido no tiene por qué considerarse. Las fuerzas de interacción entre dos puntos de un cuerpo rígido son siempre, dos a dos, de igual recta soporte y módulo pero de sentidos opuestos. Sin embargo, como el cuerpo es rígido, los dos puntos siempre sufrirán el mismo desplazamiento en la dirección de las fuerzas. Por tanto, el trabajo que una fuerza ejerce sobre uno de los puntos se destruye con el que efectúa la otra fuerza sobre el otro punto y el trabajo total efectuado por la pareja de fuerzas interiores será nulo[1]. Es decir, el trabajo que sobre un cuerpo *rígido* efectúa un sistema de fuerzas exteriores es igual a la suma algebraica de los trabajos efectuados por las distintas fuerzas.

Tampoco hay que considerar el trabajo que sobre una pareja de cuerpos rígidos efectúan pasadores de conexión lisos o hilos flexibles inextensibles. También ahora aparecen, dos a dos, fuerzas de igual módulo y sentidos opuestos y los puntos a los que están aplicadas sufren desplazamientos iguales en la dirección de las fuerzas. Por tanto, será nulo el trabajo total que efectúan sobre los cuerpos los miembros de conexión.

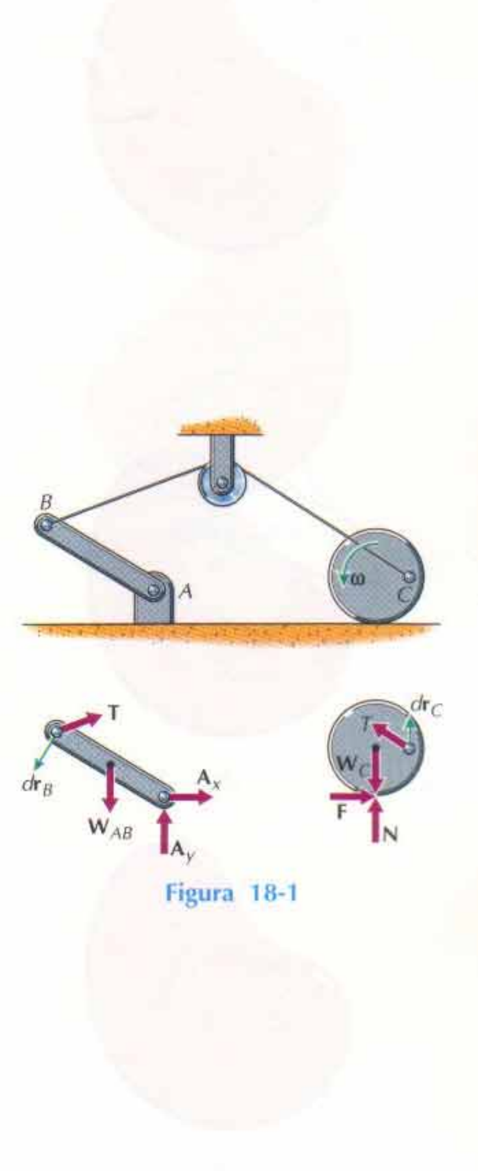


Figura 18-1

Por ejemplo, si es despreciable la masa del hilo representado en la figura 18-1, las tensiones en los dos extremos del hilo serán iguales. Ahora bien, como el hilo es inextensible, el desplazamiento según el hilo en B y el desplazamiento según el hilo en C también deben ser iguales. Una de las fuerzas tendrá la dirección y sentido del desplazamiento y efectuará un trabajo positivo; la otra tendrá sentido opuesto al del desplazamiento y efectuará un trabajo negativo. Por tanto, el trabajo total que efectuarán estas dos fuerzas sobre la pareja de cuerpos, mediante el hilo, deberá ser nulo.

18.2.3 Trabajo de pares y momentos

El trabajo que efectúa un par se obtiene calculando por separado el trabajo que efectúa cada fuerza y sumándolos. Por ejemplo, consideremos un par **C** que se ejerza sobre un cuerpo rígido tal como se indica en la figura 18-2*a*. Durante un tiempo muy corto dt, el cuerpo se traslada y gira. Si $d\mathbf{r} = ds_t\,\mathbf{e}_t$ es el desplazamiento del punto A, tomemos un segundo punto B tal que el segmento AB sea

---

[1] Si el cuerpo no fuese rígido, las fuerzas interiores seguirían siendo, dos a dos, de igual recta soporte y módulo pero de sentidos opuestos. Ahora bien, las componentes de los desplazamientos en la dirección y sentido de las fuerzas no serían, en general, de igual valor absoluto. Por tanto, los trabajos efectuados por cada pareja de fuerzas interiores no se destruirían y el trabajo total efectuado por el sistema de fuerzas interiores no sería nulo.

perpendicular a $d\mathbf{r}$. El movimiento que lleva el punto A a la posición A' llevará B a B'. Este movimiento se puede descomponer en dos: primero una traslación que lleve el segmento AB a $A'\hat{B}$ y a continuación una rotación $d\theta$ alrededor de A'que lleve $\hat{B}$ a B' (fig. 18-2*b*).

Representemos ahora el par por las dos fuerzas de módulo $P = C/b$ de dirección perpendicular a la recta AB (fig. 18-2*c*). Durante la parte traslatoria del movimiento, una fuerza efectúa el trabajo positivo $P\,ds_t$ y la otra el trabajo negativo $-P\,ds_t$; por tanto, la suma de los trabajos que las dos fuerzas efectúan sobre el cuerpo durante la parte traslatoria del movimiento es nula.

Durante la parte rotatoria del movimiento, A' es un punto fijo y la fuerza aplicada a A' no trabaja. El trabajo efectuado por la fuerza en B es $dU = P\,ds_r \cong Pb\,d\theta$, donde $d\theta$ se expresa en radianes y $C = Pb$ es el módulo del momento del par aplicado. El trabajo es positivo si el par tiene el mismo sentido que $d\theta$ y negativo si el par tiene el sentido opuesto. Por tanto, el trabajo total efectuado por el par durante esta rotación elemental es

$$dU = C\,d\theta = \mathbf{C}\cdot d\boldsymbol{\theta} \qquad (18\text{-}2)$$

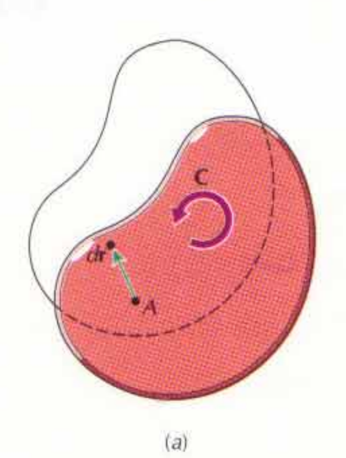
donde $\mathbf{C} = C\,\mathbf{k}$ y $d\boldsymbol{\theta} = d\theta\,\mathbf{k}$.

El trabajo que el par efectúa sobre el cuerpo cuando éste gira un ángulo $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ se obtiene integrando la ecuación 18-2:

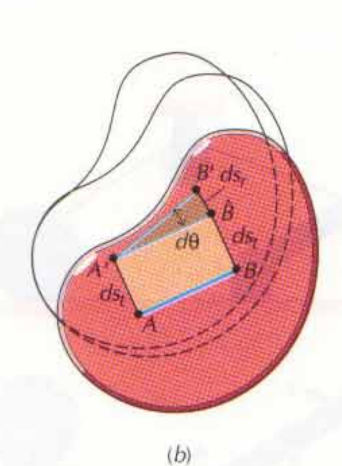
$$U_{1\to 2} = \int_1^2 dU = \int_{\theta_1}^{\theta_2} C\,d\theta \qquad (18\text{-}3)$$

Si el par es constante, podremos sacar C fuera de la integral y la ecuacion 18-3 queda en la forma

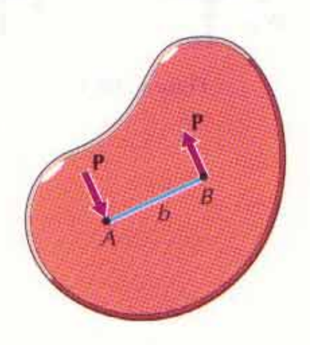
$$U_{1\to 2} = C\int_1^2 d\theta = C(\theta_2 - \theta_1) = C\,\Delta\theta \qquad (18\text{-}4)$$



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Figura 18-2

18.2.4 Fuerzas que no trabajan

Una de las principales ventajas del método del trabajo y la energía es que en la ecuación no figuran las fuerzas que no trabajan. Algunas de las más evidentes fuerzas de este tipo son:

1. Fuerzas aplicadas a puntos que no se mueven. Por ejemplo, cuando una rueda gira en torno a un eje fijo, exento de rozamiento, las fuerzas que este eje ejerce sobre la rueda no trabajan.
2. Fuerzas perpendiculares al movimiento. Por ejemplo, la fuerza normal que se ejerce sobre un cuerpo que se deslice o ruede sobre una superficie no trabaja.

No tan evidente es el hecho de que la fuerza de rozamiento que se ejerce sobre un cuerpo que rueda sin deslizamiento tampoco trabaja. La razón de que no trabaje la fuerza de rozamiento es que el punto de contacto es un centro instantáneo de rotación y por tanto se halla instantáneamente en reposo. Como el punto de aplicación de la fuerza no se mueve (en el instante considerado)

$$dU = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}_{IC} = \mathbf{F}\cdot(\mathbf{v}_{IC}\,dt) = 0 \qquad (18\text{-}5)$$

y por tanto, la fuerza de rozamiento no trabaja.

18.3 ENERGÍA CINÉTICA DE UN CUERPO RÍGIDO EN MOVIMIENTO PLANO

La energía cinética de un cuerpo se obtiene sumando las energías cinéticas de todos los puntos que lo constituyen. En el caso de un cuerpo cualquiera que no sea rígido, no existe ninguna ecuación sencilla que relacione los movimientos de los distintos puntos; no existe una expresión general de la energía cinética del cuerpo. En cambio, cuando el cuerpo es rígido, las velocidades de sus puntos están relacionadas por la ecuación de la velocidad relativa. Esta relación permite obtener una fórmula particularmente sencilla que exprese la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano.

Por ejemplo, consideremos el cuerpo representado en la figura 18-3. El punto A es un punto cualquiera del cuerpo y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{P/A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es el vector de posición trazado desde A hasta un punto arbitrario P de masa dm, del cuerpo. La velocidad de dm estará relacionada con la velocidad del punto A por la ecuación de la velocidad relativa

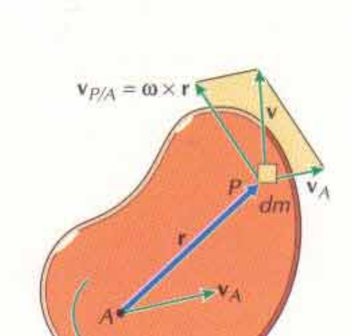


Figura 18-3

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{P/A} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad (18\text{-}6)$$

y la energía cinética del punto podrá escribirse en la forma

$$\begin{aligned} dT &= \frac{1}{2}dm\, v^2 = \frac{1}{2}dm\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ &= \frac{1}{2}dm\, (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \qquad (18\text{-}7) \\ &= \frac{1}{2}dm\, v_A^2 + dm\, \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{2}dm\, (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \end{aligned}$$

Como el cuerpo está en movimiento plano, su velocidad angular sólo tendrá componente z. Es decir, $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ con lo cual

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega(x\mathbf{j} - y\mathbf{i}) \qquad (18\text{-}8)$$

y

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \omega^2(x^2 + y^2) \qquad (18\text{-}9)$$

Por tanto, la energía cinética de la porción de masa dm será

$$dT = \frac{1}{2}dm\, v_A^2 + dm\, \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{2}dm\, \omega^2(x^2 + y^2) \qquad (18\text{-}10)$$

Integrando la ecuación 18-10 para toda la masa del cuerpo y teniendo en cuenta que $\mathbf{v}_A$ y $\boldsymbol{\omega}$ no dependen de dm tenemos

$$T = \frac{1}{2}\, v_A^2 \int dm + \mathbf{v}_A \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \int \mathbf{r}\, dm \right) + \frac{1}{2}\, \omega^2 \int (x^2 + y^2)\, dm \qquad (18\text{-}11)$$

Ahora bien, la integral del primer término de la ecuación 18-11 no es más que la masa total del cuerpo ($\int dm = m$); la integral del segundo término nos determina la situación del centro de masa medida desde el punto A ($\int \mathbf{r}\, dm = m\mathbf{r}_{G/A}$)

y la integral del último término es el momento de inercia respecto a un eje que pasa por el punto A y es paralelo al eje $z\left(\int (x^2+y^2)\ dm = I_{Az}\right)$; así pues[1]

$$T = \frac{1}{2}mv_A^2 + m\mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{G/A}) + \frac{1}{2}I_{Az}\omega^2 \qquad \text{(18-12)}$$

Aun cuando la ecuación 18-12 constituye la expresión general de la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano, resulta demasiado complicada y rara vez se usa. Esta ecuación se simplifica mucho en los tipos corrientes de movimiento plano que veremos más adelante. Incluso en el caso más general de movimiento plano, la ecuación 18-12 se puede simplificar mucho eligiendo el punto arbitrario A de manera adecuada.

18.3.1 Traslación de un cuerpo rígido

Cuando un cuerpo rígido se mueve sin girar, su velocidad angular es nula $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ y todos los puntos llevan la misma velocidad. En tal caso, la ecuación 18-12 se reduce a

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(18-13)}$$

donde v es la celeridad de un punto cualquiera del cuerpo. Está claro que la idealización del movimiento de un punto no es sino la traslación pura de un cuerpo rígido.

18.3.2 Rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo

Si el punto A es un punto del eje de rotación de un cuerpo rígido que gira en torno a un eje fijo, será $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ y la ecuación 18-12 se simplifica quedando en la forma

$$T = \frac{1}{2}I_{Az}\omega^2 \qquad \text{(18-14)}$$

Notemos, no obstante, que la ecuación 18-14 también es cierta si el punto A es centro instantáneo de rotación. La reducción de la ecuación 18-12 a la 18-14 exige solamente que el punto A tenga velocidad nula en el instante del cálculo.

18.3.3 Cuerpo rígido animado de un movimiento plano cualquiera

El movimiento más general de un cuerpo rígido consiste en una combinación de traslación y rotación. Ahora bien, incluso en el caso de un movimiento plano cualquiera de un cuerpo rígido, la ecuación 18-12 se puede simplificar en gran manera eligiendo adecuadamente el punto A. Por ejemplo, cuando se toma el punto A en el centro de masa G del cuerpo, tendremos $\mathbf{r}_{G/A} = \mathbf{0}$ y

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_{Gz}\omega^2 \qquad \text{(18-15)}$$

[1] Aun cuando no resulte evidente de lo deducido hasta ahora, los resultados obtenidos no se limitan al movimiento de bloques planos o al movimiento de cuerpos que sean simétricos respecto al plano de referencia. La ecuación 18-12 y las otras ecuaciones que de ella se deducen (ecs. 18-13, 18-14 y 18-15) se pueden aplicar al estudio del movimiento plano de cualquier cuerpo rígido, cualquiera que sea su forma. (Véase el apartado 18.6.)

donde v_G es la celeridad del centro de masa del cuerpo e I_{Gz} es el momento de inercia respecto a un eje que pase por el centro de masa G y sea paralelo al eje z (perpendicular al plano del movimiento). El primer término de la ecuación 18-15 no es más que la energía cinética asociada a la traslación del centro de masa del cuerpo y el segundo término es la energía cinética asociada a la rotación del cuerpo en torno a un eje que pase por su centro de masa.

El caso particular de la rotación en torno a un eje fijo que pase por un punto arbitrario A (ec. 18-14) está también contenido en la expresión general de la energía cinética (ec. 18-15). Cuando el cuerpo gire en torno a un eje fijo que pase por A, la velocidad del centro de masa viene dada por

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{G/A} = \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{G/A} \tag{18-16}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} v_G^2 &= \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{v}_G = (\omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{G/A}) \cdot (\omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{G/A}) \\ &= (\omega x_G\mathbf{j} - \omega y_G\mathbf{i}) \cdot (\omega x_G\mathbf{j} - \omega y_G\mathbf{i}) \\ &= \omega^2(x_G^2 + y_G^2) = \omega^2 d^2 \end{aligned} \tag{18-17}$$

donde $d^2 = x_G^2 + y_G^2$ es el cuadrado de la distancia del centro de masa G al eje de rotación. Así pues, la energía cinética será

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_{Gz}\omega^2 = \frac{1}{2}(md^2 + I_{Gz})\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}I_{Az}\omega^2 \end{aligned} \tag{18-18}$$

donde $I_{Az} = I_{Gz} + md^2$ en virtud del teorema de Steiner.

18.4 TRABAJO Y ENERGÍA EN EL MOVIMIENTO PLANO DE UN CUERPO RÍGIDO

El principio del trabajo y la energía para un cuerpo rígido se obtiene sumando las ecuaciones que expresan el teorema de las fuerzas vivas correspondientes a los distintos puntos que constituyen el cuerpo rígido. Ello nos da

$$U_{1\to 2} = T_2 - T_1$$

en donde T_1 y T_2 son las energías cinéticas totales de todos los puntos que constituyen el cuerpo (dadas por la ec. 18-15); $U_{1\to 2}$ es el trabajo total efectuado por todas las fuerzas y pares exteriores que se ejercen sobre dichos puntos, y no es necesario considerar el trabajo de las fuerzas interiores. Trasponiendo términos, tenemos el principio del trabajo y la energía para un cuerpo rígido en la forma

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \tag{18-19}$$

que es igual a la ecuación 17-9*b* correspondiente a un punto material. La diferencia que hay entre estas ecuaciones es que los términos de la energía cinética de la ecuación 18-19 incluyen la energía cinética de rotación del cuerpo rígido además de la energía cinética de traslación y que el término del trabajo incluye el efectuado por los momentos exteriores, además del efectuado por las fuerzas exteriores, que se ejercen sobre el cuerpo rígido.

Igual que sucedía en el caso de un punto material, el término del trabajo puede descomponerse en una parte correspondiente al trabajo $U_{1\to 2}^{(c)}$ efectuado por las fuerzas conservativas (cuyo potencial se conozca) y otra parte $U_{1\to 2}^{(o)}$ correspondiente a las demás fuerzas (las no conservativas que no derivan de un potencial y las conservativas cuyo potencial se desconozca). El trabajo efectuado por las fuerzas conservativas se puede expresar mediante las funciones potencial, con lo que la ecuación 18-19 queda en la forma

$$T_1 + V_1 + U_{1\to 2}^{(o)} = T_2 + V_2 \tag{18-20}$$

Cuando dos o más cuerpos rígidos estén unidos mediante hilos inextensibles o pasadores exentos de rozamiento, podremos escribir la ecuación 18-19 (o la 18-20) correspondiente a cada cuerpo. Al sumar las ecuaciones resultantes, los trabajos de las fuerzas de conexión se anularán dos a dos. Por tanto, las ecuaciones 18-19 y 18-20 expresan también el principio trabajo-energía para un sistema de cuerpos rígidos interconectados. En un tal sistema, T es la energía cinética total del sistema y $U_{1\to 2}(= V_1 + U_{1\to 2}^{(o)} - V_2)$ incluye el trabajo que las fuerzas y momentos exteriores efectúan sobre el sistema.

Tanto en el caso de un solo cuerpo rígido como en el de un sistema de cuerpos rígidos interconectados, se deberá dibujar un diagrama de sólido libre que nos asegure el haber identificado y considerado todas las fuerzas y momentos. Aun cuando pueda parecer innecesario incluir en él las fuerzas y momentos que no trabajan, a menudo el principio trabajo-energía se utiliza junto con la segunda ley de Newton. Por tanto, en el diagrama de sólido libre *deberán figurar todas las fuerzas y momentos exteriores* y no solamente las fuerzas y momentos que trabajen sobre el cuerpo o cuerpos.

Además de un diagrama de sólido libre completo del cuerpo o cuerpos, también puede resultar útil dibujar diagramas que representen las posiciones inicial y final del sistema para el intervalo de movimiento en cuestión.

18.5 POTENCIA

La potencia, que es el trabajo efectuado por unidad de tiempo, se definió y estudió en el apartado 17.8 para el caso de un punto material. En el caso de un cuerpo rígido en movimiento plano, el trabajo efectuado debe incluir tanto el efectuado por pares como el efectuado por fuerzas. Si sobre un cuerpo rígido se ejercen simultáneamente una fuerza **P** y un par de momento $\mathbf{C} = C\mathbf{k}$, el trabajo que se efectúa sobre el cuerpo es

$$dU = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{C} \cdot d\theta \tag{18-21}$$

en donde $d\mathbf{r}$ es el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza **P** y $d\boldsymbol{\theta} = d\theta\mathbf{k}$ es la rotación del cuerpo. Dividiendo la ecuación 18-21 por dt tendremos la potencia total entregada al cuerpo rígido en un instante

$$\text{potencia} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{18-22}$$

donde $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ es la velocidad del punto de aplicación de la fuerza **P** y $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{k}$ es la velocidad angular del cuerpo.

PROBLEMA EJEMPLO 18.1

El plato de un tocadiscos es un disco macizo de 30 cm de diámetro y peso 25 N. Si un motor aplica un par constante al plato y lo acelera desde el reposo hasta su celeridad de funcionamiento de $33\frac{1}{3}$ rpm en una sola revolución, determinar el momento **C** del par y la máxima potencia desarrollada por el motor.

SOLUCIÓN

En la figura 18-4 puede verse el diagrama de sólido libre del plato. Tan sólo el par **C** efectúa un trabajo $U_{1\to 2} = C\,\Delta\theta$, donde $\Delta\theta = 1$ rev $= 2\pi$ radianes. Como el movimiento es de rotación en torno a un eje fijo que pasa por el centro de masa del plato, la energía cinética viene dada por $T = \frac{1}{2} I_G \omega^2$, donde el momento de inercia es

$$I_G = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{9{,}81}\right)(0{,}15)^2 = 0{,}0287 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

la velocidad angular final es $\omega_f = \dfrac{33\frac{1}{3}\text{ rev/min}}{60\text{ s/min}}(2\pi\text{ rad/rev}) = 3{,}491$ rad/s y la velocidad angular inicial es nula. Por tanto, el teorema de las fuerzas vivas da

$$0 + C(2\pi) = \frac{1}{2}(0{,}0287)(3{,}491)^2$$

o sea

$$\mathbf{C} = 0{,}0278 \text{ m}\cdot\text{N} \circlearrowright \qquad \text{Resp.}$$

La potencia desarrollada por un par viene dada por $C\omega$. Como el par **C** es constante, la potencia será máxima cuando lo sea la velocidad angular; es decir

$$\text{potencia}_{\text{máx}} = (0{,}0278)(3{,}491) = 0{,}0971 \text{ W} \qquad \text{Resp.}$$

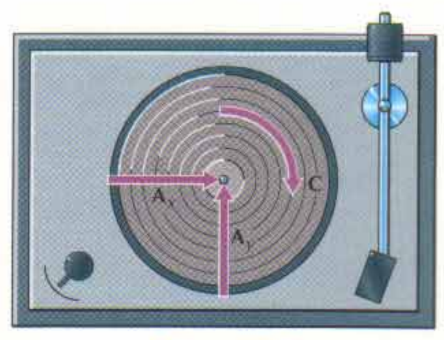


Figura 18-4

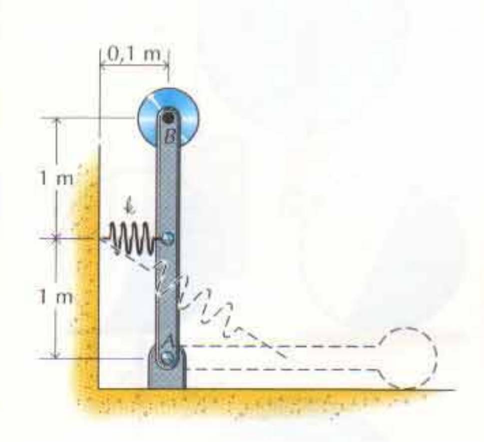
PROBLEMA EJEMPLO 18.2

Una masa concentrada de 4 kg está unida al extremo de una barra uniforme de 9 kg que puede girar en un plano vertical según se indica en la figura 18-5*a*. La barra *AB* tiene 2 m de longitud y una velocidad angular de 3 rad/s en sentido horario cuando se halla en posición vertical. Si la longitud natural del resorte es $\ell_0 = 0{,}25$ m, determinar la constante k del resorte que haría que la velocidad angular de *AB* fuese nula cuando la barra estuviese horizontal.

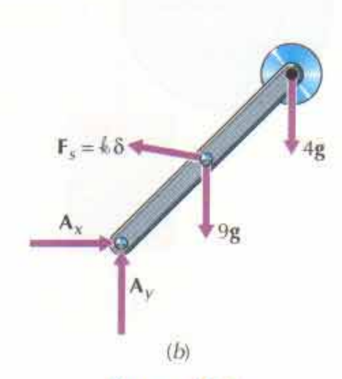
SOLUCIÓN

En la figura 18-5*b* puede verse el diagrama de sólido libre del sistema. Éste gira en torno a un eje fijo, por lo que su energía cinética vendrá dada por

$$T = \frac{1}{2} I_A \omega^2$$



(*a*)



(*b*)

Figura 18-5

donde el momento de inercia vale

$$I_A = \tfrac{1}{3}9(2)^2 + 4(2)^2 = 28{,}00 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Luego la energía cinética inicial será $T_i = \frac{1}{2}(28{,}00)(3)^2 = 126{,}00$ J y la energía cinética final $T_f = 0$.

Las dos fuerzas gravitatorias y la fuerza del resorte derivan de sendos potenciales. Tomando el cero de energía potencial gravitatoria en el punto A, se tiene

$$V_i = (9)(9{,}81)(1) + (4)(9{,}81)(2) + \frac{1}{2}k(0{,}1 - 0{,}25)^2$$
$$= 166{,}77 + 0{,}01125 \text{ J}$$

y

$$V_f = 0 + 0 + \frac{1}{2}k(1{,}4866 - 0{,}25)^2 = 0{,}7646\,k \text{ J}$$

Las fuerzas de reacción en A no trabajan y sobre el sistema no actúan fuerzas no conservativas $U_{1\to 2}^{(o)} = 0$. Aplicando todos estos valores en la ecuación que traduce el teorema de las fuerzas vivas, se tiene

$$126{,}00 + (166{,}77 + 0{,}01125\,k) + 0 = 0 + 7646\,k$$

o sea

$$k = 389 \text{ N/m}$$ Resp.

PROBLEMA EJEMPLO 18.3

La rueda representada en la figura 18-6*a* consiste en un semicírculo de madera que pesa 100 N contenido en un fleje circular de acero de 45 cm de diámetro y peso y grosor despreciables. Si rueda sin deslizamiento por un piso horizontal y tiene una velocidad angular de 15 rad/s en sentido horario cuando su centro de masa G se halla directamente debajo del centro C de la rueda, determinar:

a. La velocidad angular de la rueda cuando G se halle directamente a la izquierda de C.
b. Las componentes normal y de rozamiento de la fuerza que el suelo ejerce sobre la rueda cuando G se halla directamente a la izquierda de C.

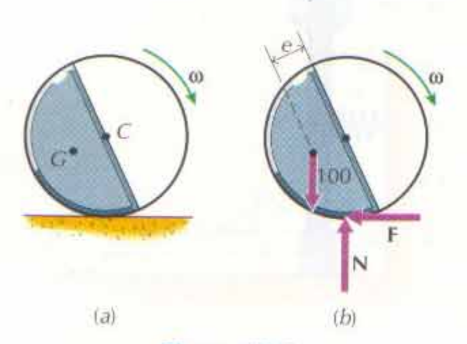


Figura 18-6

SOLUCIÓN

a. En la figura 18-6*b* puede verse el diagrama de sólido libre de la rueda. La única fuerza que efectúa trabajo sobre la rueda es su peso. Tomando el cero de energía potencial gravitatoria en el nivel del centro de la rueda, las energías potenciales inicial y final son

$$V_{gi} = (100)(-0{,}0955) = -9{,}55 \text{ J} \qquad V_{gf} = 0$$

donde $e = 4r/3\pi = 0{,}0955$ m es la distancia entre el centro C de la rueda y el centro de gravedad G.

Como la rueda se mueve con movimiento plano, su energía cinética vendrá dada por $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$ donde la velocidad del centro de masa es

$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{G/C} = r\omega\mathbf{i} + \mathbf{v}_{G/C}$, ω es la velocidad angular en sentido horario y el momento de inercia es

$$I_G = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)\left(\frac{100}{9{,}81}\right)(0{,}225)^2 = 0{,}16507 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Cuando G esté directamente debajo de C, $\mathbf{v}_{G/C} = -e\omega_i\mathbf{i}$ y la energía cinética inicial de la rueda será

$$T_i = \frac{1}{2}\left(\frac{100}{9{,}81}\right)[0{,}225(15) - 0{,}0955(15)]^2 + \frac{1}{2}(0{,}16507)(15)^2$$
$$= 37{,}80 \text{ J}$$

Cuando G se halle directamente a la izquierda de C, $\mathbf{v}_{G/C} = e\omega_f\mathbf{j}$ y la energía cinética final de la rueda será

$$T_f = \frac{1}{2}\left(\frac{100}{9{,}81}\right)[(0{,}225\omega_f)^2 + (0{,}0955\omega_f)^2] + \frac{1}{2}\,0{,}16507\omega_f^2$$
$$= 0{,}3870\omega_f^2 \text{ J}$$

Aplicando todas estas cantidades en la ecuación que traduce el teorema de las fuerzas vivas, se tiene

$$37{,}80 - 9{,}55 + 0 = 0{,}3870 w_f^2 + 0 \qquad \omega_f = 8{,}54 \text{ rad/s} \qquad \text{Resp.}$$

b. Cuando G se halle directamente a la izquierda de C, la aceleración del centro de masa será $\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{G/C} = (r\alpha\mathbf{i}) + (e\alpha\mathbf{j} + e\omega_f^2\mathbf{i})$. Entonces, las ecuaciones del movimiento

$$\rightarrow \Sigma F_x = ma_x: \qquad -F = \frac{100}{9{,}81}(0{,}225\alpha + 6{,}965)$$

$$\uparrow \Sigma F_y = ma_y: \qquad N - 100 = \frac{100}{9{,}81}(0{,}0955\alpha)$$

$$\circlearrowright \Sigma M_G = I_G\alpha: \qquad 0{,}225F - 0{,}0955N = 0{,}16507\alpha$$

dan

$$N = 72{,}4 \text{ N}\uparrow \qquad F = 6{,}08 \text{ N} \leftarrow \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 18.4

Una caja de 15 kg está sujeta al extremo de una cuerda inextensible arrollada sobre un tambor uniforme de 40 kg y 600 mm de diámetro, según se indica en la figura 18-7*a*. En el instante representado, la caja está cayendo a 9 m/s. Determinar el par constante **C** de freno que hay que aplicar al tambor para que la caja quede en reposo tras caer 3 m.

SOLUCIÓN

CINEMÁTICA

Como la cuerda no se desliza sobre el tambor, cuando la caja haya caído $\Delta y = 3$ m el tambor habrá girado $\Delta\theta = \Delta y/r = 3/0{,}3 = 10$ rad. Además, si la caja cae a razón de $v = 9$ m/s, el tambor estará girando a razón de $\omega = v/r = 9/0{,}3 = 30$ rad/s.

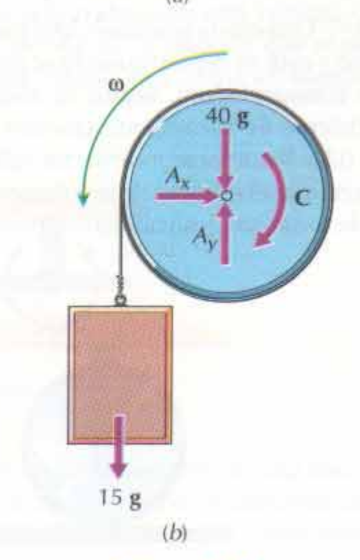


Figura 18-7

TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS

Como la caja está unida al tambor mediante una cuerda inextensible, el trabajo que ésta efectúa sobre el tambor y el que efectúa sobre la caja serán de igual valor absoluto pero de signos opuestos, por lo que no será necesario tenerlos en cuenta. Por tanto, caja y tambor se pueden tratar como un solo sistema; en la figura 18-7*b* puede verse su diagrama de sólido libre. Ni el peso del tambor ni las fuerzas que el eje le aplica efectúan trabajo. Las únicas fuerzas no conservativas que actúan sobre el sistema corresponden al par de freno **C** y su trabajo es

$$U_{1\to 2}^{(o)} = -C\,\Delta\theta = -10C$$

Tomando el cero de energía potencial gravitatoria en el nivel de la altura inicial de la caja, la energía potencial inicial es nula ($V_i = 0$) y la energía potencial final será

$$V_f = (15)(9{,}81)(-3) = -441{,}5\text{ J}$$

El movimiento del tambor es de rotación en torno a un eje fijo que pasa por su centro de masa, por lo que su energía cinética inicial será $T_t = \frac{1}{2}I_G\omega^2$ donde $I_G = \frac{1}{2}(40)(0{,}3)^2 = 1{,}800\text{ kg}\cdot\text{m}^2$. La caja se mueve sólo con movimiento de traslación, por lo que su energía cinética inicial será $T_C = \frac{1}{2}mv^2$. Por tanto, la energía cinética inicial del sistema es

$$T_i = \frac{1}{2}(15)(9)^2 + \frac{1}{2}(1{,}800)(30)^2 = 1417{,}5\text{ J}$$

y la energía cinética final es nula ($T_f = 0$). Aplicando todos estos valores en la ecuación que traduce el teorema de las fuerzas vivas, se tiene

$$1417{,}5 + 0 - 10C = 0 - 441{,}5$$

de donde

$$\mathbf{C} = 185{,}9\text{ m}\cdot\text{N}$$ Resp.

PROBLEMAS

18-1* Una rueda uniforme, que pesa 50 N, tiene 40 cm de diámetro y está en reposo cuando se pone en contacto con una correa transportadora, según se indica en la figura P18-1. El coeficiente de rozamiento cinético entre correa y rueda vale $\mu_k = 0{,}1$ y la correa se mueve con velocidad constante de 9 m/s. Determinar el número de revoluciones que efectúa la rueda antes de rodar sin deslizamiento sobre la correa en movimiento.

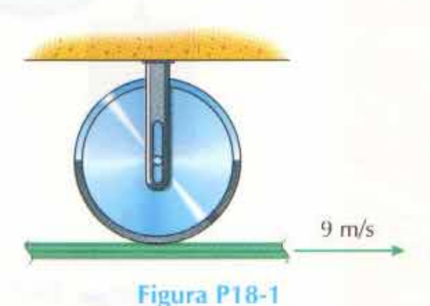


Figura P18-1

18-2* Un volante uniforme de 10 kg y 400 mm de diámetro está conectado a un par motor constante mediante una correa

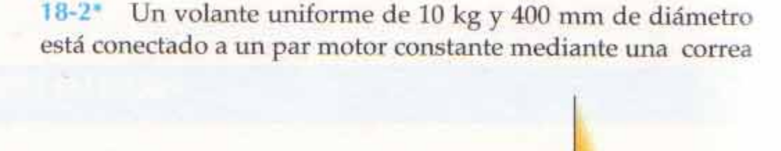


Figura P18-2

flexible según se indica en la figura P18-2. Si el volante parte del reposo, determinar el momento del par necesario para que el volante gira a 4200 rpm al cabo de 5 revoluciones.

18-3 El tambor uniforme de 125 N de peso representado en la figura P18-3 tiene 50 cm de diámetro y se halla en reposo inicialmente. Al extremo de una cuerda flexible arrollada sobre el tambor, se aplica una fuerza de 50 N. Si la cuerda se desprende del tambor cuando éste haya efectuado 3 revoluciones, determinar su velocidad angular final.

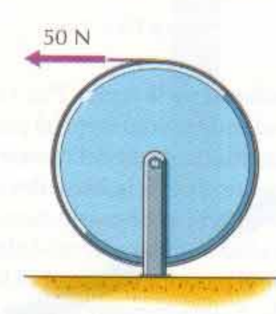


Figura P18-3

18-4* El volante de 5 kg de la figura P18-4 tiene un diámetro de 200 mm y un radio de giro de 90 mm. Sobre él está arrollada una cuerda flexible unida a un resorte de constante k = 120 N/m. Inicialmente, el volante gira en sentido horario a 20 rad/s y el resorte está estirado 800 mm. Determinar:

a. El máximo alargamiento que sufrirá el resorte.
b. La velocidad angular del volante cuando la cuerda se afloje.

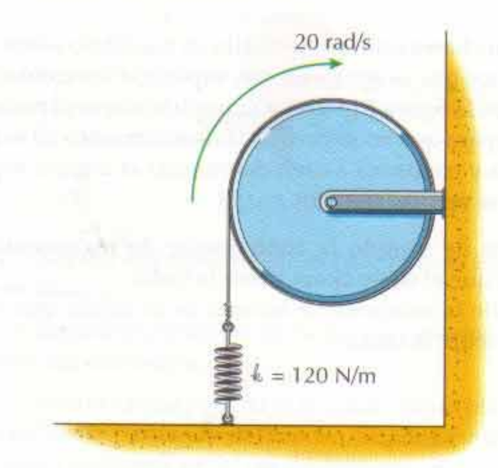


Figura P18-4

18-5 Una caja de peso 80 N pende de un hilo arrollado a un tambor uniforme de 90 cm de diámetro, según se indica en la figura 18-5. El sistema parte del reposo cuando la caja se halla 120 cm sobre el suelo. Determinar el peso del tambor que haría que la caja llegara al suelo con una velocidad mitad de la que tendría si cayera libremente desde la misma altura que se suelta.

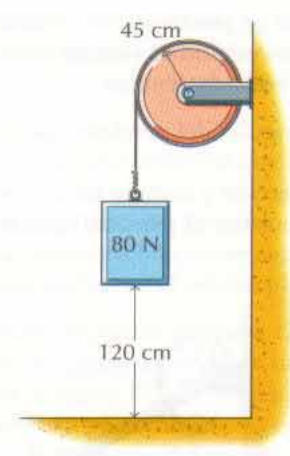


Figura P18-5

18-6* Una barra uniforme de 5 kg y 800 mm de longitud gira en un plano vertical según se indica en la figura P18-6. Si se suelta la barra partiendo del reposo en posición horizontal, determinar:

a. La velocidad angular de la barra cuando esté vertical.
b. El módulo, dirección y sentido de la reacción que el pasador en B ejerce sobre la barra cuando ésta forma un ángulo de 75° con la horizontal.



Figura P18-6

18-7 Una barra uniforme, que pesa 25 N y tiene una longitud de 90 cm, gira en un plano vertical bajo la acción de un par de 3,75 m · N según se indica en la figura P18-7. Si se suelta la barra partiendo del reposo cuando está horizontal, determinar

a. La velocidad angular de la barra cuando está vertical.
b. El módulo, dirección y sentido de la reacción que el pasador B ejerce sobre la barra cuando ésta forma un ángulo de 60° con la horizontal.

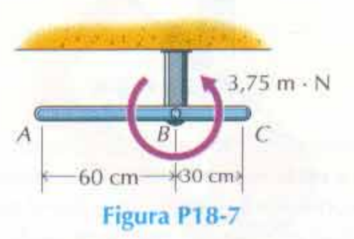


Figura P18-7

18-8* El péndulo de la figura P18-8 consiste en una masa de 30 kg concentrada en el extremo de una barra uniforme de 45 kg y 2 m de longitud. El péndulo oscila en un plano vertical

bajo la influencia de un par de 500 m · N en sentido horario. Si el péndulo tiene una velocidad angular de 4 rad/s, en sentido horario, cuando $\theta = 90°$, determinar:

a. La velocidad angular del péndulo cuando $\theta = 180°$, 330° y 450°.
b. El módulo, dirección y sentido de la reacción que el pasador en A ejerce sobre el péndulo cuando $\theta = 180°$, 330° y 450°.

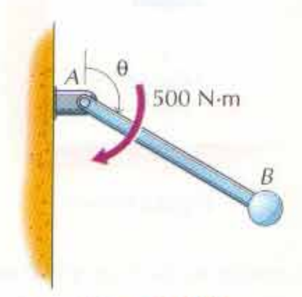


Figura P18-8

18-9* Una puerta rectangular de peso 40 N se abre hacia arriba estando equilibrada por un resorte, según se indica en la figura P18-9. La constante y la longitud natural del resorte son $k = 400$ N/m y $\ell_0 = 575$ mm, respectivamente. Si la puerta lleva una velocidad angular de 3 rad/s en sentido antihorario cuando está vertical ($\theta = 0°$), determinar su velocidad angular y el módulo, dirección y sentido de la reacción que el gozne ejerce sobre la puerta cuando ésta esté horizontal ($\theta = 90°$).

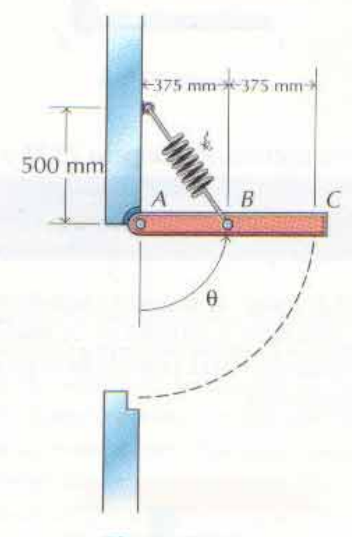


Figura P18-9

18-10 Un montante de 45 kg puede girar en un plano vertical según se indica en la figura P18-10. La constante y la longitud natural del resorte son $k = 140$ N/m y $\ell_0 = 2$ m, respectivamente. Si la velocidad angular del montante es de 3 rad/s en sentido horario cuando está vertical, determinar la velocidad angular del montante y el módulo, dirección y sentido de la reacción que el pasador ejerce sobre el montante cuando éste está horizontal.

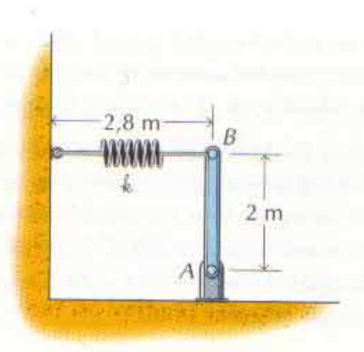


Figura P18-10

18-11* La barra uniforme de la figura P18-11 pesa 100 N y puede girar exento de rozamientos en torno al pasador situado en B. La constante y la longitud natural del resorte son $k = 800$ N/m y $\ell_0 = 15$ cm, respectivamente. Si la barra lleva una velocidad angular de 3 rad/s en sentido antihorario cuando está horizontal, determinar su velocidad angular y el módulo, dirección y sentido de la reacción que el pasador ejerce sobre la barra cuando ésta está vertical, estando A directamente encima de B.

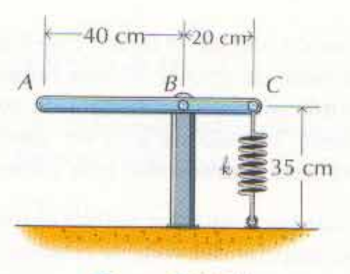


Figura P18-11

18-12 Una barra uniforme se halla en equilibrio sobre uno de sus extremos que se apoya en una superficie horizontal, según se indica en la figura P18-12. La superficie ofrece el rozamiento suficiente para que no se produzca deslizamiento. Si se perturba la barra y comienza a caer, determinar el ángulo θ que formará con la vertical cuando:

a. Cambie de sentido la componente de rozamiento de la fuerza que el suelo ejerce sobre la barra.
b. Se anule la componente normal de la fuerza que el suelo ejerce sobre la barra.

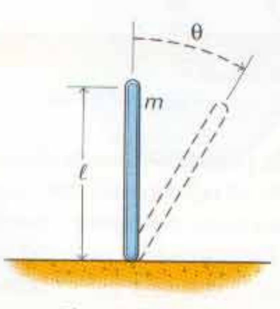


Figura P18-12

18-13 Una barra uniforme se halla en equilibrio con uno de sus extremos apoyado en un alambre según se indica en la figura P18-13. Una pequeña muesca practicada en el extremo de la barra impide que ésta se salga del alambre. Si se perturba la barra y empieza a caer, determinar el ángulo θ que formará la barra con la vertical cuando pierda contacto con el alambre.

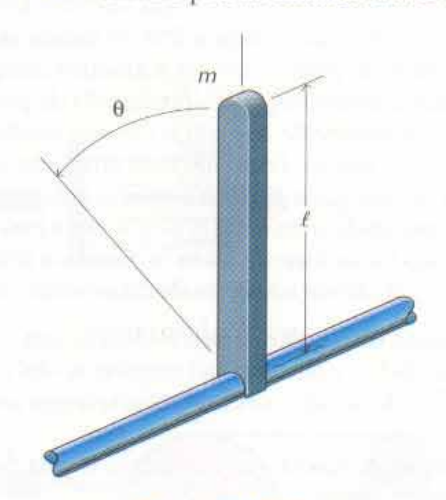


Figura P18-13

18-14* Un cilindro uniforme está en equilibrio sobre el borde de un anaquel, según se indica en la figura P18-14. El ángulo ofrece rozamiento suficiente para que el cilindro no se deslice. Si se perturba éste y comienza a rodar saliéndose del anaquel, determinar el máximo ángulo θ que girará el cilindro sin perder contacto con el borde.

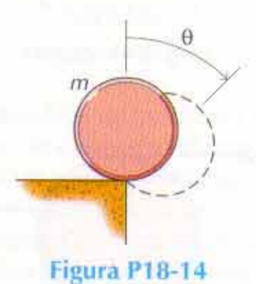


Figura P18-14

18-15 Repetir el problema 18-14 para el caso en que el cilindro sea hueco.

18-16* Repetir el problema 18-14 para el caso que en vez de un cilindro sea una esfera.

18-17 Una bola que pesa 80 N se coloca en un plano inclinado 30° y se suelta partiendo del reposo. Supóngase que la bola es una esfera uniforme de 30 cm de diámetro. Si el coeficiente de rozamiento entre la bola y el plano inclinado vale 0,25:

a. Comprobar que la bola comienza a rodar sin deslizamiento.
b. Determinar la celeridad v y la velocidad angular ω de la bola cuando haya rodado 6 m plano abajo.
c. Comparar la celeridad del apartado b con la de un punto material de 80 N de peso que se deslice (sin rozamiento) la misma distancia hacia abajo por el plano.

18-18* Un cilindro uniforme de 12 kg y 600 mm de diámetro se hace rodar hacia arriba por un plano inclinado 20° con una celeridad inicial de 10 m/s. Si el cilindro rueda sin deslizamiento:

a. Determinar la máxima distancia que rodará el cilindro plano arriba.
b. Comparar el resultado del apartado a con la máxima distancia que se deslizaría (sin rozamiento) un punto material de 12 kg hacia arriba por el mismo plano inclinado.

18-19* Un cilindro uniforme que pesa 125 N y tiene 40 cm de diámetro rueda sin deslizamiento por un plano inclinado según se indica en la figura P18-19.Un resorte de constante k = 167 N/m está unido a pequeñas espigas exentas de rozamientos situadas en los extremos del eje del cilindro. Si éste lleva una celeridad de 1,2 m/s hacia abajo del plano cuando el resorte tiene su longitud natural, determinar:

a. La celeridad v y la velocidad angular ω del cilindro cuando el resorte esté estirado 30 cm.
b. El máximo alargamiento que sufrirá el resorte.

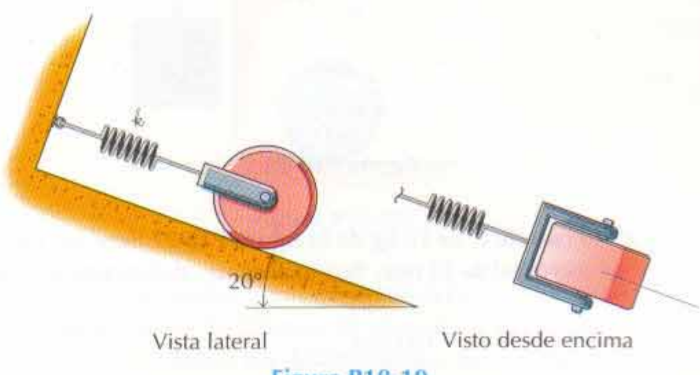


Figura P18-19

18-20 Un cilindro uniforme de 15 kg y 800 mm de diámetro rueda sin deslizamiento por un plano inclinado, según se indica en la figura P18-20. Sobre el cilindro está arrollado un hilo

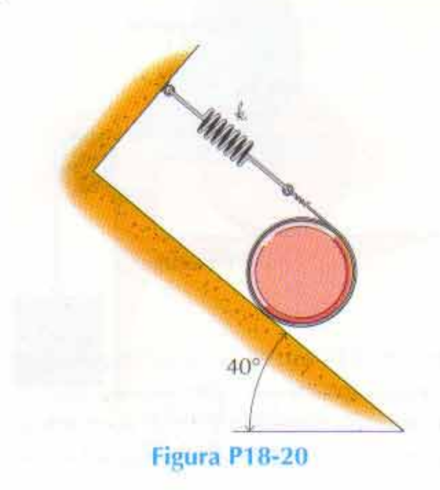


Figura P18-20

de masa despreciable que está unido a un resorte que tiene k = 150 N/m. Si se suelta el cilindro partiendo del reposo cuando el resorte esté alargado 1 m, determinar:

a. La celeridad v y la velocidad angular ω del cilindro cuando el resorte esté alargado 0,5 m.
b. El alargamiento del resorte cuando el cilindro vuelva a estar en reposo.

18-21 Un cilindro uniforme C de peso 150 N y 30 cm de diámetro rueda sin deslizamiento por una superficie horizontal, según se indica en la figura P18-21. Sobre él está arrollado un hilo ligero que pasa por una pequeña polea exenta de rozamientos y que está atado a una caja A de peso 150 N. Si se suelta el sistema partiendo del reposo, determinar la celeridad v_0 y la velocidad angular ω_C del cilindro y la celeridad v_A de la caja cuando ésta haya descendido 1,5 m.

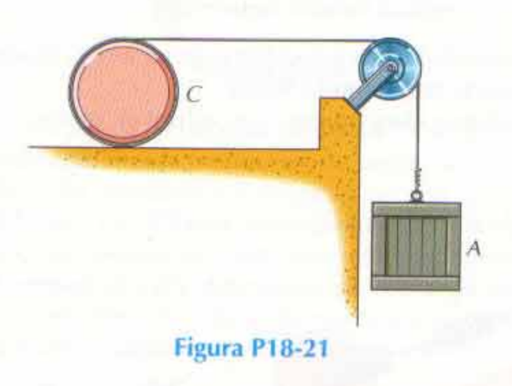


Figura P18-21

18-22* El carrete C de 10 kg de la figura P18-22 tiene un radio de giro centroidal de 75 mm. Sujeto al centro del carrete hay un hilo de masa despreciable que pasa por una pequeña polea exenta de rozamientos y está atado a una caja A de 25 kg. Si se suelta el sistema a partir del reposo y el carrete rueda sin deslizamiento, determinar la celeridad v_C y la velocidad angular ω_C del carrete y la celeridad v_A de la caja cuando haya descendido 2 m.

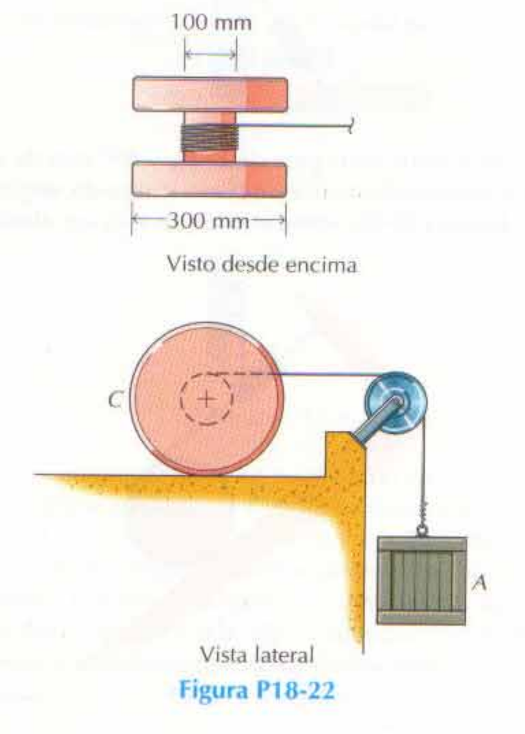
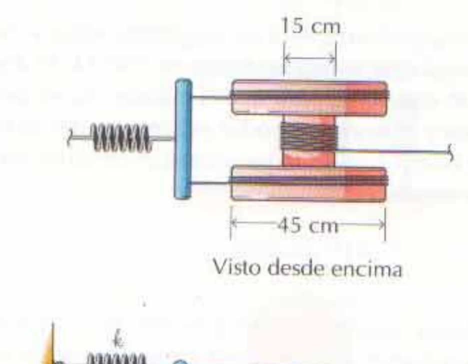


Figura P18-22

18-23 El carrete C de la figura P18-23 consta de un cilindro uniforme (40 N de peso, 15 cm de diámetro) comprendido entre dos discos cilíndricos (cada uno de 20 N de peso y 45 cm de diámetro). Un resorte de k = 400 N/m está unido a hilos arrollados sobre los discos. Otro hilo está arrollado sobre la parte central del carrete, pasa por una pequeña polea exenta de rozamientos y está atado a una caja A de 150 N de peso. Si esta lleva una velocidad hacia abajo de 1,2 m/s cuando el resorte está alargado 10 cm y el carrete rueda sin deslizamiento, determinar:

a. La máxima distancia que descenderá la caja.
b. La celeridad v_C y la velocidad angular ω_C del carrete y la celeridad v_A de la caja cuando el resorte tenga un alargamiento nulo.
c. La máxima distancia que ascenderá la caja por encima de su posición inicial.



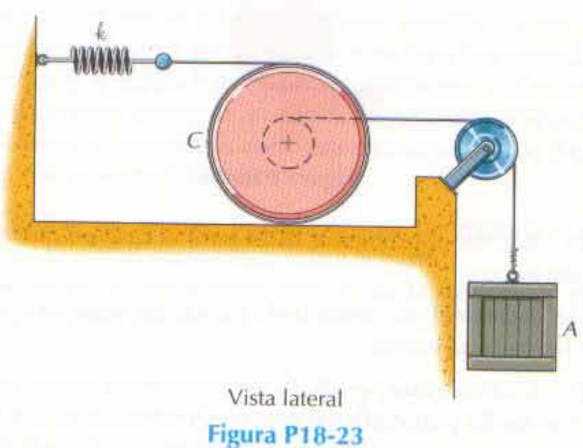
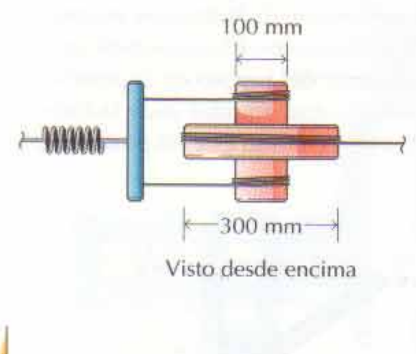


Figura P18-23

18-24* El grupo C de cilindros de la figura P18-24 consta de un anillo cilíndrico (300 mm de diámetro externo y 100 mm de diámetro interno) de 5 kg y un eje cilíndrico (100 mm de diámetro) de 7 kg. Un resorte de k = 2 kN/m está unido a hilos arrollados al eje. Otro hilo está arrollado en el anillo central, pasa por una pequeña polea exenta de rozamientos y está atado a una caja A de 15 kg. Si ésta lleva una velocidad de 1,5 m/s

hacia abajo cuando el resorte está alargado 100 mm y el cilindro rueda sin deslizamiento, determinar:

a. La máxima distancia que descenderá la caja.
b. La celeridad v_C y la velocidad angular ω_C de C y la celeridad v_A de la caja cuando el alargamiento del resorte sea nulo.
c. La distancia máxima que ascenderá la caja por encima de su posición inicial.



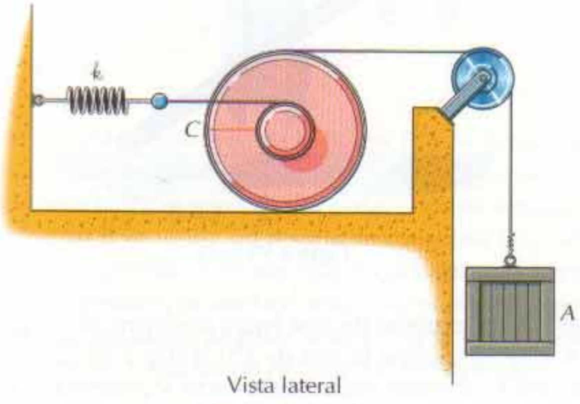


Figura P18-24

18-25 El grupo de cilindros de la figura P18-25 consta de un anillo cilíndrico (40 cm de diámetro externo y 15 cm de diámetro interno) de peso 50 N y un eje cilíndrico (15 cm de diámetro) de peso 25 N. Un resorte de $k_1 = 167$ N/m está unido a un hilo arrollado en el anillo. Otro resorte, de $k_2 = 167$ N/m está unido a hilos arrollados en el eje. Se suelta el sistema a partir del reposo estando alargado 45 cm el resorte 1 e indeformado el resorte 2. Si el coeficiente de rozamiento estático entre el eje y los raíles vale $\mu_s = 0{,}8$.

a. Comprobar que el cilindro no se desliza al iniciar el movimiento.
b. Determinar la celeridad v y la velocidad angular ω del grupo de cilindros cuando se anule el alargamiento del resorte 1.

18-26* Una rueda no homogénea de 10 kg rueda sin deslizamiento por una superficie horizontal, según se indica en la figura P18-26. Tiene un diámetro de 500 mm y el centro de gravedad está situado a 50 mm de su centro. El radio de giro respecto al centro de masa es de 165 mm. Si la rueda está girando en sentido horario a 9 rad/s cuando $\theta = 0°$, determinar la fuerza (en módulo, dirección y sentido) que la superficie ejerce sobre la rueda cuando $\theta = 90°$ y 180°.

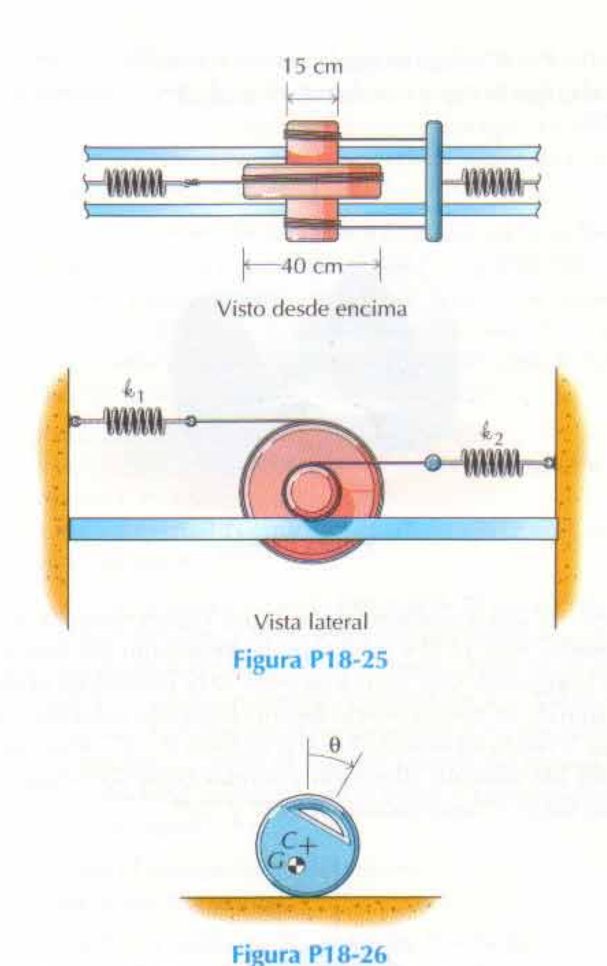


Figura P18-25

Figura P18-26

18-27 El semicilindro homogéneo de la figura P18-27 pesa 80 N y tiene un radio de 225 mm. Si se suelta a partir del reposo cuando $\theta = 30°$ y rueda sin deslizamiento, determinar la fuerza (en módulo, dirección y sentido) que la superficie horizontal ejerce sobre el cilindro cuando $\theta = 60°$ y 90°.

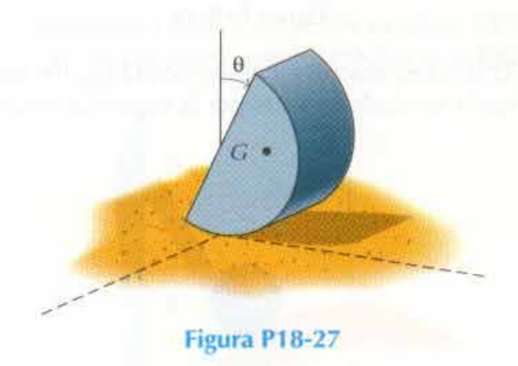


Figura P18-27

18-28* La rueda compuesta de la figura P18-28 consiste en un semicilindro de 5 kg situado entre dos discos (cada uno de 2 kg y 600 mm de diámetro). Si está rodando sin deslizamiento y tiene una velocidad angular de 10 rad/s en sentido horario

cuando $\theta = 0°$, determinar la fuerza (en módulo, dirección y sentido) que la superficie ejerce sobre el cilindro cuando $\theta = 60°$ y 120°.

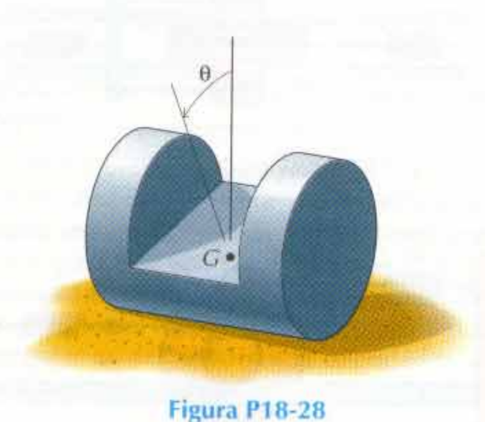


Figura P18-28

18-29 El disco uniforme de la figura P18-29 tiene 400 mm de diámetro, pesa 15 N y rueda sin deslizamiento por una superficie horizontal. Una varilla de peso 20 N penetra en el disco a 175 mm de su centro. Si este sistema lleva una velocidad angular de 5 rad/s en sentido horario cuando $\theta = 0°$, determinar la fuerza (en módulo, dirección y sentido) que dicha superficie ejerce sobre el disco cuando $\theta = 60°$ y 120°.

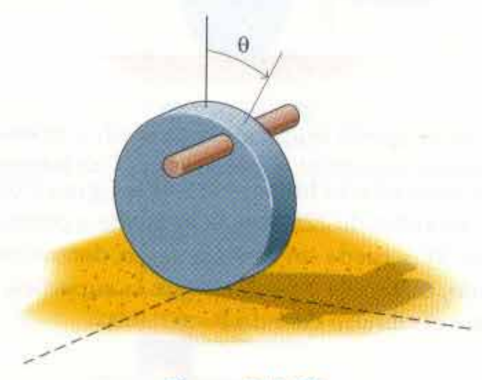


Figura P18-29

18-30* Una esfera maciza y homogénea (2 kg, 100 mm de diámetro) rueda sin deslizamiento por la superficie exterior de un cilindro de 400 mm de diámetro (fig. P18-30). El coeficiente de rozamiento estático entre esfera y cilindro es $\mu_s = 0{,}7$. Si se suelta la esfera a partir del reposo cuando $\theta = 0°$, determinar el ángulo θ al cual comenzará a deslizarse la esfera. (¿Perderá contacto la esfera con el cilindro antes o después de este ángulo?

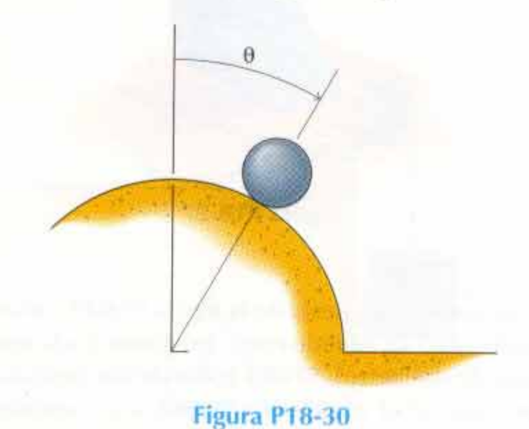


Figura P18-30

18-31 A un extremo de una barra uniforme de peso 25 N se aplica una fuerza horizontal de 125 N (fig. P18-31). Un cursor ligero unido al punto medio de la barra se mueve por una guía vertical exenta de rozamientos y la superficie en *C* es lisa. Si se suelta el sistema a partir del reposo en la posición representada, determinar la velocidad angular ω de la barra y la velocidad $\mathbf{v}_A$ de su extremo *A* cuando esté en posición vertical.

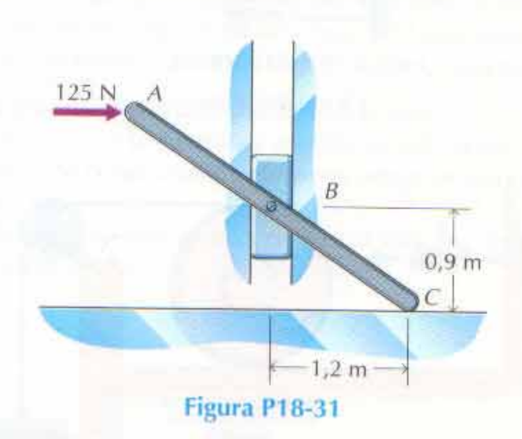


Figura P18-31

18-32* A un extremo de una barra uniforme de 3 kg y longitud 4 m se aplica una fuerza de 150 N (fig. P18-32). Un cursor ligero unido al punto medio de la barra se mueve por una guía vertical exenta de rozamientos y la superficie en *C* es lisa. Si se suelta el sistema a partir del reposo cuando $\theta = 20°$, determinar la velocidad angular ω de la barra y la velocidad $\mathbf{v}_A$ de su extremo *A* cuando $\theta = 80°$.

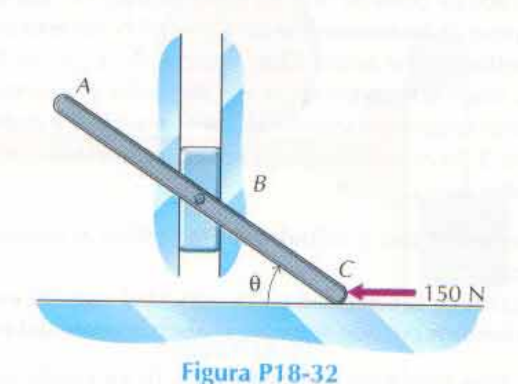


Figura P18-32

18-33 La barra uniforme de la figura P18-33 pesa 25 N y tiene una longitud de 0,9 m. Los cursores ligeros de los extremos de la barra se mueven por guías exentas de rozamiento. Al cursor en *A* va unido un resorte de constante $k = 250$ N/m que está alargado 0,6 m cuando la barra está vertical. Si, en esta posición, se suelta el sistema a partir del reposo, determinar la ve-

locidad angular ω de la barra y la velocidad $\mathbf{v}_B$ de su extremo B cuando:

a. El resorte no esté deformado.
b. La barra esté horizontal.

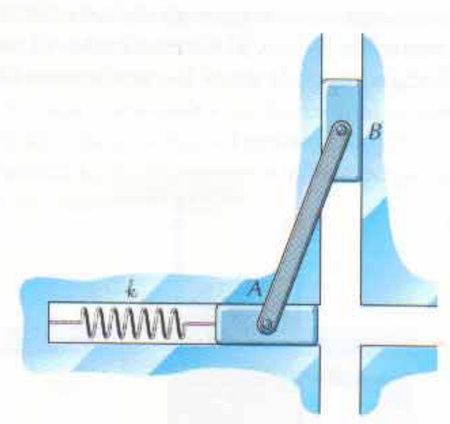


Figura P18-33

18-34* La barra uniforme de la figura P18-34 tiene una masa de 5 kg y una longitud de 3 m. Los cursores ligeros de los extremos de la barra se mueven por guías exentas de rozamiento. Al cursor en B va unido un resorte de constante k = 600 N/m que está comprimido 500 mm cuando la barra está horizontal. Si, en esta posición, se suelta el sistema a partir del reposo, determinar la velocidad angular ω de la barra y la velocidad $\mathbf{v}_A$ de su extremo A, cuando el resorte esté indeformado.

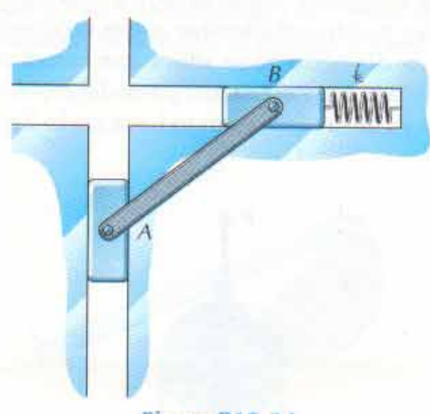


Figura P18-34

18-35 A un extremo de una bara uniforme de peso 150 N y 3 m de longitud se aplica una fuerza horizontal de 125 N (fig. P18-31). Un cursor de 100 N de peso, unido al punto medio de la barra, se mueve por una guía vertical exenta de rozamiento y la superficie en C es lisa. Si, en la posición representada, el extremo C de la barra tiene una velocidad de 0,9 m/s hacia la izquierda, determinar:

a. La máxima altura que alcanzará el cursor B.
b. La velocidad angular ω de la barra y la velocidad $\mathbf{v}_C$ de su extremo C cuando la altura el cursor sea h_B = 0,6 m.
c. La fuerza normal $\mathbf{N}_C$ que la superficie ejerce en C sobre la barra cuando h_B = 0,6 m.

18-36* A un extremo de una barra de 20 kg y 4 m de longitud se aplica una fuerza horizontal de 150 N (fig. P18-32). Un cursor de 15 kg unido al punto medio de la barra se mueve por una guía vertical exenta de rozamiento y la superficie en C es lisa. Si el extremo C de la barra tiene una velocidad de 1,35 m/s hacia la izquierda cuando $\theta = 30°$, determinar:

a. La máxima altura que alcanza el cursor B.
b. La velocidad angular ω de la barra y la velocidad $\mathbf{v}_C$ de su extremo C cuando $\theta = 20°$.
c. La fuerza normal $\mathbf{N}_C$ que la superficie ejerce en C sobre la barra cuando $\theta = 20°$.

18-37 La barra uniforme de la figura P18-33 pesa 25 N y tiene una longitud de 0,9 m. Los cursores de sus extremos se mueven por guías exentas de rozamiento y pesan 10 N cada uno. Al cursor en A va unido un resorte de constante k = 250 N/m que está alargado 0,6 m cuando la barra está en posición vertical. Si, en esta posición, se suelta el sistema a partir del reposo, determinar la velocidad angular ω de la barra y la velocidad $\mathbf{v}_B$ de su extremo B cuando:

a. Sea nulo el alargamiento del resorte.
b. La barra esté horizontal.

18-38* La barra uniforme de la figura P18-34 tiene una masa de 5 kg y una longitud de 3 m. Los cursores de sus extremos se mueven por guías exentas de rozamiento y tienen una masa de 2 kg cada uno. Al cursor en B está unido un resorte de constante k = 600 N/m que está comprimido 500 mm cuando la barra esté horizontal. Si, en esta posición, se suelta el sistema a partir del reposo, determinar la velocidad angular ω de la barra y la velocidad $\mathbf{v}_A$ de su extremo A cuando el resorte esté indeformado.

18-39 Una escalera de 80 N de peso y longitud 3,6 m está apoyada en el suelo y la pared, según se indica en la figura P18-39.

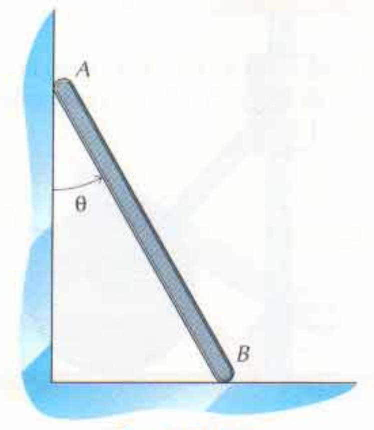


Figura P18-39

El suelo y la pared están exentos de rozamiento. La escalera está en reposo siendo $\theta = 0°$ y se perturba ligeramente su extremo inferior. Determinar el ángulo θ, la velocidad angular ω y la velocidad $\mathbf{v}_B$ del extremo B cuando el extremo A pierde el contacto con la pared vertical.

18-40* Una barra uniforme de 3 kg de masa y 2 m de longitud está unida a un cursor ligero que se mueve por una guía vertical exenta de rozamiento (fig. P18-40). Su otro extremo se desliza por una superficie también lisa. El sistema está en reposo con $\theta = 0°$ cuando se perturba ligeramente el extremo inferior. Determinar el ángulo θ, la velocidad angular ω y la velocidad $\mathbf{v}_B$ del extremo B cuando se anule la fuerza normal $\mathbf{N}$ entre la superficie horizontal y el extremo B.

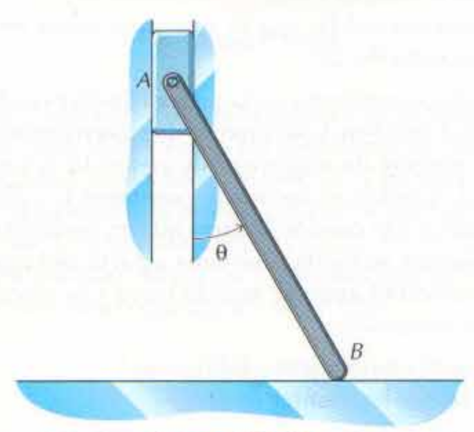


Figura P18-40

18-41 Un cilindro uniforme que pesa 100 N y tiene un diámetro de 60 cm rueda sin deslizamiento por una superficie horizontal, según se indica en la figura P18-41. El cilindro está conectado a una corredera de 150 N de peso mediante una barra esbelta uniforme (50 N de peso, 90 cm de longitud). El rozamiento entre la corredera y la barra vertical es despreciable. Si se suelta el sistema a partir del reposo cuando $h_A = 100$ cm, determinar la velocidad $\mathbf{v}_A$ de la corredera y la velocidad angular ω_C del cilindro cuando $h_A = 60$ cm.

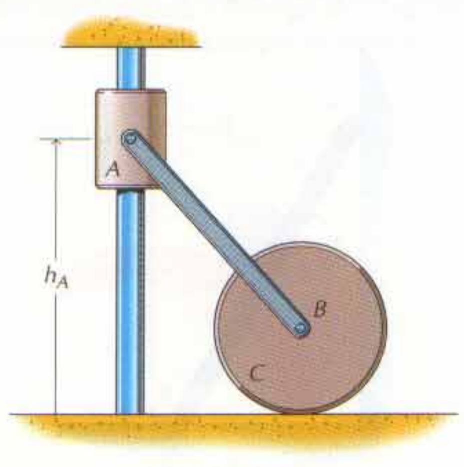


Figura P18-41

18-42* Una masa A de 7,5 kg pende del eje exento de rozamientos de una polea, según se indica en la figura P18-42. La polea de 10 kg puede considerarse que es un cilindro uniforme de 400 mm de diámetro. Si al extremo de la cuerda se aplica una fuerza constante $P = 350$ N y el sistema parte del reposo, determinar la velocidad $\mathbf{v}_A$ de la masa A cuando haya subido 3 m.

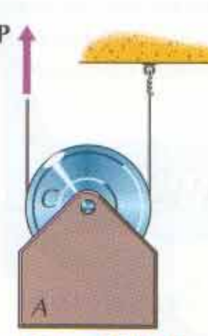


Figura P18-42

18-43 Un peso A de 75 N pende del eje exento de rozamientos de una polea, según se indica en la figura P18-42. La polea pesa 125 N y puede considerarse que es un cilindro uniforme de 40 cm de diámetro. Si al extremo de la cuerda se aplica una fuerza constante $P = 50$ N y el sistema parte del reposo, determinar la velocidad $\mathbf{v}_A$ del peso cuando haya caído 3 m.

18-44* Una masa A de 5 kg pende del extremo de una cuerda que pasa por una polea, según se indica en la figura P18-44. La polea de 10 kg puede considerarse que es un cilindro uniforme de 400 mm de diámetro. Si se aplica una fuerza constante $P = 65$ N al eje de la polea y el sistema parte del reposo, determinar la velocidad $\mathbf{v}_A$ de la masa cuando haya caído 2 m.

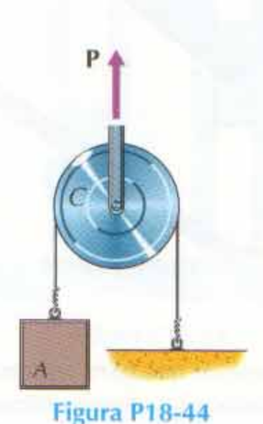


Figura P18-44

18-45 Un peso A de 50 N pende del extremo de una cuerda que pasa por una polea según se indica en la figura P18-44. La polea pesa 100 N y puede considerarse que es un cilindro uni-

forme de 40 cm de diámetro. Si se aplica una fuerza constante $P = 750$ N al eje de la polea y el sistema parte del reposo, determinar la velocidad $\mathbf{v}_A$ del peso cuando A cuando haya subido 90 cm.

18-46* Un semicilindro de 5 kg y 300 mm de diámetro gira en torno a un pasador exento de rozamiento, según se indica en la figura P18-46. El semicilindro está conectado a una corredera de 3 kg mediante una barra esbelta (2 kg y longitud 500 mm). El rozamiento entre corredera y eje horizontal es despreciable. Si se suelta el sistema a partir del reposo cuando $\theta = 0°$, determinar la velocidad $\mathbf{v}_A$ de la corredera y la velocidad angular ω_C del semicilindro cuando $\theta = 120°$.

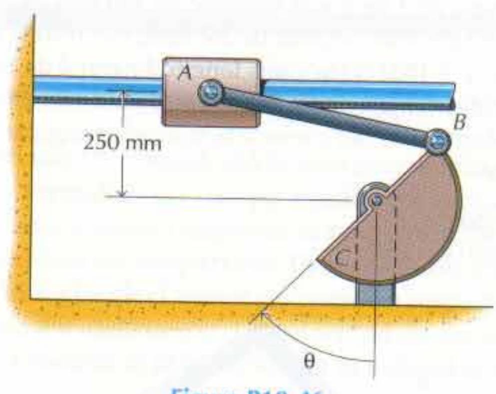


Figura P18-46

18-47 Un semicilindro de 45 cm de diámetro, que pesa 25 N, rueda sin deslizamiento por una superficie horizontal, según se indica en la figura P18-47. El rozamiento entre la barra esbelta (40 N de peso y 75 cm de longitud) y la superficie horizontal en A es despreciable. Si se suelta el sistema a partir del reposo cuando $\theta = 0°$, determinar la velocidad $\mathbf{v}_B$ y la velocidad angular ω_C del cilindro cuando $\theta = 90°$.

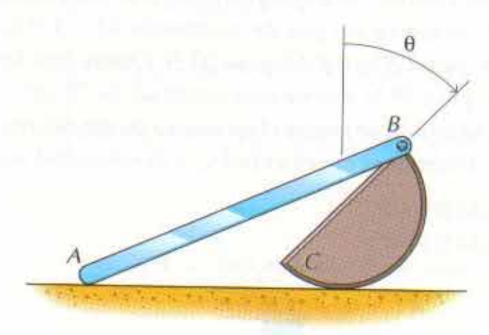


Figura P18-47

18-48* El semicilindro uniforme representado en la figura P18-48 tiene una masa de 8 kg, un radio de 200 mm y rueda sin deslizamiento por una superficie horizontal. La barra uniforme AB tiene una masa de 5 kg y una longitud de 600 mm. El sistema parte del reposo cuando $\theta = 0°$ y la velocidad angular del cilindro es de 2 rad/s en sentido horario cuando $\theta = 90°$. Despréciese el rozamiento entre la barra y la superficie en A y determínese el módulo de la fuerza horizontal constante **P**.

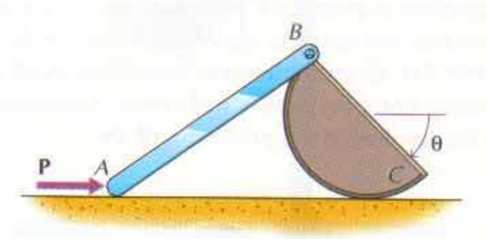


Figura P18-48

18-49* Un carrito de masa m_1 desciende por un plano inclinado 30°, según se indica en la figura P18-49. Las dos ruedas son cilindros uniformes de masa m_2 cada una, están unidas al carrito mediante ejes exentos de rozamientos y ruedan sin deslizamiento. Si se suelta el sistema a partir del reposo, determinar la celeridad del carrito cuando haya recorrido una distancia d bajando por el plano inclinado en los casos

a. $m_2 = \frac{1}{2}m_1$

b. $m_2 = 2m_1$

(Compárense estas respuestas con la celeridad de un punto material de masa $m_1 + 2m_2$ que se deslizara igual distancia hacia abajo del mismo plano inclinado en ausencia de rozamiento.)

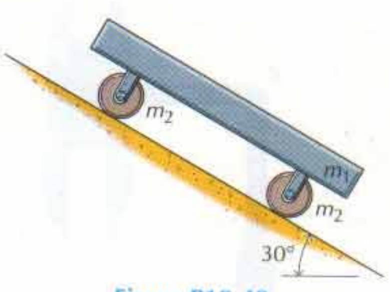


Figura P18-49

18-50 Resolver el problema 18-49 para el caso en que las ruedas no estén sujetas al carrito (fig. P18-50). El rozamiento es su-

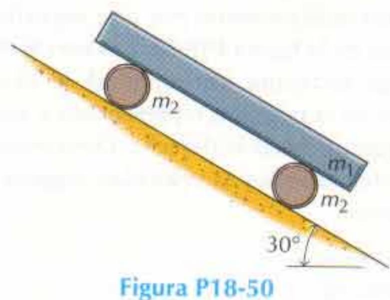


Figura P18-50

ficiente para impedir el deslizamiento entre las ruedas y el carrito, así como entre las ruedas y la superficie. Compárese la respuesta con los resultados del problema 18-49.

18-51 Resolver el problema 18-49 para el caso en que las ruedas giren sobre ejes fijos a la superficie y exentos de rozamientos (fig. P18-51). El rozamiento es suficiente para impedir el deslizamiento entre las ruedas y el carrito. Comparar el resultado con los resultados del problema 18-49.

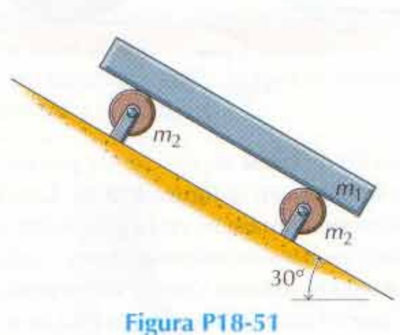


Figura P18-51

18-52* Las barras *AB* y *BC* de la figura P18-52 tienen, cada una de ellas, una masa de 2 kg y una longitud de 400 mm. El cursor C de 3 kg se mueve por una guía vertical exenta de rozamiento. Si se suelta el sistema a partir del reposo en la posición representada, determinar la velocidad $\mathbf{v}_C$ del cursor cuando esté al nivel de *A*.

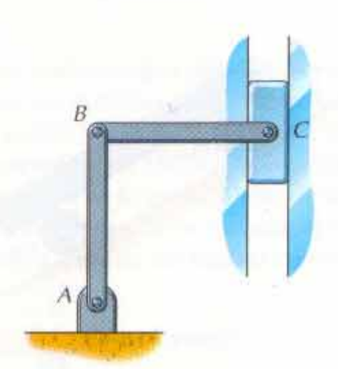


Figura P18-52

18-53* Un cilindro uniforme de 40 cm de diámetro, que pesa 60 N, rueda sin deslizamiento por una superficie horizontal, según se indica en la figura P18-53. Las barras esbeltas ligeras *AB* y *BC* tienen, cada una, una longitud de 40 cm. El sistema está en reposo en la posición representada y entonces se desplaza ligeramente C hacia la derecha. Determinar la velocidad $\mathbf{v}_C$ del centro de la rueda y la velocidad angular ω_{AB} de la manivela *AB* cuando:

a. *AB* esté horizontal.
b. *AB* esté vertical.

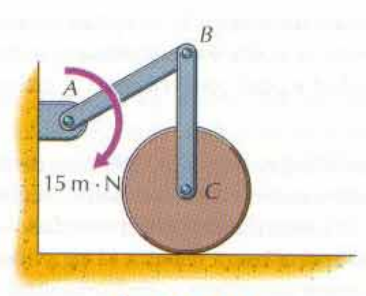


Figura P18-53

18-54 El cursor de 2 kg representado en la figura P18-54 se mueve por una guía exenta de rozamiento. La manivela *AB* tiene una masa de 1 kg y una longitud de 150 mm, *BC* tiene una masa de 3 kg y una longitud de 360 mm, y el resorte tiene una constante k = 1800 N/m y una longitud natural de 150 mm. Si se suelta el sistema a partir del reposo cuando $\theta = 0°$, determinar la velocidad $\mathbf{v}_C$ del cursor y la velocidad angular ω_{AB} de la manivela:

a. Cuando $\theta = 90°$.
b. Cuando $\theta = 150°$.

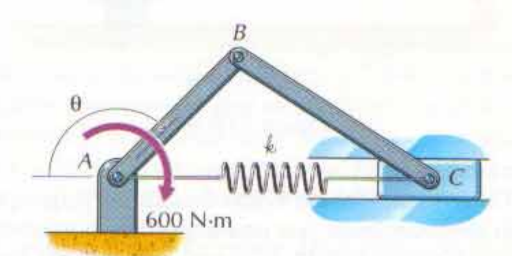


Figura P18-54

18-55 Un resorte en espiral unido a la barra *AB* de la figura P18-55 ejerce un par de momento $M = k\theta$ donde k = 7,5 m · N/rad. La barra *AB* pesa 50 N y tiene una longitud de 45 cm, *BC* pesa 75 N y tiene una longitud de 75 cm, y la superficie en C es lisa. Si se suelta el sistema a partir del reposo cuando $\theta = 0°$, determinar la velocidad $\mathbf{v}_C$ y la velocidad angular ω_{AB}:

a. Cuando $\theta = 60°$.
b. Cuando $\theta = 90°$:

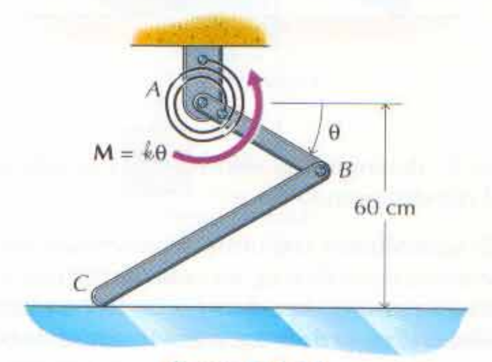


Figura P18-55

18-56* Un resorte en espiral unido a la barra AB de la figura P18-56 ejerce un par de momento $M = k\theta$ donde $k = 150$ N · m/rad. La barra AB tiene una masa de 25 kg y una longitud de 3 m, BC tiene una masa de 50 kg y una longitud de 6 m, y la superficie en C es lisa. El sistema se halla inicialmente en reposo con $\theta = 60°$ y BC vertical. Se desplaza C ligeramente hacia la derecha. Determinar la velocidad $\mathbf{v}_C$ y la velocidad angular ω_{AB}:

a. Cuando $\theta = 120°$.
b. Cuando $\theta = 180°$.

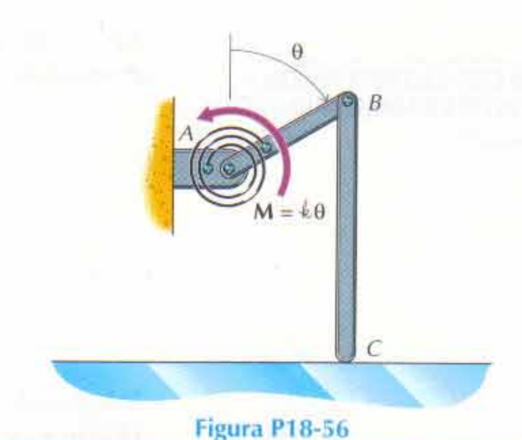


Figura P18-56

18.6 ENERGÍA CINÉTICA DE UN CUERPO RÍGIDO EN TRES DIMENSIONES

En el apartado 18.3, se calculó la energía cinética de un grupo de puntos materiales que formaban un cuerpo rígido y se movía con movimiento plano. En este apartado, vamos a suprimir la restricción de movimiento plano.

Al igual que en el apartado 18.3, sea A un punto cualquiera del cuerpo y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{P/A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ el vector de posición respecto de A de un punto cualquiera, de masa dm, del cuerpo. La velocidad de dm estará relacionada con la velocidad de A mediante la ecuación de la velocidad relativa

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{P/A} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{18-23}$$

donde $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$ es la velocidad angular del cuerpo. La energía cinética de la partícula será entonces

$$\begin{aligned} dT &= \frac{1}{2}dm\ v^2 = \frac{1}{2}dm\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \\ &= \frac{1}{2}dm\ (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\cdot(\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2}dm\ v_A^2 + dm\ \mathbf{v}_A\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + \frac{1}{2}dm\ (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{18-24}$$

donde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} &= (\omega_y r_z - \omega_z r_y)\,\mathbf{i} + (\omega_z r_x - \omega_x r_z)\,\mathbf{j} \\ &\quad + (\omega_x r_y - \omega_y r_x)\,\mathbf{k} \end{aligned} \tag{18-25}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A\cdot\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} &= v_{Ax}(\omega_y r_z - \omega_z r_y) + v_{Ay}(\omega_z r_x - \omega_x r_z) \\ &\quad + v_{Az}(\omega_x r_y - \omega_y r_x) \end{aligned} \tag{18-26}$$

y

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) &= (\omega_y r_z - \omega_z r_y)^2 + (\omega_z r_x - \omega_x r_z)^2 \\ &\quad + (\omega_x r_y - \omega_y r_x)^2 \\ &= \omega_x^2(r_y^2 + r_z^2) + \omega_y^2(r_x^2 + r_z^2) + \omega_z^2(r_x^2 + r_y^2) \\ &\quad -2(\omega_x\omega_y r_x r_y + \omega_x\omega_z r_x r_z + \omega_y\omega_z r_y r_z) \end{aligned} \tag{18-27}$$

Aplicando las ecuaciones 18-25 a 18-27 en la ecuación 18-24 tenemos la energía cinética de la porción de masa dm

$$\begin{aligned} dT &= \frac{1}{2}dm\ v_A^2 + dm\ [\ (v_{Ay}\omega_z - v_{Az}w_y)\ r_x \\ &+ (v_{Az}\omega_x - v_{Ax}\omega_z)r_y + (v_{Ax}\omega_y - v_{Ay}\omega_x)\ r_z\ ] \\ &+ \frac{1}{2}dm\ [\omega_x^2(r_y^2 + r_z^2) + \omega_y^2(r_x^2 + r_z^2) + \omega_z^2(r_x^2 + r_y^2) \\ &- 2\omega_x\omega_y r_x r_y - 2\omega_x\omega_z r_x r_z - 2\omega_y\omega_z r_y r_z\ ] \end{aligned} \tag{18-28}$$

Integrando la ecuación 18-28 para toda la masa del cuerpo y teniendo en cuenta que $\mathbf{v}_A$ y $\boldsymbol{\omega}$ son independientes de dm, tenemos la energía cinética total del cuerpo

$$\begin{aligned} T &= \int dT = \frac{1}{2}v_A^2\int dm + (v_{Ay}\omega_z - v_{Az}\omega_y)\int r_x\ dm \\ &+ (v_{Az}\omega_x - v_{Ax}\omega_z)\int r_y\ dm + (v_{Ax}\omega_y - v_{Ay}\omega_x)\int r_z\ dm \\ &+ \frac{1}{2}\omega_x^2\int (r_y^2 + r_z^2)\ dm + \frac{1}{2}\omega_y^2\int (r_x^2 + r_z^2)\ dm \\ &+ \frac{1}{2}\omega_z^2\int (r_x^2 + r_y^2)\ dm - \omega_x\omega_y\int r_x r_y\ dm \\ &- \omega_x\omega_z\int r_x r_z\ dm - \omega_y\omega_z\int r_y r_z\ dm \end{aligned} \tag{18-29}$$

La primera integral de la ecuación 18-29 es la masa del cuerpo, las tres siguientes definen la posición del centro de masa del cuerpo relativa al punto A y las seis últimas son los momentos y productos de inercia relativos a ejes que pasan por el punto A. Por tanto,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv_A^2 + (v_{Ay}\omega_z - v_{Az}\omega_y)\ mr_{Gx} \\ &+ (v_{Az}\omega_x - v_{Ax}\omega_z)\ mr_{Gy} + (v_{Ax}\omega_y - v_{Ay}\omega_x)\ mr_{Gz} \\ &+ \frac{1}{2}\omega_x^2 I_{Ax} + \frac{1}{2}\omega_y^2 I_{Ay} + \frac{1}{2}\omega_z^2 I_{Az} \\ &- \omega_x\omega_y I_{Axy} - \omega_x\omega_z I_{Axz} - \omega_y\omega_z I_{Ayz} \end{aligned} \tag{18-30}$$

La ecuación 18-30 se simplifica si el punto A coincide con el centro de masa G. Entonces $r_{Gx} = r_{Gy} = r_{Gz} = 0$ y se anulan los términos segundo, tercero y cuarto, quedando

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\omega_x^2 I_{Gx} + \frac{1}{2}\omega_y^2 I_{Gy} + \frac{1}{2}\omega_z^2 I_{Gz} \\ &- \omega_x\omega_y I_{Gxy} - \omega_x\omega_z I_{Gxz} - \omega_y\omega_z I_{Gyz} \end{aligned} \tag{18-31}$$

Podemos observar que la ecuación 18-31 se reduce a la 18-15 en el caso particular de movimiento plano, en donde $\omega_x = \omega_y = 0$. No son necesarias hipótesis acerca de la simetría (es decir, acerca de momentos o productos de inercia). La ecuación 18-30 también se simplifica en el caso particular de la rotación en torno a un punto fijo O. Cuando A coincida con un punto fijo O, $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$ y

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\omega_x^2 I_{Ox} + \frac{1}{2}\omega_y^2 I_{Oy} + \frac{1}{2}\omega_z^2 I_{Oz} \\ &- \omega_x\omega_y I_{Oxy} - \omega_x\omega_z I_{Oxz} - \omega_y\omega_z I_{Oyz} \end{aligned} \tag{18-32}$$

Por último, si como ejes xyz tomamos las direcciones de los ejes principales, los productos de inercia serán nulos y las ecuaciones 18-31 y 18-32 quedan en la forma

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\omega_x^2 I_{Gx} + \frac{1}{2}\omega_y^2 I_{Gy} + \frac{1}{2}\omega_z^2 I_{Gz} \qquad (18\text{-}33)$$

y

$$T = \frac{1}{2}\omega_x^2 I_{Ox} + \frac{1}{2}\omega_y^2 I_{Oy} + \frac{1}{2}\omega_z^2 I_{Oz} \qquad (18\text{-}34)$$

respectivamente.

La ecuación 18-31 también puede escribirse en forma vectorial

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_G \cdot \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_G \qquad (18\text{-}35)$$

en donde $\mathbf{H}_G$ es el llamado *vector momento cinético* que tiene por componentes

$$H_{Gx} = \omega_x I_{Gx} - \omega_y I_{Gxy} - \omega_z I_{Gxz} \qquad (18\text{-}36a)$$

$$H_{Gy} = -\,\omega_x I_{Gyx} + \omega_y I_{Gy} - \omega_z I_{Gyz} \qquad (18\text{-}36b)$$

$$H_{Gz} = -\,\omega_x I_{Gzx} - \omega_y I_{Gzy} - \omega_z I_{Gz} \qquad (18\text{-}36c)$$

La expresión vectorial de la energía cinética de un cuerpo rígido pone de relieve que la energía cinética es la suma escalar de la energía cinética de traslación $\frac{1}{2}m\mathbf{v}_G \cdot \mathbf{v}_G$ asociada al centro de masa G más la energía cinética de rotación en torno al centro de masa $\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_G$. También es muy importante hacer resaltar que el sistema de referencia utilizado para el cálculo de las propiedades inerciales tiene su origen en el centro de masa G.

PROBLEMA EJEMPLO 18.5

El disco homogéneo, delgado, de la figura 18-8*a* pesa 80 N, tiene un diámetro de 50 cm y rueda libremente en torno al eje OG de longitud 60 cm. Al rodar el disco, sin deslizamiento, por la superficie horizontal, el eje gira libremente alrededor del punto O. Determinar la energía cinética del disco cuando su celeridad angular es $\omega_{GC} = 13$ rad/s.

SOLUCIÓN

Los ejes de coordenadas se toman con el eje x según OG (en el instante representado en la figura 18-8*a*) y el eje z en la superficie horizontal.[1] Entonces, el eje y está inclinado un ángulo $\theta = \tan^{-1}(25/60) = 22{,}62°$ respecto a la vertical (fig. 18-8*b*). Estos son los ejes principales del disco, por lo que los momentos de inercia relativos al centro de masa G serán

$$I_{Gx} = \frac{1}{2}\left(\frac{80}{9{,}81}\right)(0{,}25)^2 = 0{,}2548 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{Gy} = I_{Gz} = \frac{1}{4}\left(\frac{80}{9{,}81}\right)(0{,}25)^2 = 0{,}12742 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{Gxy} = I_{Gxz} = I_{Gyz} = 0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

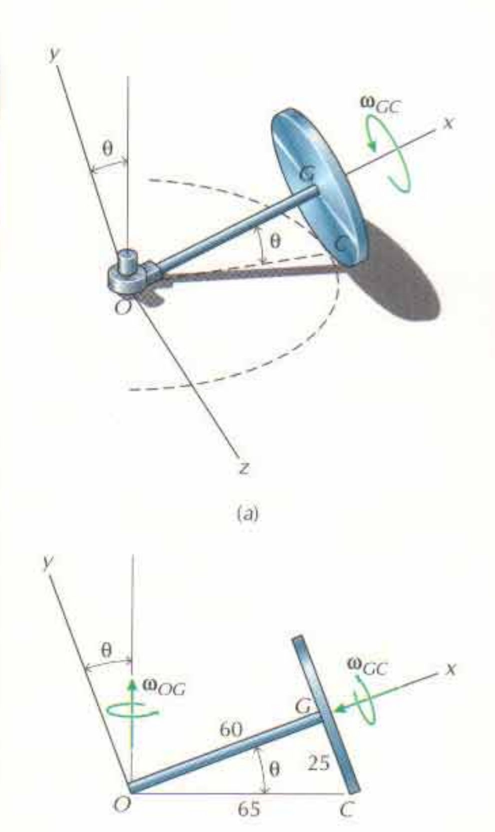


Figura 18-8

[1] Nótese que la orientación del sistema de coordenadas es fija; el sistema de ejes de coordenadas no gira con el cuerpo. El sistema de coordenadas se elige de manera que coincida con los ejes principales del cuerpo en el instante representado, simplemente para facilitar el cálculo de la energía cinética. Sin embargo, como la energía cinética es una magnitud escalar, el número que se obtenga es independiente del sistema de coordenadas que se emplee para calcularla. Por tanto, para este fin se podrían utilizar sistemas de coordenadas diferentes en los instantes inicial y final al aplicar el teorema de las fuerzas vivas.

Al girar el disco con celeridad angular ω_{GC} en torno a su eje, éste gira alrededor de un eje vertical con una celeridad angular ω_{OG} (fig. 18-8*b*). Como el disco rueda sin deslizamiento, estas celeridades angulares están relacionadas de la manera siguiente:

$$25\omega_{GC} = 65\omega_{OG}$$

lo cual da $\omega_{OG} = 5$ rad/s. Así pues, expresando la velocidad angular del disco en función de los ejes de coordenadas *xyz*, se tiene

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= -\omega_{GC}\mathbf{i} + \omega_{OG}(\text{sen } \theta \mathbf{ i} + \cos \theta \mathbf{ j}) \\ &= -11{,}077\mathbf{i} + 4{,}615\mathbf{j} \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Por último, la energía cinética del disco es (ec. 18-33)

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\omega_x^2 I_{Gx} + \frac{1}{2}\omega_y^2 I_{Gy} + \frac{1}{2}\omega_z^2 I_{Gz}$$

donde la celeridad del centro de masa es $v_G = [0{,}60 \cos \theta]\omega_{OG} = 2{,}769$ m/s. Por tanto,

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}\left(\frac{50}{9{,}81}\right)(2{,}769)^2 + \frac{1}{2}(11{,}077)^2(0{,}2548) \\ &\quad + \frac{1}{2}(4{,}615)^2(0{,}12742) + \frac{1}{2}(0)^2(0{,}12742) \\ &= 48{,}30 \text{ J}\end{aligned}$$

Resp.

PROBLEMA EJEMPLO 18.6

El disco homogéneo y delgado de la figura 18-9*a* tiene una masa de 5 kg, un diámetro de 200 mm y gira libremente en torno al eje *OG* de 300 mm de longitud. Cuando el disco rueda sin deslizamiento por el plano inclinado, el eje gira libremente alrededor del punto *O*. Si se suelta el sistema a partir del reposo en la posición representada (con el disco en la posición más elevada del plano inclinado), determinar la celeridad angular ω_{GC} del disco cuando se halle en su posición más baja sobre el plano inclinado.

SOLUCIÓN

En la figura 18-9*b* puede verse el diagrama de sólido libre del conjunto disco-eje. La fuerza normal que se ejerce sobre el disco, la fuerza de rozamiento del disco y la fuerza en el punto fijo *O* no trabajan, pues se ejercen en puntos que se hallan en reposo instantáneo. Además, la fuerza interior entre disco y eje no trabaja por ser despreciable el rozamiento en ese lugar. Por tanto, la única fuerza que efectúa trabajo es la de la gravedad y es conservativa $U_{1\to 2}^{(o)} = 0$. Las energías potenciales gravitatorias inicial y final son

$$\begin{aligned}V_i &= (5)(9{,}81)(0{,}3 \text{ sen } 10°) = 2{,}555 \text{ J} \\ V_f &= (5)(9{,}81)(-0{,}3 \text{ sen } 10°) = -2{,}555 \text{ J}\end{aligned}$$

respectivamente.

Como el sistema parte del reposo, la energía cinética inicial es nula $T_i = 0$. Para calcular la energía cinética final se elegirá un sistema de ejes (fig. 18-9*c*) en el cual el eje *x* está orientado según el eje *OG*, el eje *y* es perpendicular al plano

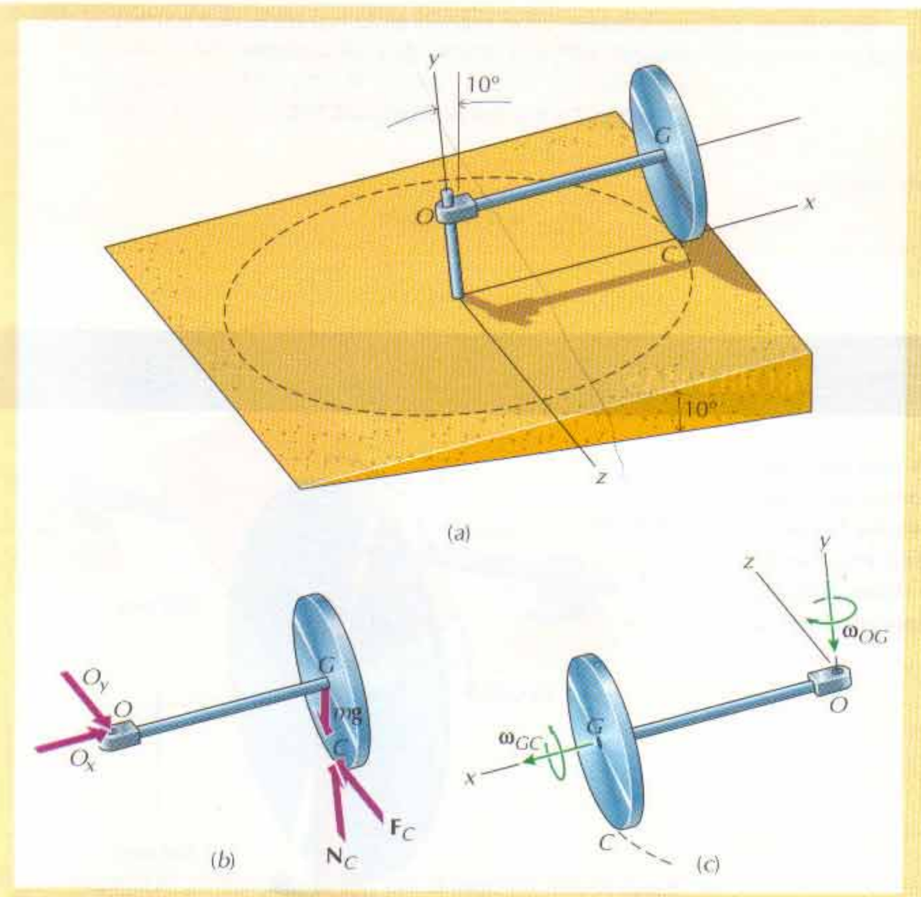


Figura 18-9

y el eje z es paralelo a él. Estos ejes son principales para el disco con lo que los momentos de inercia relativos al punto fijo O serán

$$I_{Ox} = \frac{1}{2}(5)(0,1)^2 = 0,02500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{Oy} = I_{Oz} = \frac{1}{4}(5)(0,1) + (5)(0,3)^2 = 0,46250 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{Oxy} = I_{Oxz} = I_{Oyz} = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Cuando el disco gira en torno a su eje con celeridad angular ω_{GC}, el eje gira alrededor de un eje vertical con celeridad angular ω_{OG} (fig. 18-9*c*). Como el disco rueda sin deslizamiento, estas celeridades angulares están relacionadas de la manera siguiente:

$$100\,\omega_{Gc} = 300\,\omega_{OG}$$

Así pues, en función de los ejes de coordenadas xyz, la velocidad angular del disco será

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{GC}\mathbf{i} - \omega_{OG}\mathbf{j} = \omega_{GC}\mathbf{i} - \frac{\omega_{GC}}{3}\mathbf{j}$$

Así pues, la energía cinética final del disco será (ec. 18-34)

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{1}{2}\omega_x^2 I_{Ox} + \frac{1}{2}\omega_y^2 I_{Oy} + \frac{1}{2}\omega_z^2 I_{Oz} \\ &= \frac{1}{2}\omega_{GC}^2(0,02500) + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_{GC}}{3}\right)^2(0,46250) + 0 \\ &= 0,03819\,\omega^2{}_{GC} \end{aligned}$$

Por último, aplicando todos estos valores en la ecuación que traduce el teorema de las fuerzas vivas $T_i + V_i + U_{i\to f}^{(o)} = T_f + V_f$ se tiene

$$0 + 2{,}555 + 0 = 0{,}03819\,\omega_{GC}^2 - 2{,}555$$

de donde

$$\omega_{GC} = 11{,}57 \text{ rad/s} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

18-57* La rueda de la figura P18-57 pesa 25 N y gira con celeridad angular de 20 rad/s en torno a un eje exento de rozamientos. Al mismo tiempo, el miembro que sostiene la rueda gira en torno a un árbol horizontal con celeridad angular de 8 rad/s. Si la rueda puede considerarse como disco delgado uniforme de 30 cm de diámetro, determinar su energía cinética.

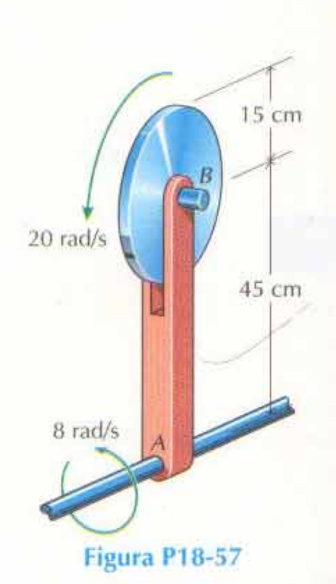


Figura P18-57

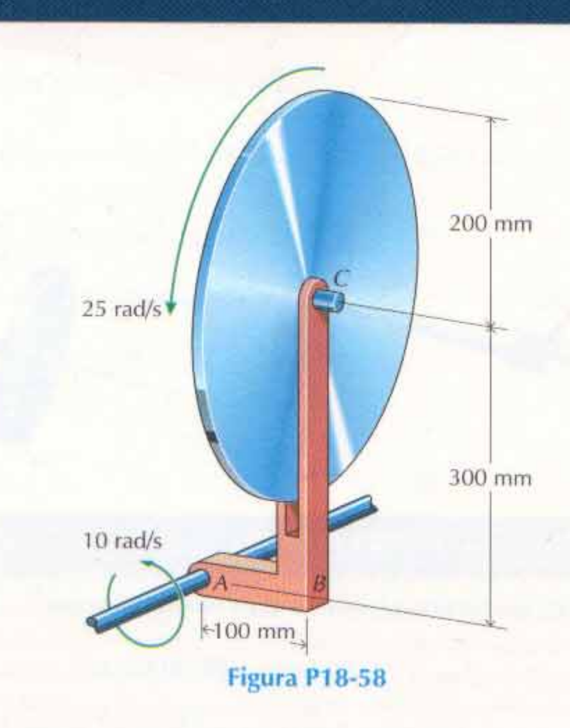


Figura P18-58

18-58* La rueda de 5 kg de la figura P18-58 gira con celeridad angular de 25 rad/s en torno a un eje exento de rozamientos. Al mismo tiempo, el miembro que sostiene la rueda gira en torno a un árbol horizontal con celeridad angular de 10 rad/s. Si la rueda puede considerarse como disco delgado uniforme de 400 mm de diámetro, determinar su energía cinética.

18-59 El disco de la figura P18-59 pesa 20 N y está montado según un ángulo de 40° sobre el árbol horizontal que gira con una celeridad angular de 240 rpm. Si el disco puede considerarse uniforme, delgado y de 40 cm de diámetro, determinar su energía cinética.

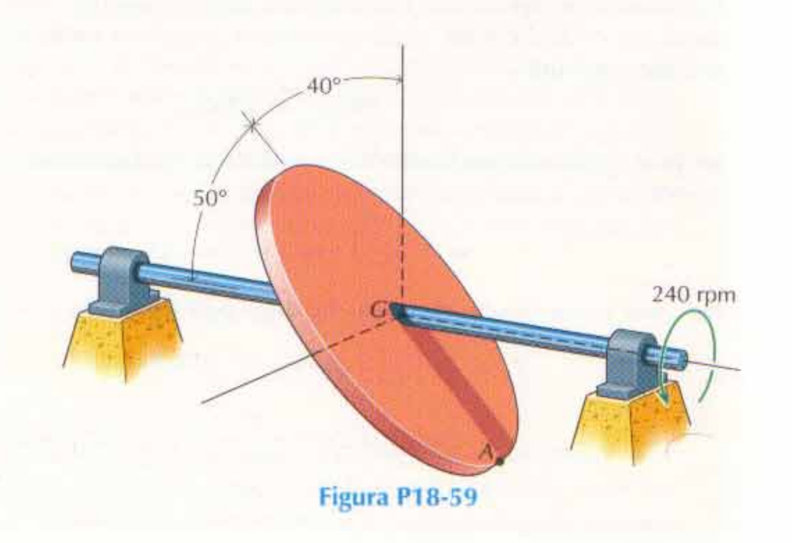


Figura P18-59

18-60* La placa de 4 kg de la figura P18-60 está montada según un ángulo de 40° sobre el árbol horizontal que gira con una celeridad angular de 300 rpm. Si la placa puede considerarse que es delgada, rectangular y uniforme, determinar su energía cinética.

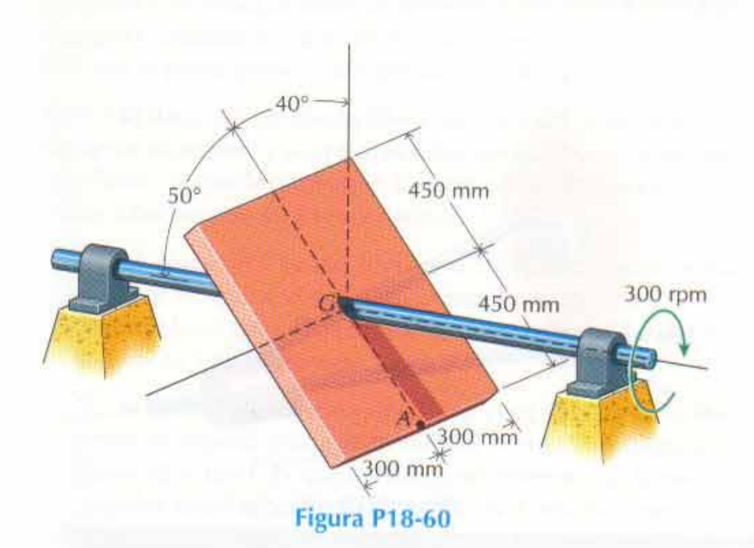


Figura P18-60

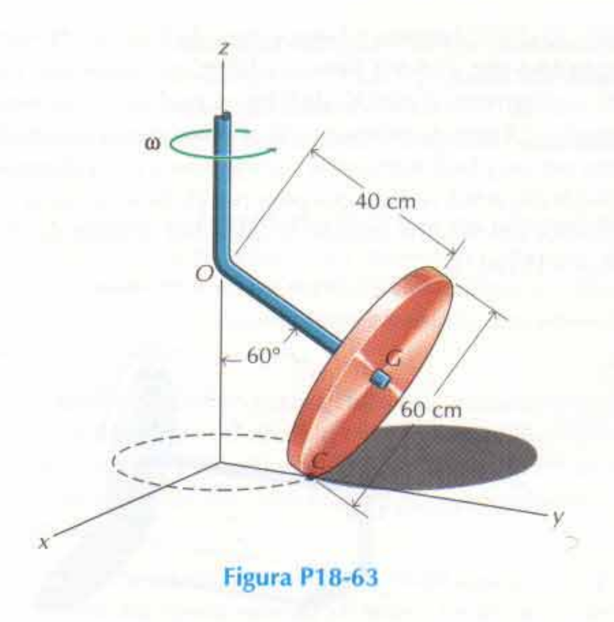


Figura P18-63

18-61 Repetir el problema 18-59 para el caso en que el disco esté montado al árbol por el punto *A* (del borde del disco) en vez de por su centro de masa *G*.

18-62* Repetir el problema P18-60 para el caso en que la placa rectangular esté montada al árbol por el punto *A* (del borde de la placa) en vez de por su centro de masa *G*.

18-63 El disco de la figura P18-63 pesa 40 N y puede girar libremente en torno al árbol *OG* mientras rueda sin deslizamiento por un plano horizontal. Si el disco puede considerarse delgado, uniforme y de 60 cm de diámetro, determinar su energía cinética cuando $\omega = 240$ rpm

18-64* Un disco delgado (*A*) de 2 kg y 200 mm de diámetro y otro (*B*) de 8 kg y 400 mm de diámetro están unidos rígidamente por un árbol ligero *AB* de 120 mm de longitud, según se indica en la figura P18-64. Determinar la energía cinética de la pareja de discos cuando giren con una celeridad angular de 5 rad/s.

18-65 El disco delgado y homogéneo del Problema Ejemplo 18-5, pesa 80 N (fig. P18-65), tiene un diámetro de 50 cm y está unido rígidamente al eje *OG* que pesa 20 N y tiene una longitud de 60 cm y un diámetro de 2,5 cm. Si el disco rueda sin deslizamiento por un plano horizontal y el eje puede girar libremente alrededor del punto fijo *O*, determinar la energía cinética del sistema cuando la celeridad angular del disco sea $\omega_{GC} = 13$ rad/s.

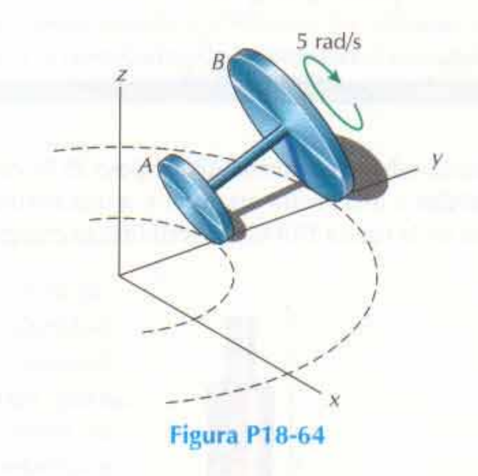


Figura P18-64



Figura P18-65

18-66* El disco delgado y homogéneo de 5 kg del Problema Ejemplo 18-6 (fig. P18-66), tiene un diámetro de 200 mm y está unido rígidamente al eje OG de 2 kg, el cual tiene 300 mm de longitud y 25 mm de diámetro. Si el disco rueda sin deslizamiento por un plano horizontal y el eje puede girar libremente alrededor del árbol vertical que pasa por O, determinar la energía cinética del sistema cuando la celeridad angular del disco sea $\omega_{GC} = 15$ rad/s.

Figura P18-66

18-67 La barra esbelta uniforme AB, de peso 15 N, está unida mediante rótulas a una rueda giratoria y a una corredera, según se indica en la figura P18-67. Determinar la energía cinética de dicha barra en la posición representada si la celeridad angular de la rueda es $\omega = 20$ rad/s.

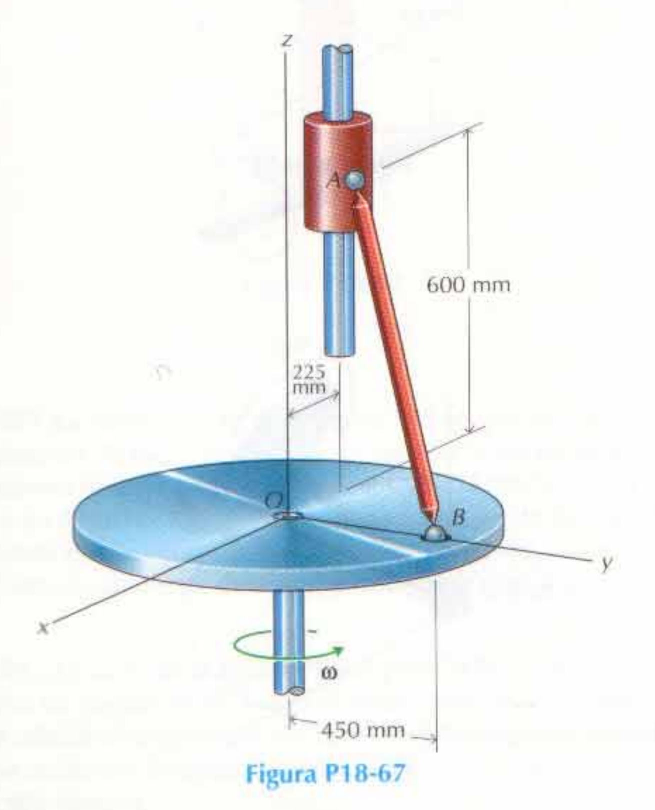


Figura P18-67

18-68* La barra esbelta uniforme AB de 2 kg está unida mediante rótulas a un miembro giratorio y a una corredera, según se indica en la figura P18-68. Determinar la energía cinética de dicha barra en la posición representada si la celeridad angular del miembro es $\omega = 15$ rad/s.

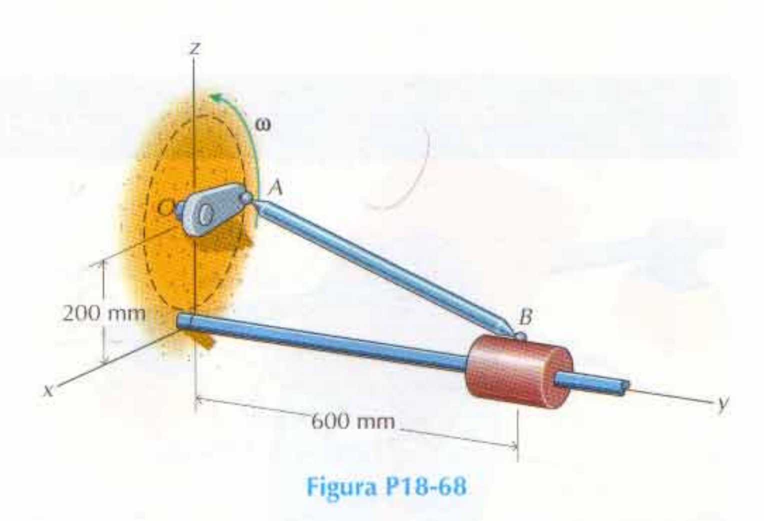


Figura P18-68

18-69 La barra esbelta uniforme AB, de peso 25 N, está unida mediante rótulas a dos correderas, según se indica en la figura P18-69 ($a = 40$ cm, $b = 80$ cm, $c = 20$ cm). Si, en el instante representado, la corredera A se está moviendo hacia arriba con una celeridad de 4,5 m/s, determinar la energía cinética de la barra.

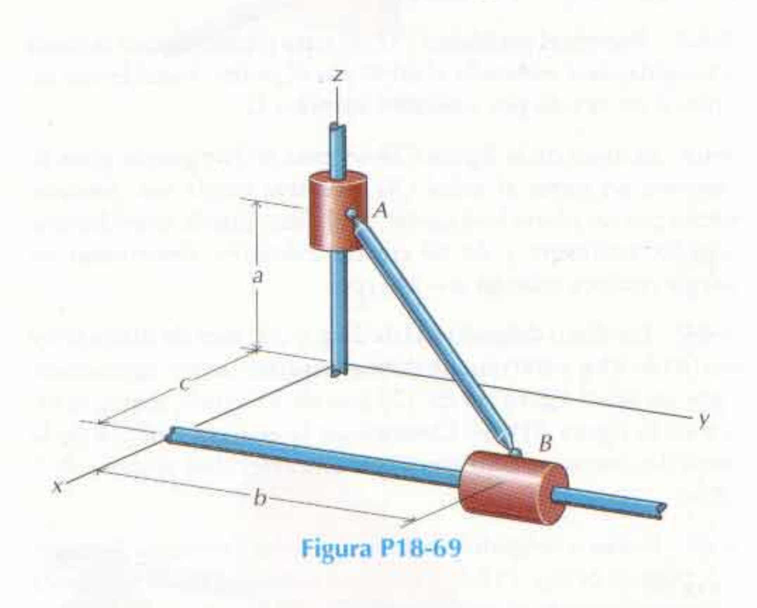


Figura P18-69

18-70* La barra esbelta uniforme AB de 4 kg está unida mediante rótulas a dos correderas, según se indica en la figura P18-69 ($a = 400$ mm, $b = 800$ mm, $c = 200$ mm). Si, en el instante representado, la corredera B se está moviendo hacia la derecha a 8 m/s, determinar la energía cinética de la barra.

18-71 El disco del problema 18-59, que pesa 20 N, se halla inicialmente en reposo y se aplica al árbol un momento constante $\mathbf{M}_0$ que lo hace girar. Determinar qué valor debería tener dicho momento para que el disco girase a 240 rpm al cabo de 4 revoluciones.

18-72* La placa de 4 kg del problema 18-60 está inicialmente en reposo y se aplica al árbol un momento constante $\mathbf{M}_0$ que lo hace girar. Determinar qué valor debería tener dicho momento para que la placa girase a 300 rpm al cabo de 5 revoluciones.

18-73 El disco del problema 18-61, que pesa 20 N, se halla inicialmente en reposo y se aplica al árbol un momento constante $M_0 = 7{,}5$ m · N que lo hace girar. Determinar la celeridad angular del árbol al cabo de 2 revoluciones.

18-74* La placa de 4 kg del problema 18-62 está inicialmente en reposo y se aplica al árbol un momento constante $M_0 = 5$ m · N que lo hace girar. Determinar la celeridad angular del árbol al cabo de 3 revoluciones.

18-75 El disco del problema 18-63, que pesa 40 N, se halla inicialmente en reposo y se aplica al árbol vertical un momento constante $M_0 = 15$ m · N que lo hace girar. Determinar la celeridad angular ω del árbol vertical al cabo de 3 revoluciones.

18-76* El par de discos del problema 18-64 se coloca sobre un plano inclinado y se suelta a partir del reposo. Si, inicialmente, AB apunta hacia arriba del plano inclinado 15°, determinar la celeridad angular del sistema cuando AB apunte hacia abajo de dicho plano.

18-77 El sistema del problema 18-65 está inicialmente en reposo y se le aplica al cubo O un momento constante $M_0 = 22{,}5$ m · N (respecto a un eje vertical). Determinar la celeridad angular ω_{GC} del disco cuando haya efectuado una revolución alrededor del cubo O.

18-78* El sistema del problema 18-66 está inicialmente en reposo y se aplica al cubo O un momento constante $M_0 = 12$ m · N (respecto a un eje vertical). Determinar la celeridad angular ω_{GC} del disco cuando haya efectuado 2 revoluciones alrededor del árbol vertical.

18-79 La barra esbelta del problema 18-69, que pesa 25 N, se suelta a partir del reposo cuando $a = 80$ cm, $b = 40$ cm, $c = 20$ cm. Determinar la celeridad v_B de la corredera B cuando $b = 60$ cm.

18-80 La barra esbelta de 4 kg del problema 18-70 se suelta a partir del reposo cuando $a = 800$ mm, $b = 400$ mm, $c = 200$ mm. Determinar la celeridad v_A de la corredera A cuando $a = 200$ mm.

RESUMEN

El método trabajo-energía combina los principios de la Cinemática con la segunda ley de Newton para relacionar directamente la posición con la celeridad de un cuerpo. Para que sea útil este método, las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo sólo han de depender únicamente de la posición. Sin embargo, para ciertos tipos de estas fuerzas se pueden obtener las integrales resultantes en forma explícita. El resultado es una sencilla ecuación algebraica que relaciona las celeridades lineal y angular del cuerpo en dos posiciones distintas de su movimiento.

El trabajo efectuado sobre un cuerpo rígido debe incluir el que efectúan las fuerzas y los pares. El trabajo que efectúan las fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo rígido se calcula de la misma manera que el que efectúan las fuerzas que se ejercen sobre un punto material. Cada fuerza sólo trabaja cuando se traslada el punto al cual se aplica y no cuando el cuerpo gira en torno a su punto de aplicación. Los pares sólo trabajan cuando gira el cuerpo.

En el caso de fuerzas conservativas, la energía potencial V se define y determina de igual manera que en el caso de un punto material. El trabajo efectuado por las fuerzas conservativas se puede calcular por integración directa utilizando la ecuación 18-1 o empleando las funciones energía potencial, según se vio en el apartado 17.5.

Las fuerzas interiores de un cuerpo rígido son, dos a dos, de igual módulo y recta soporte pero de sentidos opuestos, siendo sus trabajos de igual valor absoluto pero de signos contrarios, por lo que el trabajo total efectuado por las

fuerzas interiores será nulo. A mayor abundamiento, cuando dos o más cuerpos rígidos estén conectados mediante pasadores lisos o por hilos flexibles e inextensibles, el trabajo resultante que sobre los cuerpos efectúen los miembros de conexión también será nulo.

La energía cinética de un cuerpo es la suma de las energías cinéticas de los puntos que lo constituyen. En el caso de un cuerpo rígido, tenemos

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_{Gz}\omega^2 \qquad \textbf{(18-15)}$$

donde v_G es la celeridad del centro de masa del cuerpo e I_{Gz} es el momento de inercia respecto a un eje que pase por el centro de masa G y sea paralelo al eje z (perpendicular al plano del movimiento). El primer término de la ecuación 18-15 es la energía cinética asociada a la traslación del centro de masa y el segundo término es la energía cinética asociada a la rotación del cuerpo en torno a un eje que pasa por el centro de masa.

El teorema de las fuerzas vivas para un cuerpo rígido

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \qquad \textbf{(18-19)}$$

tiene una expresión formalmente igual a la ecuación 17-9*b* para el caso de un punto material. La diferencia entre estas ecuaciones estriba en que los términos de energía cinética de la ecuación 18-19 incluyen la energía cinética de rotación del cuerpo rígido además de la energía cinética de traslación y que el término del trabajo incluye el trabajo efectuado por todos los momentos exteriores además del trabajo que las fuerzas exteriores efectúan sobre el cuerpo rígido.

Al igual que en el caso del punto material, el término del trabajo se puede descomponer en una parte debida a las fuerzas conservativas $U_{1\to 2}^{(c)}$ y otra debida a las fuerzas restantes $U_{1\to 2}^{(o)}$. El trabajo efectuado por las fuerzas conservativas puede expresarse en función de las energías potenciales, con lo que la ecuación 18-19 se puede escribir

$$T_1 + V_1 + U_{1\to 2}^{(o)} = T_2 + V_2 \qquad \textbf{(18-20)}$$

Al aplicar el método del trabajo y la energía al movimiento de un cuerpo rígido tenemos las mismas ventajas y limitaciones que al aplicarlo al movimiento de un punto material. La principal ventaja es que este método relaciona directamente las celeridades lineal y angular del cuerpo en dos posiciones distintas de su movimiento con las fuerzas y pares que se ejercen durante dicho movimiento. La limitación principal es que la ecuación 18-19 es una ecuación escalar y de ella sólo puede despejarse una incógnita.

Como el método trabajo-energía combina los principios de la Cinemática con la segunda ley de Newton, no constituye un principio nuevo o independiente. Todo problema que pueda resolverse aplicando el método trabajo-energía se puede también resolver aplicando la segunda ley de Newton. Sin embargo, cuando pueda aplicarse el método del trabajo y la energía, suele ser el más fácil para la resolución del problema.

18-81* El tractor de la figura P18-81 sube, en el instante representado, una pendiente del 10% a 48 km/h. Las ruedas motrices son las traseras, tienen un diámetro de 1,8 m y giran formando una unidad de 5 kN de peso y radio de giro centroidal respecto al eje $k_G = 0{,}6$ m. El resto del tractor pesa 10 kN. Si se desembraga de pronto el motor,

a. Determinar qué distancia recorrerá el tractor por la pendiente antes de detenerse.
b. Determinar qué distancia recorrería el tractor antes de detenerse si pesara 15 kN y las ruedas motrices tuvieran un peso despreciable.

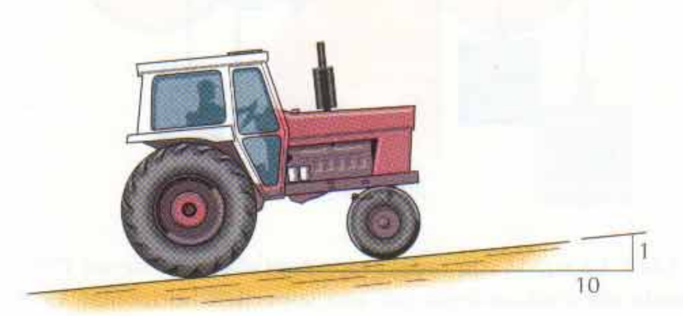


Figura P18-81

18-82* En el instante representado en la figura P18-82, el yo-yo tiene una velocidad angular en sentido antihorario de 100 rad/s. Si su radio de giro centroidal fuese $k_G = 14$ mm, determinar

a. La altura h que subiría el yo-yo por el hilo.
b. El número de revoluciones que efectuaría el yo-yo antes de alcanzar el reposo.

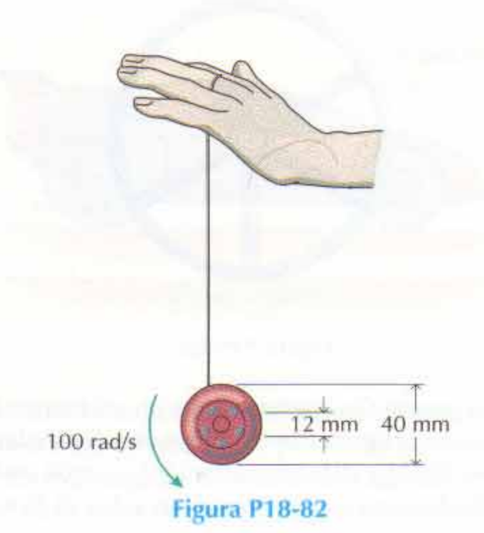


Figura P18-82

18-83 Un cilindro macizo, un cilindro hueco y una esfera maciza pesan, cada uno, 80 N y sus diámetros exteriores valen, todos, 35 cm. El diámetro interior del cilindro hueco vale 30 cm. Determinar las celeridades que alcanzarán los tres cuerpos cuando hayan dado 3 revoluciones bajando por un plano inclinado 30°.

18-84* Se utiliza una palanca de freno para gobernar el movimiento de un tambor y un peso, según se indica en la figura P18-84. La masa y el radio de giro centroidal del tambor son 40 kg y 120 mm, respectivamente; el coeficiente de rozamiento cinético entre la zapata de freno y el tambor vale 0,4, y el sistema se halla inicialmente en reposo con la masa de 50 kg situada 3 m por encima del suelo.

a. Si se suelta de pronto la palanca de freno, determinar la celeridad de la masa de 50 kg cuando haya caído 2 m.
b. Si se aplica de pronto la palanca de freno cuando la masa de 50 kg ha caído 2 m, determinar la mínima fuerza **P** que habrá que aplicar a la palanca para evitar que la masa de 50 kg llegue al suelo.
c. Si es $P = 250$ N la máxima fuerza que se puede aplicar a la palanca sin que se rompa, determinar la máxima distancia que podrá caer la masa de 50 kg antes de volver a aplicar el freno.

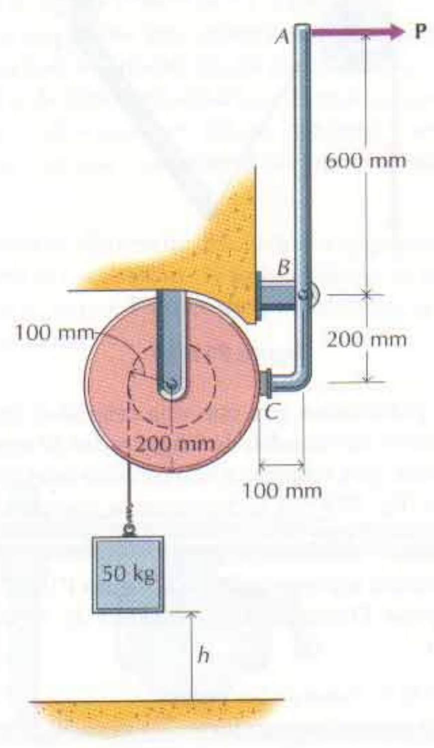
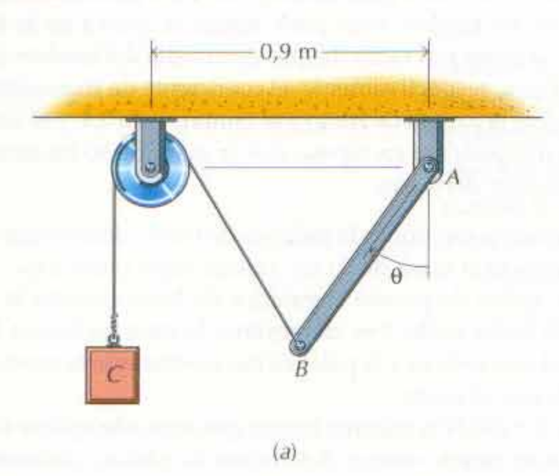


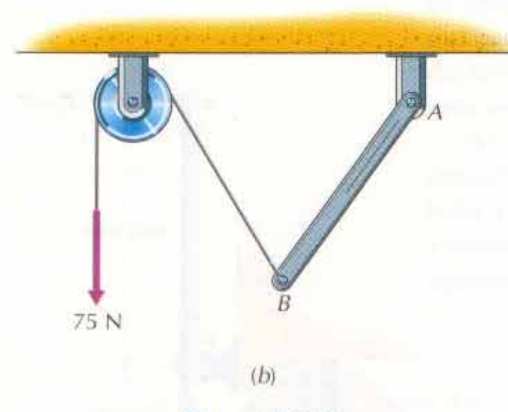
Figura P18-84

18-85 La barra AB representada en la figura P18-85*a* pesa 50 N, tiene una longitud de 0,9 m y puede girar en un plano vertical. Una cuerda atada a la barra en B pasa por una polea pequeña de poco peso y sostiene un peso C de 75 N. Si se suelta el sistema a partir del reposo cuando $\theta = 0°$, determinar la velocidad angular ω_{AB}:

a. Cuando $\theta = 30°$.
b. Cuando $\theta = 90°$.
c. Repetir los apartados *a* y *b* cuando se sustituya el peso de 75 N por una fuerza constante, según se indica en la figura P18-85*b*.



(*a*)



(*b*)

Figura P18-85

18-86* Una plataforma gira con una celeridad angular $\omega_1 = 10$ rad/s mientras un cilindro de 5 kg y radio 50 mm montado en la plataforma, gira respecto a ella con una celeridad angular $\omega_2 = 25$ rad/s (fig. P18-86). Determinar la energía cinética del cilindro para $a = 50$ mm

18-87 El sistema representado en la figura P18-87 se suelta a partir del reposo. Determinar la celeridad de A cuando haya caído 0,9 m si:

a. Se desprecia la masa de las poleas.
b. La polea B es un disco uniforme de peso 50 N y la polea C es un disco uniforme de peso 100 N.

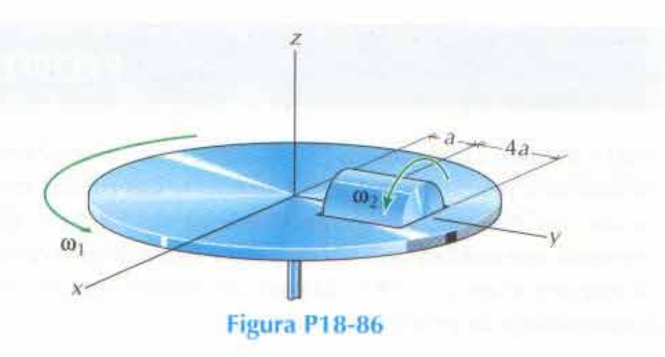


Figura P18-86

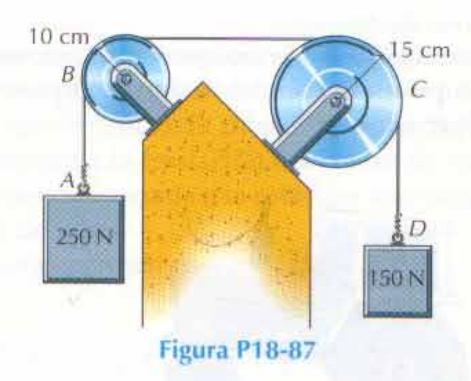


Figura P18-87

18-88* La rueda con radios representada en la figura P18-88 rueda sin deslizamiento por una superficie horizontal. Como ha perdido un par de radios, el centro de masa de esta rueda de 12 kg se halla a 50 mm de su centro y el radio de giro relativo a su centro de masa es 0,6 mm. Si el centro de la rueda (no su centro de masa) lleva una celeridad de 3 m/s cuando $\theta = 0°$, determinar:

a. La velocidad angular ω de la rueda cuando $\theta = 90°$.
b. Las fuerzas normal y de rozamiento que se ejercen sobre la rueda cuando $\theta = 90°$.

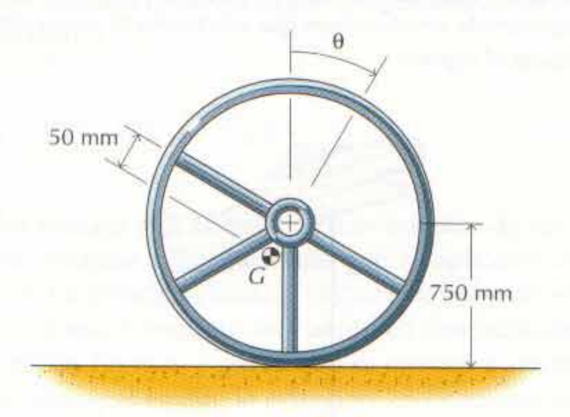


Figura P19-88

18-89 Una cuerda flexible hace girar un volante en la forma que se indica en la figura P18-89. El volante es un cilindro macizo de peso 100 N y diámetro 45 cm y la cuerda está inicialmente arrollada cinco vueltas completas sobre él. Si el volante

parte del reposo y la cuerda se desprende cuando su extremo se encuentre en el borde de la rueda *A*, determinar la velocidad angular final del volante:

a. Cuando al extremo de la cuerda flexible se aplica una fuerza constante $P = 125$ N, según se indica en la figura P18-89*a*.
b. Cuando se sustituye la fuerza **P** por una carga de 125 N atada a la cuerda, según se indica en la figura P18-89*b*.

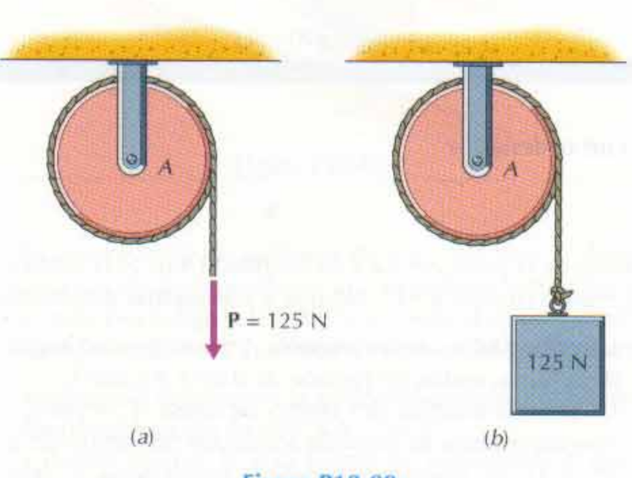
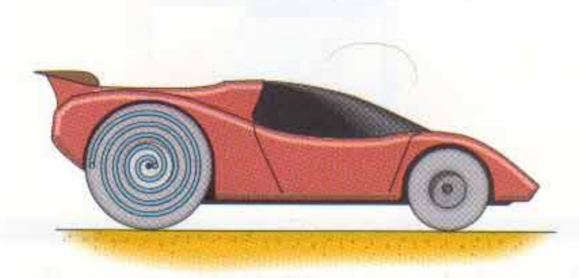


Figura P18-89

18-90* Un coche de juguete se mueve gracias a un resorte en espiral, según se indica en la figura P18-90. La rueda motriz es un disco macizo de 750 g y 150 mm de diámetro, la carrocería tiene una masa de 150 g y las ruedas delanteras son de masa despreciable. El resorte en espiral ejerce sobre la rueda motriz un momento $M = k\,\theta$ donde $k = 0{,}01$ m · N/rad y θ se expresa en radianes. Determinar la máxima celeridad que alcanzará el coche si parte del reposo estando el resorte arrollado 8 vueltas. (El resorte se desconecta cuando $\theta = 0$.)


Figura P18-90

18-91 El cilindro uniforme de la figura P18-91 tiene un radio de 5 cm, una longitud de 20 cm y pesa 25 N. Gira en torno a su eje con celeridad angular constante $\omega_1 = 20$ rad/s. Al mismo tiempo, el yugo que sostiene al cilindro gira alrededor de un eje vertical con celeridad angular $\omega_2 = 8$ rad/s. Determinar la energía cinética del cilindro en ese instante.

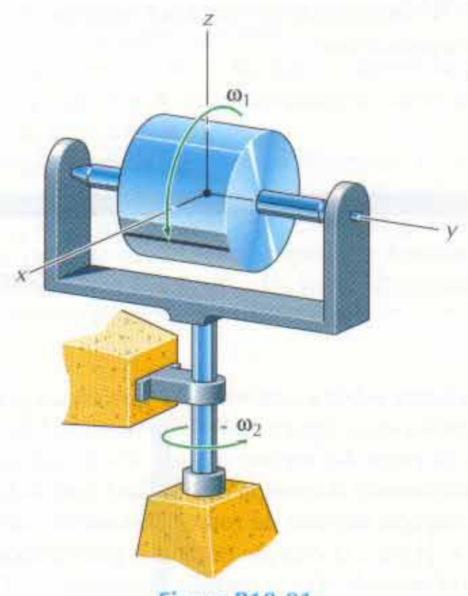
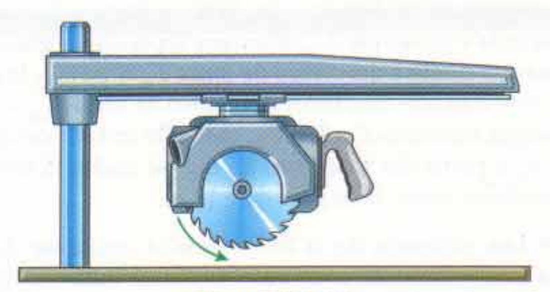


Figura P18-91

18-92* En la figura P18-92 se ha representado una sierra de brazo radial que tiene una celeridad de funcionamiento de 1500 rpm. La hoja y el motor tienen una masa combinada de 1,2 kg y un radio de giro centroidal $k_G = 25$ mm. Cuando se desconecta la sierra, el rozamiento en los cojinetes y un freno magnético ejercen un par constante **T** de freno sobre la hoja y el motor.

a. Determinar el número de revoluciones que dará la hoja antes de pararse si $T = 0{,}002$ m · N (sólo rozamiento en cojinetes).
b. Determinar el par **T** necesario para detener la hoja en una sola revolución.


Figura P18-92

18-93 Un cilindro uniforme de 75 N de peso se apoya en un cangilón fijo, según se indica en la figura P18-93. El diámetro del cilindro es de 20 cm, el coeficiente de rozamiento entre el cilindro y el cangilón vale 0,15 en A, mientras que la superficie en B es lisa. Si, de pronto, se aplica al cilindro un par constante de 4,5 m · N, determinar la velocidad angular del cilindro al cabo de 5 revoluciones.

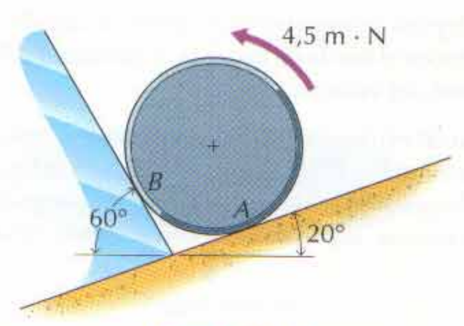


Figura P18-93

Problemas para resolver con ordenador

C18-94 La barra esbelta uniforme AB gira en un plano vertical según se indica en la figura P18-94. Su masa es 5 kg y su longitud 1,2 m. Si parte del reposo cuando $\theta = 0°$, calcular y representar gráficamente la energía cinética del centro de masa $T_v = \frac{1}{2}mv_G^2$, la energía cinética de rotación alrededor del centro de masa $T_\omega = \frac{1}{2}I_G\omega^2$, la energía potencial gravitatoria V_g (tómese nula en el nivel de A) y la energía mecánica $E = T_v + T_\omega + V_g$, todo ello en función del ángulo θ ($0° \leq \theta \leq 90°$).

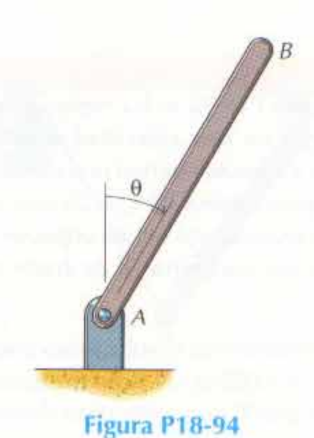


Figura P18-94

C18-95 Una bola tiene un peso de 80 N y un diámetro de 215 mm. Se suelta por una pista de bolos con una celeridad inicial de 6 m/s y sin velocidad angular. Si el coeficiente de rozamiento entre bola y pista vale 0,1, calcular y representar gráficamente la energía cinética del centro de masa $T_v = \frac{1}{2}mv_G^2$, la energía cinética de rotación alrededor del centro de masa $T_\omega = \frac{1}{2}I_G\omega^2$ y la energía mecánica $E = T_v + T_\omega$, todo ello en función de la posición x_G a partir del momento en que se suelta la bola hasta cuando choca con el bolo situado a 18 m.

C18-96 Los extremos de la barra esbelta uniforme AB están unidos a correderas de poco peso, según se indica en la figura P18-96. A la corredera B se aplica una fuerza constante de 10 N; la masa de la barra es 6 kg y su longitud 1,4 m. Si la barra parte del reposo cuando $\theta = 0°$, calcular y representar gráficamente:

a. La velocidad $\mathbf{v}_A$ de la corredera A y la velocidad angular ω de la barra, ambas en función de θ ($0° \leq \theta \leq 180°$).
b. La energía cinética del centro de masa $T_v = \frac{1}{2}mv_G^2$ y la energía cinética de rotación alrededor del centro de masa $T_\omega = \frac{1}{2}I_G\omega^2$ la energía potencial gravitatoria V_g (tómese nula en el nivel de A) y la energía mecánica $E = T_v + T_\omega + V_g$ todo ello en función del ángulo θ ($0° \leq \theta \leq 180°$).

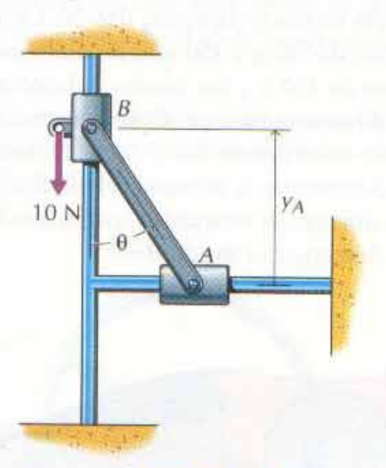


Figura P18-96

C18-97 Un cilindro uniforme de 125 N de peso rueda sin deslizamiento por un plano inclinado (fig. P18-97). Mediante un yugo, se une al eje del cilindro un resorte (k = 200 N/m). El rozamiento entre yugo y eje es despreciable. Si el cilindro parte del reposo cuando $x = 0$ estando indeformado el resorte, calcular y representar gráficamente la energía cinética del centro de masa $T_v = \frac{1}{2}mv_G^2$, la energía cinética de rotación alrededor del centro de masa $T_\omega = \frac{1}{2}I_G\omega^2$, la energía potencial gravitatoria

V_g (tómese nula al nivel del cilindro cuando $x = 0$), la energía potencial elástica V_s y la energía mecánica $E = T_v + T_w + V_g + V_s$, todo ello en función de x ($0 \le x \le 75$ cm).

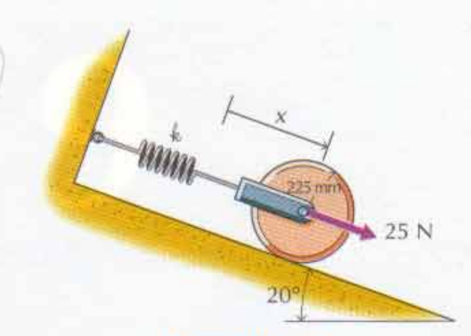


Figura P18-97

C18-98 Un semicilindro uniforme de 5 kg y 800 mm de diámetro rueda sin deslizamiento por una superficie horizontal, según se indica en la figura P18-98. Si se suelta el cilindro a partir del reposo cuando $\theta = 0°$, calcular y representar gráficamente:

a. La velocidad angular ω y la aceleración angular α del semicilindro en función de θ ($0° \le \theta \le 180°$).
b. La fuerza normal **N** y la fuerza de rozamiento **F** que la superficie ejerce sobre el semicilindro en función de θ ($0° \le \theta \le 180°$)
c. La energía cinética del centro de masa $T_v = \frac{1}{2}mv_G^2$, la energía cinética de rotación alrededor del centro de masa $T_\omega = \frac{1}{2}I_G\omega^2$ la energía potencial gravitatoria V_g (tómese nula al nivel de la superficie horizontal) y la energía mecánica $E = T_v + T_\omega + V_g$, todo ello en función del ángulo θ ($0° \le \theta \le 180°$).

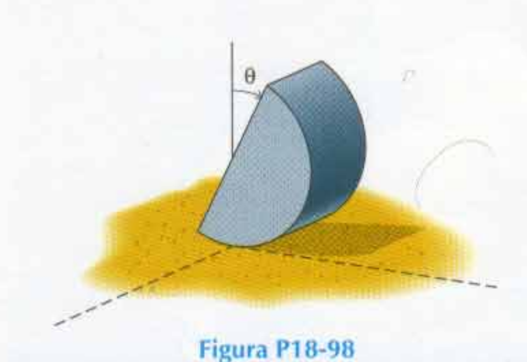


Figura P18-98

C18-99 La barra esbelta uniforme AB representada en la figura P18-99 está unida a una corredera B de poco peso y desliza su extremo A por una superficie horizontal exenta de rozamiento. La barra pesa 75 N y su longitud es de 1,5 m. Si parte del reposo cuando $\theta = 0°$, calcular y representar gráficamente:

a. La velocidad angular ω y la aceleración angular α de la barra en función de θ ($0° \le \theta \le 90°$).
b. Las fuerzas normales $\mathbf{N}_A$ y $\mathbf{N}_B$ que la superficie y la corredera ejercen en A y B, respectivamente, sobre la barra en función de θ ($0° \le \theta \le 90°$).
c. La energía cinética del centro de masa $T_v = \frac{1}{2}mv_G^2$, la energía cinética de rotación alrededor del centro de masa $T_\omega = \frac{1}{2}I_G\omega^2$, la energía potencial gravitatoria V_g (tómese nula al nivel de la superficie horizontal) y la energía mecánica $E = T_v + T_\omega + V_g$, todo ello en función del ángulo θ ($0° \le \theta \le 90°$).

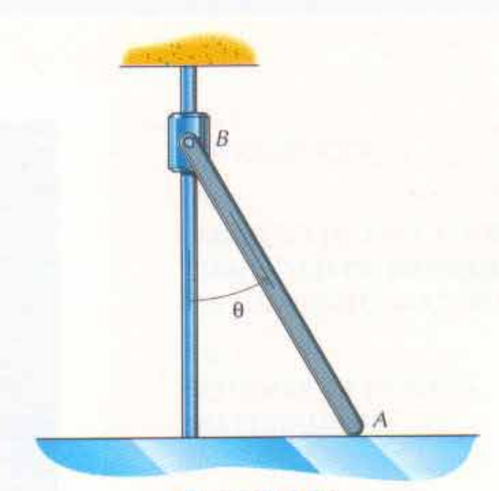
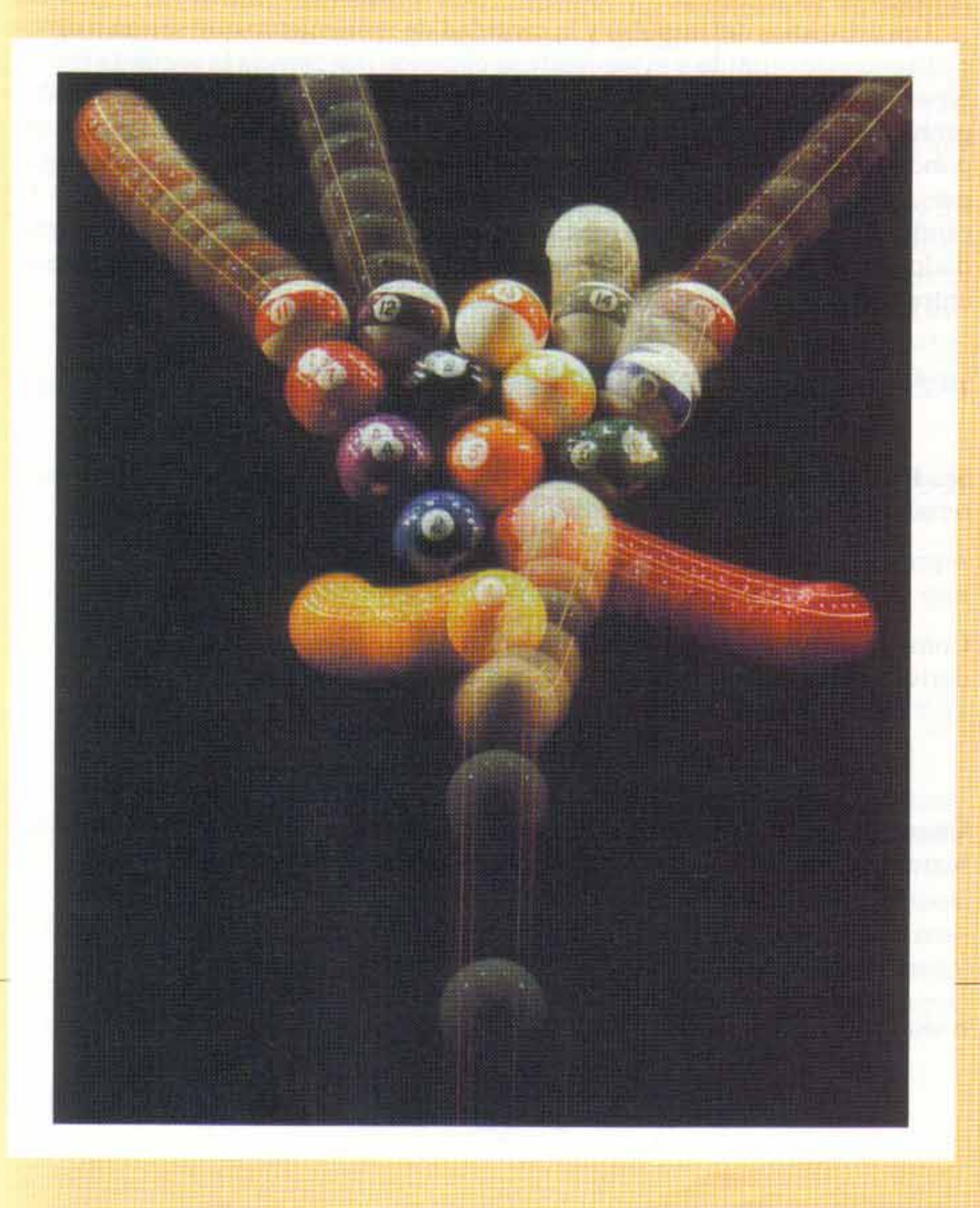


Figura P18-99

19 CINÉTICA DEL PUNTO MATERIAL: IMPULSO, CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y MOMENTO CINÉTICO



Cuando chocan dos esferas duras, sus velocidades antes y después del choque están relacionadas por los principios del impulso y cantidad de movimiento.

19.1 INTRODUCCIÓN

El estudio de la Cinética se basa en la segunda ley de Newton del movimiento. En los capítulos 15 y 16 se ha utilizado directamente la segunda ley de Newton para relacionar las fuerzas que se ejercen sobre puntos materiales y cuerpos rígidos con las aceleraciones que en ellos originan. En realidad, cuando queramos tener información acerca de la aceleración o del valor de una fuerza en un instante, la utilización de la segunda ley de Newton será el método más fácil a seguir.

En los capítulos 17 y 18 se integró la segunda ley de Newton respecto a la posición para obtener el teorema de las fuerzas vivas. Como éste no es sino una combinación de la segunda ley de Newton y los principios de la Cinemática, todo problema que pueda resolverse aplicando dicho teorema se podrá también resolver utilizando la segunda ley de Newton. Sin embargo, el teorema de las fuerzas vivas resulta particularmente útil para resolver problemas en los que haya que relacionar las celeridades de un cuerpo en dos posiciones de su movimiento y las fuerzas que intervienen puedan expresarse en función de la posición de dicho cuerpo.

Los principios del impulso y la cantidad de movimiento que se van a desarrollar en este capítulo y el siguiente se obtienen integrando la segunda ley de Newton respecto al tiempo. Las ecuaciones resultantes sirven para resolver problemas en los que haya que relacionar las velocidades de un cuerpo correspondientes a dos instantes diferentes y las fuerzas que intervienen puedan expresarse en función del tiempo. Aun cuando los principios del impulso y la cantidad de movimiento no sean imprescindibles para resolver un problema dado, resultan particularmente útiles para la solución de problemas de choque entre cuerpos y de sistemas de masa variable.

19.2 IMPULSO DE UNA FUERZA Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE UN PUNTO MATERIAL

Sea $\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$ la resultante de todas las fuerzas que se ejercen sobre un punto material de masa m. La segunda ley de Newton aplicada a él puede escribirse

$$\mathbf{R} = m\mathbf{a} = m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Como la masa del punto no depende del tiempo, podemos introducirla en la derivada y tenemos

$$\mathbf{R} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \qquad \textbf{(19-1)}$$

Cuando las fuerzas sean constantes o sólo dependan del tiempo, podremos integrar la ecuación 19-1 quedando

$$\int_{t_2}^{t_1} \mathbf{R}\,dt = \int_{mv_i}^{mv_f} d(m\mathbf{v}) = (m\mathbf{v})_f - (m\mathbf{v})_i$$

o sea

$$(m\mathbf{v})_i + \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{R}\,dt = (m\mathbf{v})_f \qquad \textbf{(19-2)}$$

donde $\mathbf{v}_i$ es la velocidad del punto en un instante inicial t_i y $\mathbf{v}_f$ es la velocidad del punto en el instante final t_f.

19.2.1 Cantidad de movimiento

El vector $m\mathbf{v}$ de las ecuaciones 19-1 y 19-2 se representa por el símbolo **L** y recibe el nombre de *cantidad de movimiento* del punto material. Como m es un escalar positivo, los vectores cantidad de movimiento y velocidad del punto tendrán la misma dirección y sentido. El módulo de la cantidad de movimiento es igual al producto de la masa m por la celeridad v del punto material. En el sistema SI, la unidad de cantidad de movimiento es el kg · m/s o, lo que es equivalente, N · s. En el U.S. Customary system es el slug · ft/s o lb · s.

19.2.2 Impulso de una fuerza

La integral $\int_{t_i}^{t_f} \mathbf{R}\, dt$ recibe el nombre de *impulso* de la fuerza **R**. El impulso es un vector cuyas dimensiones son fuerza-tiempo. En el sistema SI, su módulo se expresa en N · s = kg · m/s, que es la misma unidad que se obtuvo para la cantidad de movimiento de un punto material. Por tanto, la ecuación 19-2 es dimensionalmente correcta. Si se utilizan unidades del U.S. Customary system, el impulso se expresará en lb · s = slug · ft/s, que también es la unidad que se obtuvo para la cantidad de movimiento.

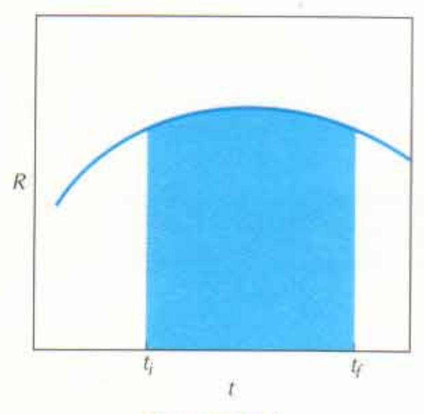


Figura 19-1

En general, la fuerza resultante $\mathbf{R}(t) = R(t)\mathbf{e}_R$ será un vector de módulo y dirección variables con el tiempo entre los instantes t_i y t_f. Pero si la dirección $\mathbf{e}_R$ de la fuerza no variara durante ese intervalo de tiempo, podría sacarse de la integral. Entonces, el valor de la integral —que representa el módulo del impulso— es igual al área sombreada bajo la gráfica de R en función de t (fig. 19-1). Si también fuese constante el módulo de la fuerza, también se podría sacar de la integral y quedaría

$$\int_{t_i}^{t_f} \mathbf{R}_c\, dt = \mathbf{R}_c \int_{t_i}^{t_f} dt = \mathbf{R}_c (t_f - t_i) \tag{19-3}$$

La ecuación 19-3 se utiliza también para definir la fuerza media en el tiempo $\mathbf{R}_{med}$, que es la fuerza constante equivalente que daría el mismo impulso que la fuerza original variable con el tiempo $\mathbf{R}(t)$

$$\mathbf{R}_{med} = \frac{1}{(t_f - t_i)} \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{R}\, dt \tag{19-4}$$

El valor medio de la fuerza dado por la ecuación 19-4 (valor medio en el tiempo) suele ser diferente del valor medio calculado a partir del trabajo efectuado por la fuerza (valor medio en la distancia).

Cuando el módulo y la dirección de la fuerza resultante $\mathbf{R}(t)$ varíen ambos durante el intervalo de tiempo, el cálculo de la integral del impulso deberá realizarse por componentes. Suele preferirse utilizar componentes cartesianas rectangulares porque los vectores unitarios **i**, **j** y **k** no varían con el tiempo. Descomponiendo **R** en sus componentes rectangulares tenemos

$$\int_{t_i}^{t_f} \mathbf{R}\, dt = \mathbf{i}\int_{t_i}^{t_f} R_x\, dt + \mathbf{j}\int_{t_i}^{t_f} R_y\, dt + \mathbf{k}\int_{t_i}^{t_f} R_z\, dt$$

Aun cuando el trabajo de una fuerza (definido en el capítulo 17) y el impulso de una fuerza sean integrales de una fuerza, son conceptos totalmente diferentes. Dos diferencias importantes son las siguientes:

1. El trabajo de una fuerza es una magnitud escalar. El impulso es vectorial.
2. El trabajo de una fuerza es nulo si la fuerza no tiene componente según la dirección del desplazamiento. El impulso de una fuerza no es nunca nulo ni siquiera si está aplicada a un punto en reposo.

19.2.3 Teorema de la cantidad de movimiento

La ecuación 19-2 expresa el teorema de la cantidad de movimiento:

$$\mathbf{L}_i + \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{R}\,dt = \mathbf{L}_f$$

La cantidad de movimiento final $\mathbf{L}_f$ *de un punto material es la suma vectorial de su cantidad de movimiento inicial* $\mathbf{L}_i$ *más el impulso* $\int \mathbf{R}\,dt$ *de la resultante de todas las fuerzas que se ejercen sobre dicho punto.*

A diferencia de la ecuación del teorema de las fuerzas vivas, que es una ecuación escalar, la ecuación 19-2 es una ecuación vectorial que representa tres ecuaciones escalares. Expresada en coordenadas cartesianas rectangulares, sus tres componentes escalares son

$$mv_{xi} + \int_{t_i}^{t_f} R_x\,dt = mv_{xf}$$
$$mv_{yi} + \int_{t_i}^{t_f} R_y\,dt = mv_{yf}$$
$$mv_{zi} + \int_{t_i}^{t_f} R_z\,dt = mv_{zf}$$

Tengamos ahora en cuenta que el teorema de la cantidad de movimiento no constituye un principio nuevo. Es simplemente una combinación de la segunda ley de Newton con los principios de la Cinemática para el caso particular en que la fuerza sea función del tiempo. A pesar de todo, resulta útil para obtener la velocidad del punto material cuando se conoce la fuerza en función del tiempo y no nos interesa la aceleración.

19.2.4 Conservación de la cantidad de movimiento

De la ecuación 19-1 resulta que la variación por unidad de tiempo de la cantidad de movimiento $m\mathbf{v}$ será nula cuando $\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Cuando esto suceda, la cantidad de movimiento *se conserva*, es decir, es constante en módulo y dirección:

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_f \quad \text{(19-5)}$$

La cantidad de movimiento puede conservarse en una dirección (si es nula la suma de fuerzas en dicha dirección) independientemente de cualquier otra dirección.

Aun cuando a la ecuación 19-5 se le llama a menudo *Principio de la conservación de la cantidad de movimiento*, sólo es un caso particular del teorema de la cantidad de movimiento. La conservación de la cantidad de movimiento puede verse que no es sino otro enunciado de la primera ley de Newton.

La conservación de la cantidad de movimiento no está relacionada con la conservación de la energía cinética. Por ejemplo, cuando una esfera elástica rebota en una superficie dura, la celeridad después del rebote es casi igual a la que llevaba antes de chocar con la superficie y podemos considerar que se conserva la energía cinética. Sin embargo, el sentido de la velocidad después del choque es el opuesto al que tenía antes de chocar..Por tanto, la cantidad de movimiento después del choque es opuesta a la que tenía antes de él y, en consecuencia, la cantidad de movimiento no se ha conservado. Análogamente, cuando chocan dos partículas, es posible que se conserve la cantidad de movimiento de las dos partículas aun cuando se pierda la mayor parte de su energía cinética.

Por último, observemos que la masa m del punto material se supone constante en las ecuaciones 19-1 a 19-5. Por tanto, esas ecuaciones no se podrán utilizar para resolver problemas en los que intervenga el movimiento de cuerpos tales como los cohetes, que adquieran o pierdan masa. En el apartado 19.7 consideraremos este tipo de problemas.

PROBLEMA EJEMPLO 19.1

Una pelota de ping-pong que tiene una masa de 5,67 g (0,2 onzas) tiene una velocidad inicial $\mathbf{v}_i = 2{,}4\ \mathbf{j} + 1{,}8\ \mathbf{k}$ m/s cuando una ráfaga de viento le ejerce una fuerza $\mathbf{F} = 0{,}139t\ \mathbf{i}$ N (t se expresa en segundos). Determinar el módulo, dirección y sentido de la velocidad de la pelota al cabo de 0,5 s. (El sentido positivo del eje z es hacia arriba.)

SOLUCIÓN

En la figura 19-2 se tiene el diagrama de sólido libre de la pelota, donde aparecen su peso $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$ y la fuerza $\mathbf{F}$ del viento. La masa de la pelota, expresada en kilogramos, es

$$5{,}67(10^{-3})\ \text{kg}$$

y el impulso sobre la pelota durante 0,5 s es

$$\int_0^{(0,5)} [0{,}139t\mathbf{i} - 5{,}67(10^{-3})(9{,}81)\mathbf{k}]\, dt = 0{,}01738\mathbf{i} - 0{,}278\mathbf{k}\ \text{N} \cdot \text{s}$$

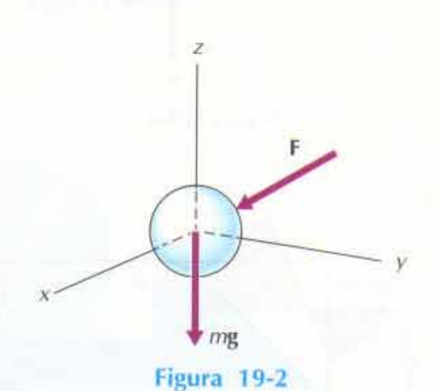


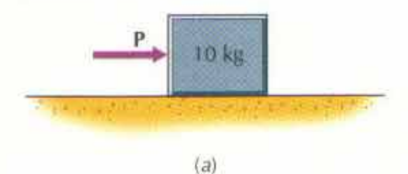
Figura 19-2

Aplicando estos valores en la expresión que traduce el teorema de la cantidad de movimiento (ec. 19-2) se tiene

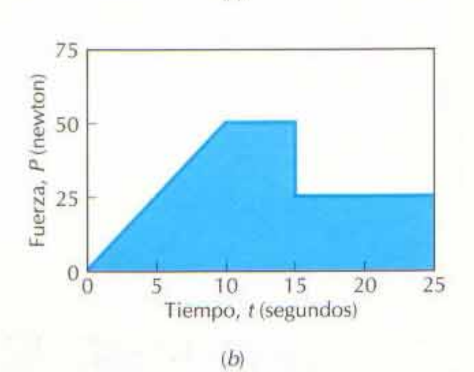
$$5{,}67(10^{-3})(2{,}4\mathbf{j} + 1{,}8\mathbf{k}) + 0{,}01738\mathbf{i} - (0{,}0278\mathbf{k})$$
$$= 5{,}67(10^{-3})\mathbf{v}_f$$

de donde

$$\mathbf{v}_f = 3{,}07\mathbf{i} + 2{,}40\mathbf{j} - 3{,}10\mathbf{k}\ \text{m/s} \qquad \text{Resp.}$$



(a)



(b)

Figura 19-3

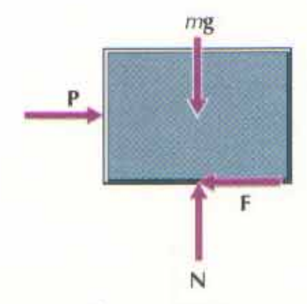


Figura 19-4

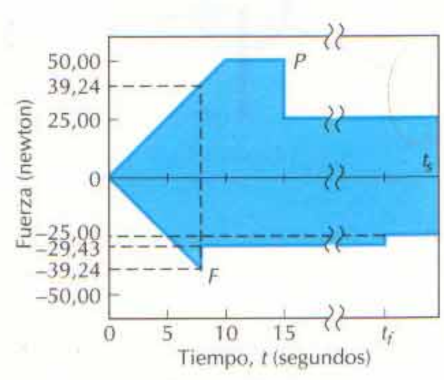


Figura 19-5

PROBLEMA EJEMPLO 19.2

Una caja de 10 kg descansa sobre una superficie horizontal según se indica en la figura 19-3*a* y se le aplica una fuerza horizontal **P**. El módulo de **P** varía con el tiempo según se indica en la figura 19-3*b*. Si los coeficientes de rozamiento estático y dinámico valen 0,4 y 0,3, respectivamente, determinar:

a. La velocidad de la caja en $t = 10$ s.
b. La velocidad de la caja en $t = 15$ s.
c. El tiempo t_f para el cual deja la caja de deslizarse.

SOLUCIÓN

a. En la figura 19-4 puede verse el diagrama de sólido libre de la caja. Como no hay movimiento en la dirección vertical, la suma de fuerzas en dicha dirección da

$$N = (10)(9{,}81) = 98{,}1 \text{ N}$$

(Nótese que también se podría haber utilizado la ecuación del teorema de la cantidad de movimiento para las componentes y para obtener dicho resultado, si bien ello no comporta ninguna ventaja.)

La fuerza de rozamiento será menor o igual que $0{,}4\,N$ hasta que se inicie el movimiento de la caja y será igual a $0{,}3\,N$ una vez esté en movimiento. Cuando se aplica la fuerza **P** a la caja, el rozamiento disponible es suficiente, inicialmente, para impedir su movimiento y la fuerza de rozamiento crece en igual forma que la fuerza **P** (fig. 19-5). Ahora bien, cuando **P** alcanza el valor $0{,}4\,N = 39{,}24$ N (en $t = 7{,}848$ s), el rozamiento disponible ya no puede impedir el movimiento de la caja, ésta comienza a deslizarse y la fuerza de rozamiento cae al valor $0{,}3N = 29{,}43$ N. La fuerza de rozamiento se mantiene entonces igual a 29,43 N hasta t_f, instante en que se detiene y el rozamiento cae a 25 N, que es la fuerza necesaria para mantener la caja en equilibrio.

La componente x del impulso de la fuerza **P** que se ejerce sobre la caja entre $t = 0$ y $t = 10$ s, tiene un valor igual al área encerrada bajo la gráfica

$$\int_0^{10} P\,dt = \frac{1}{2}(50)(10) = 250 \text{ N}\cdot\text{s}$$

mientras que la componente x del impulso de la fuerza de rozamiento que se ejerce sobre la caja entre $t = 0$ y $t = 10$ s es

$$\int_0^{10} F\,dt = \frac{1}{2}(-39{,}24)(7{,}848) + (-29{,}43)(10 - 7{,}848) = -217{,}31 \text{ N}\cdot\text{s}$$

Luego, el teorema de la cantidad de movimiento da para la componente x

$$0 + 250 - 217{,}31 = 10v_{10}$$

o sea

$$v_{10} = 3{,}27 \text{ m/s}$$ Resp.

b. Entre $t = 10$ y $t = 15$ s, los impulsos son

$$\int_{10}^{15} P\,dt = (50)(15 - 10) = 250 \text{ N}\cdot\text{s}$$

$$\int_{10}^{15} F\,dt = (-29{,}43)(15 - 10) = -147{,}15 \text{ N}\cdot\text{s}$$

y la ecuación que traduce el teorema de la cantidad de movimiento da para la componente x

$$(10)(3{,}27) + 250 - 147{,}15 = 10v_{15}$$

y

$$v_{15} = 13{,}55 \text{ m/s} \qquad \text{Resp.}$$

c. Entre $t = 15$ s y $t = t_f$ los impulsos son

$$\int_{15}^{t_f} P\,dt = (25)(t_f - 15)$$

$$\int_{15}^{t_f} F\,dt = (-29{,}43)(t_f - 15)$$

y la ecuación que traduce el teorema de la cantidad de movimiento da para la componente x

$$(10)(13{,}55) + (25 - 29{,}43)(t_f - 15)$$

o sea

$$t_f = 45{,}6 \text{ s} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

19-1* Un disco de hockey pesa 1,78 N, se desliza sobre el hielo y se observa que su celeridad disminuye de 18 m/s a 12 m/s en 3 s. Determinar la fuerza media de rozamiento que se ejerce sobre el disco y el correspondiente coeficiente de rozamiento cinético. (Supóngase horizontal la superficie del hielo).

19-2* Un automóvil de 1200 kg va a 75 km/h por una carretera helada cuando, de pronto, el conductor aplica los frenos. Si el coeficiente de rozamiento vale 0,15 y los cuatro neumáticos patinan, determinar el tiempo que tardará el auto en detenerse.

19-3 Una lancha que pesa 2,5 kN y va a 32 km/h se detiene 10 s después de parar el motor. Determinar la fuerza media de freno que el agua ejerce sobre la lancha.

19-4* La celeridad del asiento de un tobogán pasa de 0 a 10 m/s en 6 s. La masa combinada del asiento y los ocupantes es de 110 kg y la pendiente es de 20°. Determinar la fuerza media de rozamiento entre el asiento y la nieve y el correspondiente coeficiente de rozamiento.

19-5 El empuje del cohete que impulsa un trineo cuyo peso es de 2,5 kN varía con el tiempo según se indica en la figura P19-5. Si el trineo parte del reposo y se mueve en línea recta por una pista horizontal, determinar su velocidad cuando se apaga el cohete. (Despréciese el rozamiento).

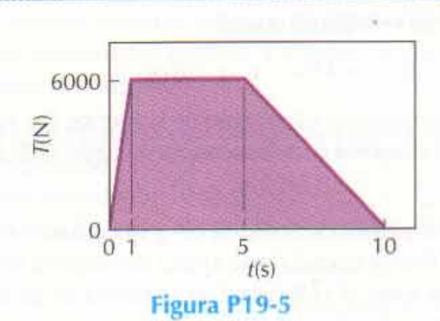


Figura P19-5

19-6* Un disco de 2,0 kg se desliza por una superficie horizontal lisa cuando sobre él se ejerce una fuerza transversal (fig. P19-6*a*). Ésta forma un ángulo θ con la dirección inicial de **v** y su módulo varía según se indica en la figura P19-6*b*. Si $v = 10$ m/s y $\theta = 50°$, determinar el módulo, dirección y sentido de la velocidad del disco cuando:

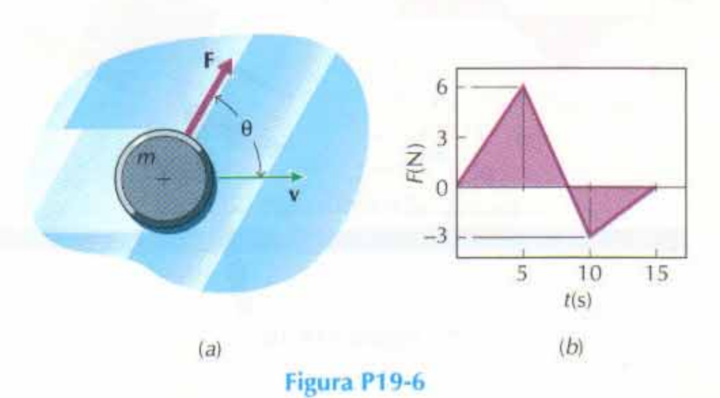


Figura P19-6

a. $t = 5$ s. b. $t = 10$ s. c. $t = 5$ s.

19-7 Si el disco del Problema 19-6 pesara 25 N y tuviera una celeridad inicial de 7,5 m / s, determinar el módulo, dirección y sentido del disco cuando

a. $t = 5$ s. **b.** $t = 10$ s. **c.** $t = 20$ s.

El ángulo es $\theta = 105°$ y el módulo de la fuerza **F** varía según se indica en la figura P19-7.

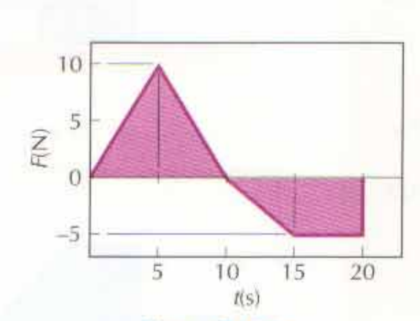


Figura P19-7

19-8* Determinar la máxima velocidad que alcanza el disco del problema 19-6.

19-9 Si el disco del problema 19-6 pesara 25 N y tuviera una celeridad inicial de 7,5 m / s, determinar el módulo, dirección y sentido de su velocidad cuando:

a. $t = 5$ s. **b.** $t = 15$ s. **c.** $t = 20$ s.

Supóngase constante el módulo de la fuerza, $F = 10$ N, pero que el ángulo θ aumenta constantemente a razón de 0,4 rad / s y que $\theta = 0$ en $t = 0$.

19-10* Una pelota de tenis de 60 g lleva una velocidad horizontal de 10 m / s cuando se le aplica un raquetazo (fig. P19-10). Después de éste, la velocidad de la pelota es de 25 m / s (también horizontal) y forma un ángulo de 15° con la dirección inicial. Si el tiempo de contacto es de 0,05 s, determinar la fuerza media (en módulo, dirección y sentido) que le aplica la raqueta.

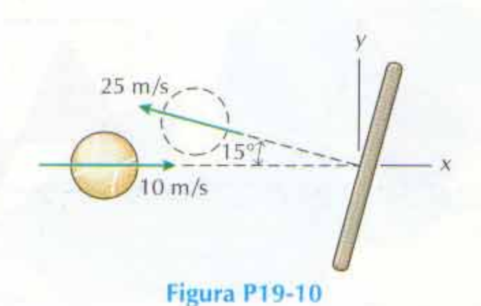


Figura P19-10

19-11 Una pelota de béisbol de 142 g tiene una velocidad horizontal de 27 m / s inmediatamente antes de ser alcanzada por el bate. Después del impacto, la velocidad de la pelota es de 33 m / s formando un ángulo de 30° por encima de la horizontal (fig. P19-11). Si el tiempo de impacto es de 0,01 s, determinar la fuerza media (en módulo, dirección y sentido) que el bate ejerce sobre la pelota.

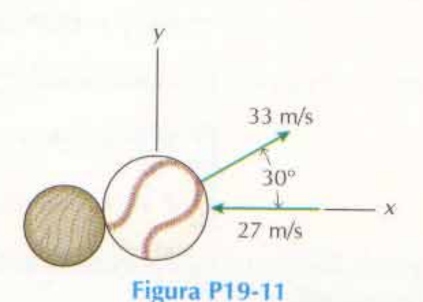


Figura P19-11

19-12* Una pelota de 0,2 kg de masa tiene una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = 15\mathbf{j} + 20\mathbf{k}$ m / s cuando una racha de viento le aplica una fuerza. Si esta fuerza varía con el tiempo en la forma $\mathbf{F} = 0{,}5(t^2 - 9)(\cos 30°\mathbf{i} - \text{sen } 30°\mathbf{j})$ donde t se expresa en segundos y **F** en newton, determinar el módulo, dirección y sentido de la velocidad de la pelota cuando:

a. $t = 1$ s.
b. $t = 2$ s.
c. $t = 3$ s.

(La gravedad actúa en el sentido negativo del eje z.)

19-13 Una pelota que pesa 2,5 N tiene una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = 9\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$ m / s. Si sobre ella se ejerce una fuerza constante $\mathbf{F} = (-0{,}5\mathbf{i} + 0{,}5\mathbf{j})$ N, determinar el módulo, dirección y sentido de su velocidad cuando se mueva paralelamente al plano y-z. (La gravedad actúa en el sentido negativo del eje z.)

19-14* A una caja de 10 kg que descansa sobre una superficie horizontal, según se indica en la figura P19-14*a*, se le aplica una fuerza **P** horizontal. El módulo de **P** varía con el tiempo según

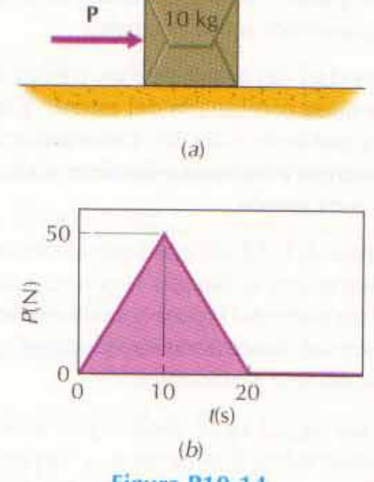


Figura P19-14

se indica en la figura P19-14*b*. Si los coeficientes de rozamiento estático y cinético valen 0,4 y 0,3, respectivamente, determinar:

a. El instante t_1 en el que la caja comienza a deslizarse.
b. La máxima velocidad $v_{máx}$ de la caja y el instante $t_{máx}$ en que la alcanza.
c. El instante t_f en el cual cesa el deslizamiento.

19-15 A una caja que pesa 25 N y descansa sobre una superficie horizontal se le aplica una fuerza **P** (fig. P19-15*a*). El módulo de **P** varía con el tiempo según se indica en la figura P19-15*b*. Si los coeficientes de rozamiento estático y cinético son 0,4 y 0,3, respectivamente, determinar:

a. El instante t_1 en el que la caja comienza a deslizarse.
b. La máxima velocidad $v_{máx}$ de la caja y el instante $t_{máx}$ en que la alcanza.
c. El instante t_f en el cual cesa el deslizamiento.

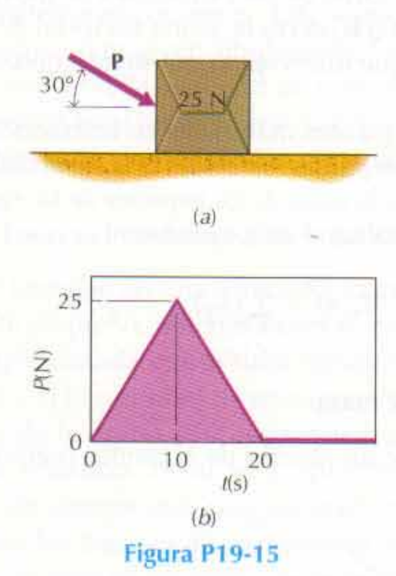


Figura P19-15

19-16* A una caja de 10 kg que descansa sobre un plano inclinado se le aplica una fuerza **P** (fig. 19-16*a*). El módulo de **P** varía con el tiempo según se indica en la figura P19-16*b*. Si los coeficientes de rozamiento estático y cinético valen 0,6 y 0,4, respectivamente, determinar:

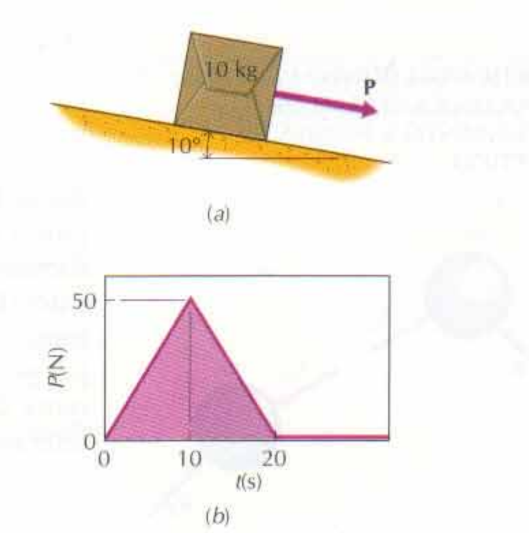


Figura P19-16

a. El instante t_1 en el que la caja comienza a deslizarse.
b. La máxima velocidad $v_{máx}$ de la caja y el instante $t_{máx}$ en que la alcanza.
c. El instante t_f en el cual cesa el deslizamiento.

19-17 A una caja que pesa 50 N y descansa sobre un plano inclinado se le aplica una fuerza **P** (fig. P19-17*a*). El módulo de **P** varía con el tiempo según se indica en la figura P19-17*b*. Si los coeficientes de rozamiento estático y cinético valen 0,6 y 0,4, respectivamente, determinar:

a. El instante t_1 en el que la caja comienza a deslizarse.
b. Su celeridad cuando $t = 5$ s.
c. Su celeridad cuando $t = 10$ s.
d. El menor valor P_{15} para el cual la caja estará en reposo en $t = 20$ s.

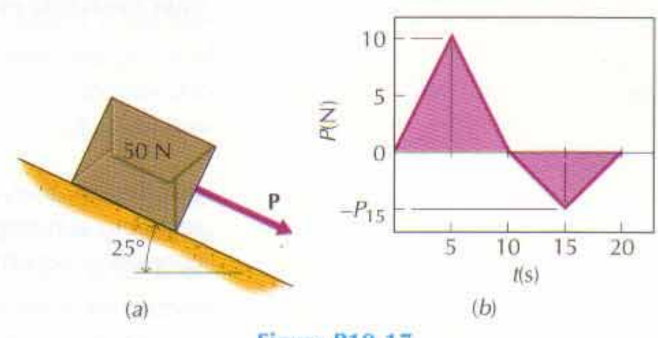


Figura P19-17

19.3 SISTEMAS DE PUNTOS MATERIALES EN INTERACCIÓN

Cuando en un problema intervienen dos o más puntos materiales en interacción, como en la figura 19-6, se puede considerar cada uno de ellos por separado y escribir la ecuación 19-2 aplicada a cada uno.

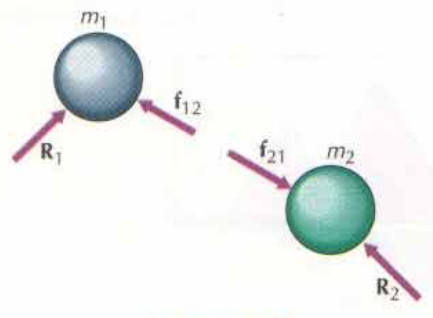


Figura 19-6

$$(\mathbf{L}_i)_1 + \int_{t_i}^{t_f} (\mathbf{R}_1 + \mathbf{f}_{12})\, dt = (\mathbf{L}_f)_1$$
$$(\mathbf{L}_i)_2 + \int_{t_i}^{t_f} (\mathbf{R}_2 + \mathbf{f}_{21})\, dt = (\mathbf{L}_f)_2$$

donde $\mathbf{R}_1$ es la resultante de todas las fuerzas exteriores que se ejercen sobre el punto 1, $\mathbf{f}_{12}$ es la fuerza que sobre el punto 1 ejerce el punto 2, etc. Como las fuerzas de acción y reacción que los puntos se ejercen entre sí son opuestas dos a dos ($\mathbf{f}_{21} = -\mathbf{f}_{12}$) y como el intervalo de tiempo entre t_1 y t_2 es común a todas las fuerzas que intervienen, los impulsos de las fuerzas de acción y reacción siempre se destruirán entre sí cuando se sumen estas ecuaciones. Por tanto, el teorema de la cantidad de movimiento para dos (o N) puntos materiales en interacción es

$$\sum_\ell (\mathbf{L}_i)_\ell + \sum_\ell \int_{t_i}^{t_f} R_\ell\, dt = \sum_\ell (\mathbf{L}_f)_\ell$$

donde $(\Sigma\mathbf{L})_\ell = \Sigma(m\mathbf{v})_\ell$ es la suma vectorial de las cantidades de movimiento de ambos (o los N) puntos materiales, $\Sigma(\int \mathbf{R}_\ell\, dt)$ es la suma vectorial de los impulsos de todas las fuerzas exteriores que intervienen, no siendo necesario considerar las fuerzas interiores.

Por tanto, para un sistema de N puntos materiales en interacción: *La cantidad de movimiento final de un sistema de puntos materiales es la suma vectorial de sus cantidades de movimiento iniciales más la suma de los impulsos de las resultantes de todas las fuerzas exteriores que se ejercen sobre dichos puntos:*

$$\sum_\ell (\mathbf{L}_i)_\ell + \sum_\ell \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{R}_\ell\, dt = \sum_\ell (\mathbf{L}_f)_\ell \tag{19-6}$$

19.3.1 Movimiento del centro de masa

La posición del centro de masa $\mathbf{r}_G$ de un sistema de N puntos materiales se calcula mediante el primer momento

$$m\mathbf{r}_G = \sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \mathbf{r}_\ell \tag{19-7}$$

donde $m = \Sigma\, m_\ell$ es la masa total del sistema de puntos materiales. Derivando respecto al tiempo la ecuación 19-7 y recordando que la masa de cada punto es constante, tenemos

$$m\mathbf{v}_G = \sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \mathbf{v}_\ell \tag{19-8}$$

Es decir, la cantidad de movimiento total de un sistema de puntos materiales es la misma que se tendría si toda la masa se concentrara en un solo punto que se moviera con la velocidad del centro de masa del sistema. La ecuación 19-8 permite escribir la ecuación 19-6 en la forma

$$m(\mathbf{v}_G)_i + \sum_\ell \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{R}_\ell\, dt = m(\mathbf{v}_G)_f \tag{19-9}$$

19.3.2 Conservación de la cantidad de movimiento de un sistema de puntos materiales

Si la suma de los impulsos de todas las fuerzas exteriores que se ejercen sobre los distintos puntos del sistema fuese nula, la cantidad de movimiento del sistema de puntos materiales se conservaría

$$\sum_{\ell} (m\mathbf{v}_i)_\ell = \sum_{\ell} (m\mathbf{v}_f)_\ell \tag{19-10}$$

o sea

$$(m\mathbf{v}_G)_i = (m\mathbf{v}_G)_f$$

Dividiendo ambos miembros por la masa total del sistema (la cual es constante) tenemos

$$\mathbf{v}_{Gi} = \mathbf{v}_{Gf}$$

Es decir, cuando los impulsos de todas las fuerzas exteriores que se ejercen sobre un sistema de puntos materiales suman cero, la velocidad $\mathbf{v}_G$ del centro de masa del sistema es constante. Esto sucede, por ejemplo, cuando chocan dos partículas que se mueven libremente. Sin embargo, hay que notar que aun cuando se conserve la cantidad de movimiento total de las partículas en colisión, su energía total no tiene por qué conservarse. En el apartado 19.4 trataremos problemas de choque de dos partículas.

19.3.3 Fuerzas impulsivas y no impulsivas

Cuando el impulso en una dirección dada no sea nulo pero se sepa que es relativamente pequeño, muchas veces se podrá despreciar a fin de obtener una solución aproximada que resulte suficientemente precisa para muchos fines. Por ejemplo, si la cantidad de movimiento del sistema compuesto por los bloques *A* y *B* de la figura 19-7 es grande frente al impulso de la fuerza de rozamiento, la ecuación 19-10 será aproximadamente cierta durante el breve tiempo Δt de choque aun cuando exista rozamiento entre el plano y los bloques. Como las fuerzas de rozamiento no pueden ser mayores que μN y el tiempo de choque es pequeño, el impulso del rozamiento de los bloques durante el tiempo de choque no alterará, prácticamente, la gran cantidad de movimiento de ellos.

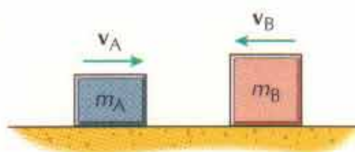


Figura 19-7

Las fuerzas de módulo muy grande pueden originar una variación importante de la cantidad de movimiento incluso en tiempos muy cortos. Dichas fuerzas reciben el nombre de *impulsivas*. Los movimientos debidos a las fuerzas impulsivas se denominan *movimientos impulsivos*. Como ejemplo de fuerzas impulsivas tenemos las que se producen cuando un cuerpo choca con otro.

Las fuerzas cuyo módulo es pequeño frente al de las impulsivas se llaman fuerzas *no impulsivas*. Como ejemplos podemos citar el peso, el rozamiento y las fuerzas debidas a resortes. Al aplicar el teorema de la cantidad de movimiento para un intervalo de tiempo corto, podremos despreciar el impulso de las fuerzas no impulsivas frente al de las fuerzas impulsivas.

No suele saberse de antemano si las reacciones desconocidas son fuerzas impulsivas o no. Por lo general, la fuerza de reacción sobre un apoyo cualquiera que actúe para evitar el movimiento en una cierta dirección es tan impulsiva como las fuerzas que intentan originar un movimiento en tal dirección.

La decisión final de si puede despreciarse o no el impulso de una fuerza deberá basarse en la precisión que se exige al resultado y en el efecto estimado que el término tenga sobre la ecuación. Cuando haya duda de si es o no importante el impulso de una fuerza, deberá incluirse en las ecuaciones 19-6 y 19-9.

19.3.4 Problemas en los que intervienen la energía y la cantidad de movimiento

Debemos tener presente que el teorema de la cantidad de movimiento no constituye un principio independiente. Al igual que el teorema de las fuerzas vivas, sólo es una integral primera de la segunda ley de Newton que es aplicable a ciertas situaciones particulares. Todo problema que pueda resolverse aplicando el teorema de las fuerzas vivas o el de la cantidad de movimiento puede también resolverse directamente utilizando la segunda ley de Newton. No obstante, cuando sea adecuada la aplicación del teorema de la cantidad de movimiento o de las fuerzas vivas, suelen proporcionar la solución más rápidamente y de manera menos laboriosa.

Estos métodos no sólo no son adecuados para resolver todos los problemas, sino que pocos problemas reales pueden acometerse con uno u otro método. Más generalmente, ambos métodos se utilizarán en partes diferentes de un mismo problema. El aprovechamiento máximo de estos métodos se consigue eligiendo el método particular más adecuado para un problema particular o para parte de un problema. De hecho, para resolver problemas concretos, resulta útil a menudo combinar los tres métodos: el de la cantidad de movimiento, el de trabajo-energía y la segunda ley de Newton.

Muchos problemas, como el Problema Ejemplo 19-5, comprenden varias fases para las cuales resultan adecuados diferentes principios. Durante la primera fase, sólo se ejercen fuerzas conservativas y el método más adecuado para hallar la velocidad de la caja A inmediatamente antes de chocar con la B es el del trabajo y la energía. Durante la fase de choque, dominan las fuerzas impulsivas y para hallar las velocidades de las cajas inmediatamente después del choque, lo más adecuado es aplicar el teorema de la cantidad de movimiento. Durante la fase final, hay que buscar relaciones entre fuerzas, velocidades y posición, siendo lo más conveniente utilizar el principio del trabajo y la energía. En cambio, para poder calcular el trabajo efectuado por el rozamiento hay que calcular la fuerza normal y ello se logra utilizando la segunda ley de Newton.

Para hallar la fuerza normal, se podría haber utilizado la ecuación correspondiente a la componente vertical en el teorema de la cantidad de movimiento y habríamos obtenido el mismo resultado. Sin embargo, como no hay movimiento en la dirección normal, el teorema de la cantidad de movimiento no ofrece ninguna ventaja sobre la aplicación directa de la segunda ley de Newton.



Figura 19-8

PROBLEMA EJEMPLO 19.3

Un automóvil que pesa 12,5 kN se halla inicialmente en reposo sobre la cubierta de un buque que está amarrado a un muelle, según se indica en la figura 19-8. El buque pesa 125 kN.

a. Si el auto acelera uniformemente desde el reposo hasta 32 km / h en 4 s, determinar la tensión media de la amarra durante este tiempo.
b. En $t = 4$ s, se rompe la amarra que une el buque al muelle, el conductor del automóvil aplica los frenos deteniendo el auto respecto al buque. Despréciese el rozamiento entre el buque y el agua y determínese la celeridad con que el buque chocará contra el muelle.

SOLUCIÓN

a. En la figura 19-9 puede verse el diagrama de sólido libre del conjunto auto-buque. Las fuerzas entre las ruedas del auto y el buque son fuerzas interiores; no serán necesarias para aplicar el teorema de la cantidad de movimiento y por ello no se han representado en el diagrama. La única fuerza que da impulso en la dirección horizontal es la tensión T, y la componente x de la ecuación 19-6 es

$$0 + T_{\text{med}}(4) = \left(\frac{12\ 500}{9{,}81}\right)\left(\frac{32\ 000}{3600}\right)$$

lo cual da

$$T_{\text{med}} = 2830 \text{ N} \qquad \text{Resp.}$$

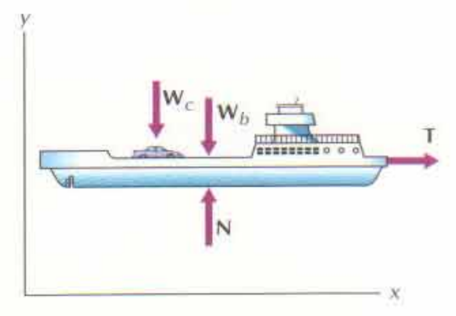


Figura 19-9

b. Rota la amarra, no hay fuerzas en la dirección x y en consecuencia, se conservará la componente x de la cantidad de movimiento. Por tanto

$$\left(\frac{12\ 500}{9{,}81}\right)\left(\frac{32\ 000}{3600}\right) = \frac{137\ 500}{9{,}81}v_f$$

y se tiene

$$v_f = 0{,}808 \text{ m/s} = 2{,}91 \text{ km/h} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 19.4

Se dispara una granada de 3 kg con una velocidad inicial $v_0 = 150$ m / s y $\theta_0 = 60°$, según se indica en la figura 19-10. En el punto más alto de su trayectoria, explota la granada partiéndose en dos. El pedazo de 1 kg llega al suelo en $x = 500$ m e $y = 2500$ m en el instante $t = 35$ s.

a. Determinar cuándo y dónde llegará al suelo el pedazo de 2 kg.
b. Determinar el módulo medio F_{med} de la fuerza explosiva si la explosión dura un tiempo $\Delta t = 0{,}005$ s.

SOLUCIÓN

a. La única fuerza que se ejerce sobre el sistema de dos puntos materiales es la de la gravedad, por lo que el movimiento del centro de masa vendrá dado por

$$\mathbf{a}_G = -9{,}81\mathbf{k} \text{ m/s}^2$$
$$\mathbf{v}_G = 75\mathbf{j} + (129{,}9 - 9{,}81t)\,\mathbf{k} \text{ m/s}$$
$$\mathbf{r}_G = 75t\mathbf{j} + (129{,}9t - 4{,}905t^2)\,\mathbf{k} \text{ m}$$

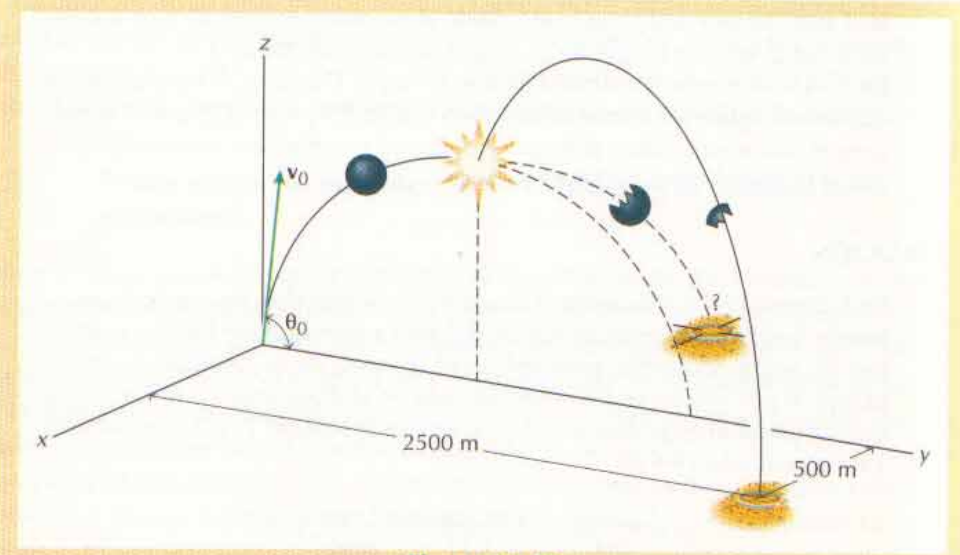


Figura 19-10

El punto más alto de la trayectoria corresponde al instante en que $dz_G/dt = 129{,}9 - 9{,}81t = 0$, lo cual da $t = 13{,}24$ s. Entonces

$$x = 0 \qquad y = 993{,}2 \text{ m} \qquad z = 860{,}1 \text{ m}$$

en el instante de la explosión.

Después de la explosión, sobre la masa de 1 kg sólo actúa la gravedad y por ello su movimiento vendrá dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= 9{,}81\mathbf{k} \text{ m/s}^2\\
\mathbf{v}_1 &= v_{10x}\mathbf{i} + v_{10y}\mathbf{j} + [v_{10z} - 9{,}81(t - 13{,}24)]\,\mathbf{k} \text{ m/s}\\
x_1 &= v_{10x}(t - 13{,}24) \text{ m}\\
y_1 &= 993{,}2 + v_{10y}(t - 13{,}24) \text{ m}\\
z_1 &= 860{,}1 + v_{10z}(t - 13{,}24) - 4{,}905(t - 13{,}24)^2 \text{ m}
\end{aligned}$$

donde las constantes de integración ($x_{10} = 0$ m, $y_{10} = 993{,}2$ m y $z_{10} = 860{,}1$ m) se han tomado de manera que se tuviera la posición conocida inmediatamente después de la explosión. Las demás constantes de integración se han determinado utilizando el tiempo y posición conocidos del impacto.

$$\begin{aligned}
v_{10x} &= \frac{500}{(35 - 13{,}24)} = 22{,}98 \text{ m/s}\\
v_{10y} &= \frac{2500 - 993{,}2}{35 - 13{,}24} = 69{,}26 \text{ m/s}\\
v_{10z} &= \frac{860{,}1 + 4{,}905(35 - 13{,}24)^2}{35 - 13{,}24} = 67{,}21 \text{ m/s}
\end{aligned}$$

Durante la explosión, la única fuerza exterior que da impulso es la de la gravedad, por lo que la ecuación 19-6 da

$$(3)(75\mathbf{j}) + 3(-9{,}81\mathbf{k})(0{,}005) = (1)(22{,}98\mathbf{i} + 69{,}26\mathbf{j} + 67{,}21\mathbf{k}) + (2)\,\mathbf{v}_{20}$$

y por tanto

$$\mathbf{v}_{20} = -11{,}49\mathbf{i} + 77{,}87\mathbf{j} - 33{,}68\mathbf{k} \text{ m/s}$$

Por último, la única fuerza que se ejerce sobre el punto material de 2 kg después de la explosión es la gravedad, por lo que su movimiento vendrá dado por

$$\mathbf{a}_2 = -9{,}81\mathbf{k} \text{ m/s}^2$$
$$\mathbf{v}_2 = -11{,}49\mathbf{i} + 77{,}87\mathbf{j} - [33{,}68 + 9{,}81(t - 13{,}24)]\,\mathbf{k} \text{ m/s}$$

y

$$x_2 = 11{,}49(t - 13{,}24)$$
$$y_2 = 993{,}2 + 77{,}87(t - 13{,}24) \text{ m}$$
$$z_2 = 860{,}1 - 33{,}68(t - 13{,}24) - 4{,}905(t - 13{,}24)^2 \text{ m}$$

Este punto material llega al suelo cuando $z_2 = 0$, lo cual da

$$t = 23{,}49 \text{ s} \qquad \text{Resp.}$$
$$x_2 = -117{,}7 \text{ m} \qquad \text{Resp.}$$
$$y_2 = 1791 \text{ m} \qquad \text{Resp.}$$

b. La ecuación 19-6 se puede también aplicar a cada uno de los pedazos por separado durante el impacto. Para el de 1 kg da

$$(1)(75\mathbf{j}) + \mathbf{F}(0{,}005) = (1)\,[22{,}98\mathbf{i} + 69{,}26\mathbf{j} + 67{,}21\mathbf{k}]$$

Por tanto, la fuerza media que se ejerce sobre el pedazo de 1 kg a causa de la explosión es

$$\mathbf{F}_{\text{med}} = 4596\mathbf{i} - 1148\mathbf{j} + 13442\mathbf{k} \text{ N}$$

y sobre el de 2 kg se ejercerá otra fuerza de igual módulo y dirección, pero de sentido opuesto. El módulo medio de la fuerza explosiva que se ejerce sobre cada pedazo será, pues,

$$F_{\text{med}} = 14\,250 \text{ N} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 19.5

La caja *A*, que pesa 100 N, desciende por una rampa exenta de rozamiento y choca contra una caja *B* que pesa 50 N (fig. 19-11). A consecuencia del choque, las dos cajas quedan enlazadas y se deslizan juntas por una superficie rugosa (μ_k = 0,6). Determinar

a. La velocidad de las cajas inmediatamente después del choque.
b. La distancia *d* que recorrerán antes de quedar en reposo.

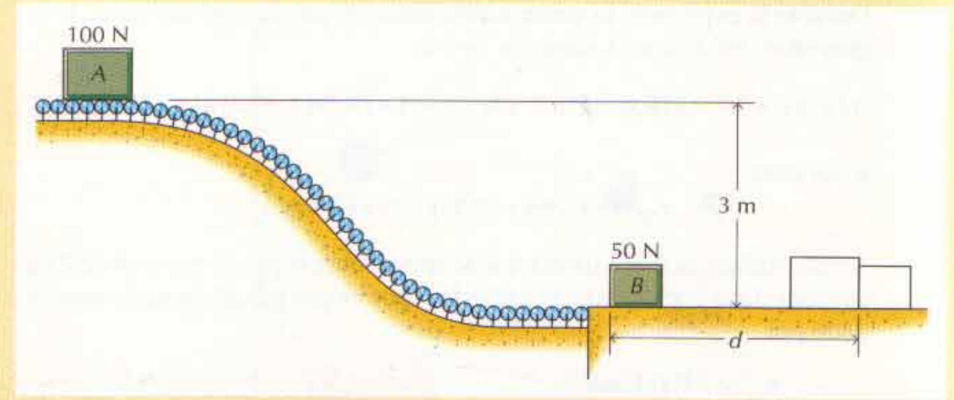


Figura 19-11

SOLUCIÓN

a. *Teorema de las fuerzas vivas de* $1 \to 2$: En la figura 19-12*a* puede verse el diagrama de sólido libre de la caja *A* cuando se desliza por la rampa. La fuerza normal *N* es perpendicular al movimiento y por tanto no trabaja. El peso deriva de un potencial y en consecuencia

$$T_1 + V_1 + U_{1\to 2}^{(o)} = T_2 + V_2$$

da

$$0 + (100)(3) + 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{100}{9{,}81}\right)v_{A2}^2 + 0$$

de donde

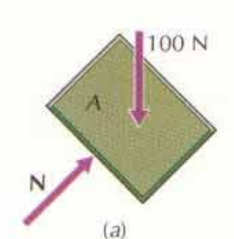
$$v_{A2} = 7{,}67 \text{ m/s}$$

Teorema de la cantidad de movimiento de $2 \to 3$: La caja *B* se halla inicialmente en reposo ($v_{B2} = 0$) y tras el choque, ambas cajas llevan la misma velocidad ($v_{A3} = v_{B3} = v_3$). Durante la corta duración del choque, no hay fuerzas impulsivas en la dirección *x*, por lo que se conservará la componente *x* de la cantidad de movimiento:

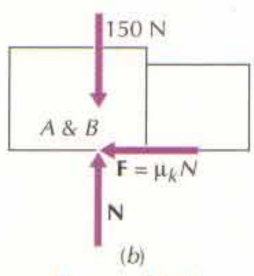
$$\left(\frac{100}{g}\right)(7{,}67) + \left(\frac{50}{g}\right)(0) = \left(\frac{100}{g}\right)v_3 + \left(\frac{50}{g}\right)v_3$$

lo cual da

$$v_3 = 5{,}11 \text{ m/s} \qquad \text{Resp.}$$



(*a*)



(*b*)

Figura 19-12

b. *Segunda ley de Newton:* En la figura 19-12*b* puede verse el diagrama de sólido libre del par de cajas después del choque. En esta fase del movimiento, las cajas se deslizan en línea recta por una superficie horizontal y no hay aceleración en la dirección vertical. Por tanto,

$$\uparrow \Sigma F = N - 150 = 0$$

y $N = 150$ N. Luego la fuerza de rozamiento será

$$F = 0{,}6(150) = 90 \text{ N}$$

Teorema de las fuerzas vivas de $3 \to 4$: Sigue siendo aplicable el diagrama de sólido libre de la figura 19-12*b*. La fuerza normal y el peso son perpendiculares al movimiento y por tanto, no trabajan. El trabajo efectuado por la fuerza de rozamiento será

$$U_{1\to 2}^{(o)} = \int_0^d (-90)\, dx = -90d$$

por lo que la ecuación de la energía

$$T_1 + V_1 + U_{1\to 2}^{(o)} = T_2 + V_2$$

da

$$\frac{1}{2}\left(\frac{150}{9{,}81}\right)(5{,}81)^2 - 90d = 0$$

de donde

$$d = 2{,}22 \text{ m}$$ Resp.

PROBLEMAS

19-18* En cierto instante, la posición y velocidad de tres puntos materiales vienen dadas por

	Punto material		
	1	2	3
m, kg	1	2	3
x, m	3	8	5
y, m	4	3	7
v_x, m/s	10	0	–2
v_y, m/s	–5	5	3

Hallar la situación y velocidad del centro de masa en ese instante.

19-19 En cierto instante, el centro de masa de tres puntos materiales de masas 3 kg, 5 kg y 1 kg, respectivamente, se encuentra en $\mathbf{r}_G = 8\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ m y tiene una velocidad dada por $\mathbf{v}_G = 5\mathbf{i} - 12\mathbf{k}$ m/s. En ese instante, el punto material de 3 kg tiene la posición $\mathbf{r}_3 = 5\mathbf{i}$ m y la velocidad $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{i} + 8\mathbf{k}$ m/s, mientras que el punto material de 1 kg tiene la posición $\mathbf{r}_1 = 8\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ m y la velocidad $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ m/s. Determinar la posición y velocidad del punto material de 5 kg en ese instante.

19-20 Un trineo de 25 kg está deslizándose por una superficie horizontal llana y exenta de rozamiento con una celeridad de 5 m/s, cuando un hombre de 60 kg se sube a él de un salto. Si la velocidad inicial del hombre era de 2 m/s perpendicularmente al movimiento del trineo, determinar la velocidad final del trineo con el hombre.

19-21 Dos automóviles chocan en un cruce, según se indica en la figura P19-21. El auto A pesa 11 kN y tiene una celeridad inicial $v_A = 24$ km/h, mientras que el auto B pesa 17,5 kN y tiene una celeridad inicial $v_B = 40$ km/h. Si los autos quedan enganchados y se mueven conjuntamente después del choque, determinar su celeridad v_f y dirección θ después de dicho choque.

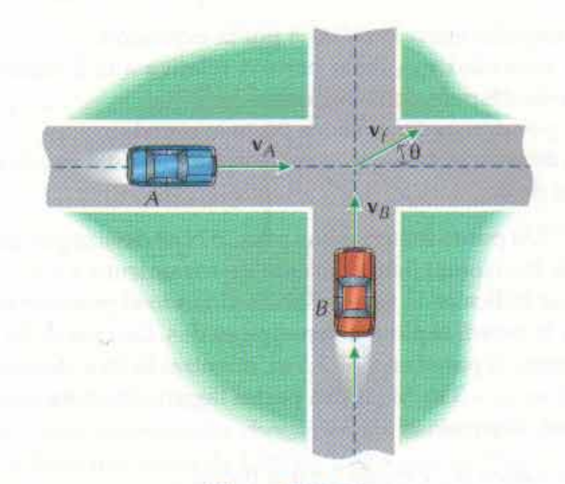


Figura P19.21

19-22* Dos automóviles chocan en un cruce, según se indica en la figura P19-21. El auto A tiene una masa de 1000 kg y una celeridad inicial $v_A = 25$ km/h, mientras que el auto B tiene una masa de 1500 kg. Si los autos quedan enganchados y se mueven conjuntamente en la dirección dada por el ángulo $\theta = 30°$ después del choque, determinar la celeridad v_B que llevaba el auto B inmediatamente antes de chocar.

19-23 Un punto material que pesa 10 N se desliza por una superficie horizontal, llana y exenta de rozamiento con una cele-

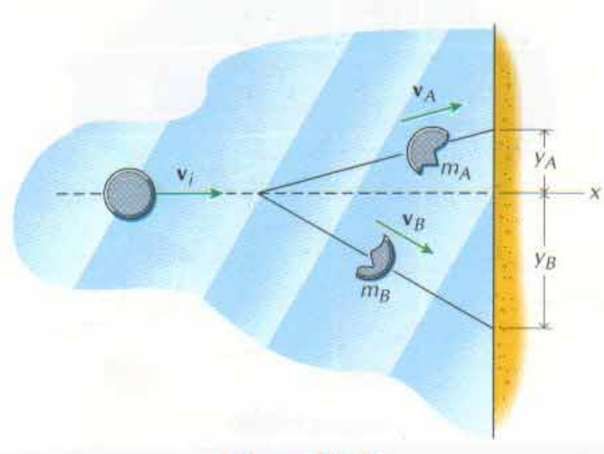


Figura P19-23

ridad de $v_i = 3 \text{m/s}$, según se indica en la figura P19-23. Cuando el punto se halla a 6 m de la pared, explota y se rompe en dos partes iguales. Una de ellas choca contra la pared en $y_A = 1{,}5$ m mientras la otra lo hace en $y_B = 3$ m. Determinar:

a. El impulso que se ejerce sobre la parte A en la explosión.
b. La velocidad $\mathbf{v}_{A/B}$ de la parte A relativa a la parte B inmediatamente después de la explosión.
c. La diferencia de tiempos entre el choque de A con la pared y el de B

19-24* Un punto material de 5 kg se desliza por una superficie llana, horizontal y exenta de rozamiento a $v_i = 4$ m/s, según se indica en la figura P19-23. Cuando se halla a 10 m de la pared, explota y se rompe en dos partes de masas $m_A = 3$ kg y $m_B = 2$ kg. Si la parte de 3 kg llega a la pared 3 s después de la explosión en $y_A = 7{,}5$ m, determinar:

a. El impulso ejercido sobre A por la explosión.
b. La velocidad $\mathbf{v}_{A/B}$ de la parte A relativa a la B inmediatamente después de la explosión.
c. La posición y_B a que choca B con la pared.
d. La diferencia de tiempos entre el choque de A con la pared y el de B.

19-25 Un punto material que pesa 25 N se desliza por una superficie horizontal llana y exenta de rozamiento a $v_i = 3$ m/s, según se indica en la figura P19-23. Cuando el punto se halla a 6 m de la pared, explota y se rompe en dos. Una parte, de masa m_A alcanza la pared en $y_A = 1{,}5$ m, mientras la otra, de masa m_B, lo hace en $y_B = 3$ m. Si las dos partes llegan simultáneamente a la pared, determinar:

a. Las masas m_A y m_B de las dos partes.
b. El impulso ejercido sobre A por la explosión.
c. La velocidad $\mathbf{v}_{A/B}$ de la parte A relativa a la B inmediatamente después de la explosión.

19-26* Se dispara una granada de 5 kg con una velocidad inicial $v_0 = 125$ m/s y $\theta_0 = 75°$, según se indica en la figura P19-26. En el punto más alto de su trayectoria, la granada explota y rompe en dos. Un fragmento de 2 kg llega al suelo en $x = 50$ m e $y = 350$ m cuando $t = 25$ s. Determinar:

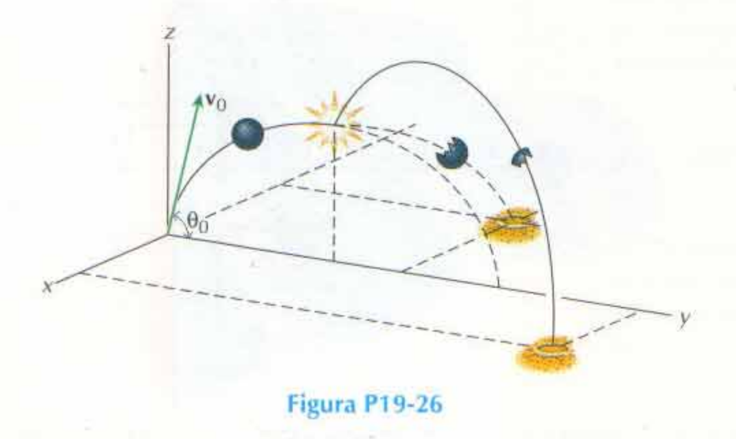


Figura P19-26

a. Cuándo y dónde llega al suelo el fragmento de 3 kg.
b. El impulso ejercido sobre el fragmento de 2 kg por la explosión.
c. El módulo medio F_{med} de la fuerza explosiva si la duración de la explosión es $\Delta t = 0{,}003$ s.

19-27 Se dispara una granada de peso 50 N con una velocidad inicial de $v_0 = 135$ m/s y $\theta_0 = 50°$, según se indica en la figura P19-26. Cuando $t = 5$ s, la granada explota y se rompe en dos. Un fragmento de 30 N de peso llega al suelo en $x = 300$ m e $y = 2100$ m cuando $t = 25$ s. Determinar:

a. Cuando y dónde llega al suelo el fragmento de 20 N.
b. El impulso ejercido sobre el fragmento de 30 N por la explosión.
c. El módulo medio F_{med} de la fuerza explosiva si la duración de la explosión es $\Delta t = 0{,}001$ s.

19-28* Una caja A de 10 kg desciende por una rampa exenta de rozamiento ($\theta = 25°$) y choca contra una caja B de 5 kg unida a un resorte de rigidez $k = 8500$ N/m (fig. P19-28). A consecuencia del choque, las dos cajas quedan unidas y se deslizan conjuntamente. Si la caja A ha partido del reposo siendo $d = 5$ m, determinar:

a. La velocidad de las cajas inmediatamente después del choque.
b. La máxima compresión que sufrirá el resorte durante el movimiento resultante.
c. La aceleración de las cajas en el instante de máxima compresión.

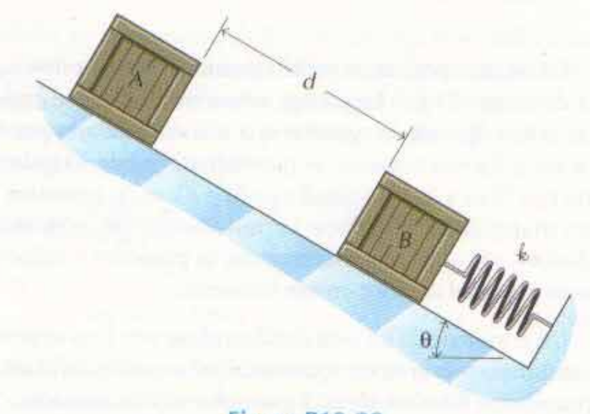


Figura P19-28

19-29 La caja A, que pesa 125 N, desciende por una rampa ($\theta = 25°$) y choca contra otra caja de peso 50 N que está unida a un resorte de rigidez $k = 2$ kN/m (fig. P19-28). En el choque, ambas cajas quedan unidas y se deslizan conjuntamente por la superficie rugosa ($\mu_k = 0{,}4$). Si la caja A parte del reposo siendo $d = 6$ m, determinar:

a. La velocidad de las cajas inmediatamente después del choque.
b. La máxima compresión del resorte durante el movimiento resultante.
c. La aceleración de las cajas en el instante de máxima compresión.

19-30* Un bloque de madera de 0,40 kg está en reposo sobre una superficie horizontal rugosa ($\mu_k = 0,3$) y recibe el impacto de una bala de 0,03 kg que lleva una velocidad inicial $v_i = 100$ m/s (fig. P19-30). En el choque, la bala queda incrustada en la madera. Determinar:

a. La celeridad del conjunto bloque-bala inmediatamente después del choque.
b. La distancia que recorrerá el bloque antes de detenerse.

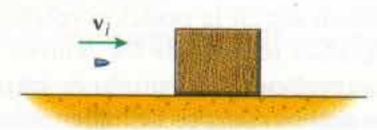


Figura P19-30

19-31 Un bloque de madera de peso 5 N está en reposo sobre una superficie horizontal rugosa ($\mu_k = 0,25$) y recibe el impacto de una bala de 7 g (fig. P19-30). En el choque, la bala queda incrustada en la madera. Si el bloque se desliza 7,5 m antes de detenerse, determinar:

a. La celeridad del conjunto bloque-bala inmediatamente después del choque.
b. La celeridad v_i que llevaba la bala.

19-32* Un bloque de madera de 0,30 kg está unido a un resorte de $k = 7500$ N/m (fig. P19-32). El bloque está en reposo sobre una superficie horizontal rugosa ($\mu_k = 0,4$) y recibe el impacto de una bala de 0,030 kg que lleva una velocidad inicial $v_i = 150$ m/s. En el choque, la bala queda incrustada en la madera. Determinar:

a. La celeridad del conjunto bloque-bala inmediatamente después del choque.
b. La distancia que recorrerá el bloque antes de detenerse.

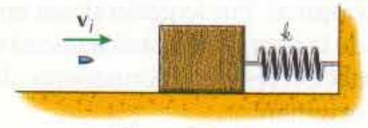


Figura P19-32

19-33 Un bloque de madera de 0,340 kg está unido a un resorte de $k = 1000$ N/m (fig. P19-32). El bloque está en reposo sobre una superficie horizontal rugosa ($\mu_k = 0,35$) y el resorte indeformado cuando recibe el impacto de una bala de 7 g. En el choque, la bala queda incrustada en la madera. Si el máximo acortamiento del resorte después del impacto es de 62,5 mm, determinar:

a. La celeridad del conjunto bloque-bala inmediatamente después del choque.
b. La celeridad v_i que llevaba la bala.

19-34* Un bloque de madera de 15 kg está unido a un resorte de $k = 4500$ N/m (fig. P19-32). El bloque está en reposo sobre una superficie horizontal rugosa ($\mu_k = 0,3$) y recibe el impacto de una bala de 0,03 kg. En el choque, la bala queda incrustada en la madera. Determinar la máxima celeridad v_i que debería llevar la bala para que el resorte no rebotase.

19-35* Un péndulo balístico consiste en una caja de peso 25 N que contiene arena y está suspendida de un hilo ligero de 1,5 m de longitud (fig. P19-35). Una bala de 14 g incide sobre la caja y queda incrustada en la arena. Si la celeridad que llevaba inicialmente la bala era de 105 m/s, determinar:

a. La celeridad del conjunto arena-bala inmediatamente después del impacto.
b. El máximo ángulo que describirá el péndulo después del impacto.

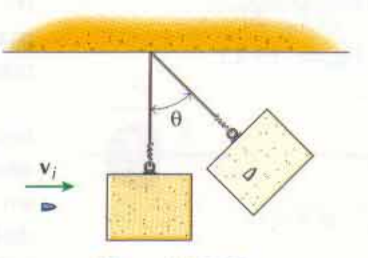


Figura P19-35

19-36* Dos automóviles chocan en un cruce (fig. P19-36). El auto A tiene una masa de 1200 kg y el B una de 1500 kg. En el choque, las ruedas de los autos quedan trabadas y los dos se deslizan ($\mu_k = 0,2$) juntos. A lo largo de 10 m en una dirección definida por $\theta = 60°$. Determinar las celeridades v_A y v_B que llevaban los automóviles inmediatamente antes de chocar.

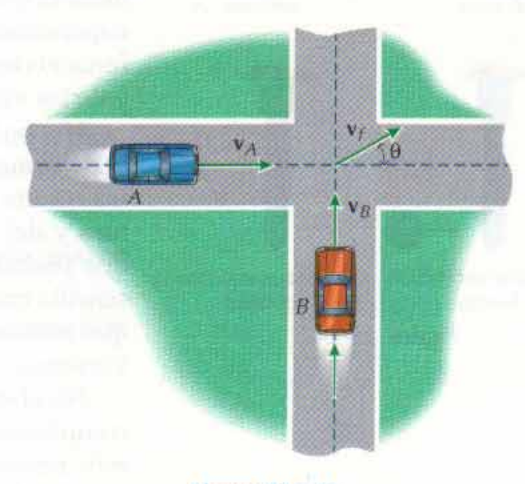


Figura P19-36

19.4 CHOQUE DE CUERPOS ELÁSTICOS

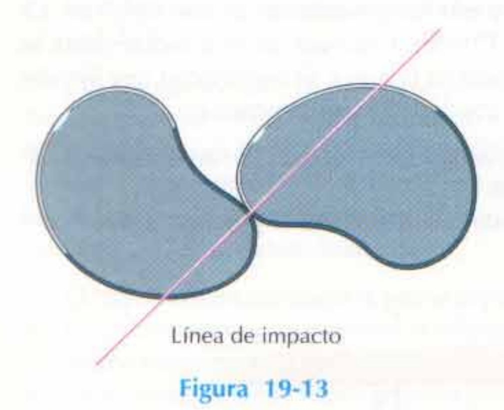
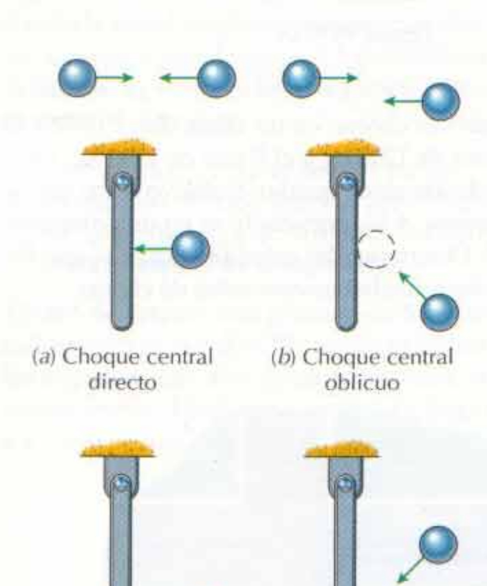


Figura 19-13

Un *impacto* (choque entre dos cuerpos) es un suceso que suele tener lugar en un intervalo de tiempo muy corto. Suele ir acompañado de fuerzas de reacción entre los cuerpos relativamente intensas, lo que da lugar a fuertes cambios de velocidad de uno o ambos cuerpos. Las intensas fuerzas de reacción también originan una deformación considerable de los cuerpos en colisión y en consecuencia, la conversión de energía mecánica en sonido y calor.

Los sucesos de impacto se clasifican según la posición relativa de los centros de masa de los cuerpos, la velocidad relativa de los centros de masa y la *línea de impacto:* recta normal a las superficies en el punto de impacto (fig. 19-13). Cuando los centros de masa de ambos cuerpos se hallen sobre la línea de impacto, diremos que se trata de un *choque central* (fig. 19-14*a,b*). Cuando el centro de masa de uno o ambos cuerpos no se halle sobre la línea de impacto, diremos que se trata de un *choque excéntrico* (fig. 19-14*c,d*). Evidentemente, entre dos puntos materiales sólo podrá producirse choque central, ya que el tamaño y forma de los puntos se supone que no afectan al cálculo de su movimiento.

Otra clasificación se basa en la orientación de las velocidades de los cuerpos respecto a la línea de impacto. Cuando las velocidades iniciales de los cuerpos en colisión tengan la dirección de la línea de impacto, diremos que se trata de un *choque directo* (fig. 19-14*a,c*). El choque directo es una colisión frontal. Cuando las velocidades iniciales de los cuerpos en colisión no tengan la dirección de la línea de impacto, diremos que se trata de un *choque oblicuo* (fig. 19-14*b,d*).



(*a*) Choque central directo (*b*) Choque central oblicuo (*c*) Choque excéntrico directo (*d*) Choque excéntrico oblicuo

Figura 19-14

El choque de dos cuerpos consta de dos fases —una fase de deformación o compresión seguida de otra de restauración o restitución— y se acompaña de una generación de calor y sonido. En la primera fase, que transcurre desde el instante de contacto hasta el de máxima deformación, los dos cuerpos se encuentran comprimidos por la intensa fuerza de interacción. Al final de esta fase, los cuerpos ni siguen aproximándose ni se separan: la velocidad relativa según la línea de impacto es nula. En la segunda fase, que transcurre desde el instante de máxima deformación hasta el de separación total, los cuerpos se van separando a causa de que las fuerzas interiores de los cuerpos actúan de manera que les devuelvan la forma original. Por lo general, sin embargo, la recuperación de ésta no es total. Parte de la energía mecánica inicial se disipa, durante el choque, a causa de la deformación residual permanente de los cuerpos y de las vibraciones sonoras que se originan.

Mucho se ha estudiado acerca de la relación entre las fuerzas de impacto y la deformación resultante cuando chocan dos cuerpos. La deformación de éstos resulta depender de la velocidad de deformación así como de la temperatura y del material constituyente de los cuerpos. Sin embargo, es una suerte que podamos prescindir de los detalles del choque. Para tener una relación sencilla entre las velocidades relativas de los cuerpos antes y después del choque podemos utilizar la ecuación que nos da el teorema de la cantidad de movimiento.

No obstante, conviene recordar que el choque de dos cuerpos es un suceso complicado. Aun cuando el sencillo análisis que haremos a continuación permite resolver muchos problemas de choque que no se podrían resolver de otra manera, hay que tener presente que los resultados de estos cálculos son siempre aproximados.

19.4.1 Choque central directo

Consideremos el movimiento de dos puntos materiales A y B a lo largo de una recta común (la línea de impacto), como se indica en la figura 19-15*a*. Supondremos que la celeridad v_{Ai} es mayor que la celeridad v_{Bi} por lo que el punto A alcanzará al B y chocará con él. Además, de acuerdo con las observaciones generales, supondremos que durante el breve intervalo de impacto $\Delta t = t_f - t_i$:

1. La velocidad de uno o ambos puntos puede variar mucho.
2. Las posiciones de los puntos no varían apreciablemente.
3. Se pueden despreciar las fuerzas no impulsivas.
4. Las fuerzas de rozamiento entre los cuerpos son despreciables.

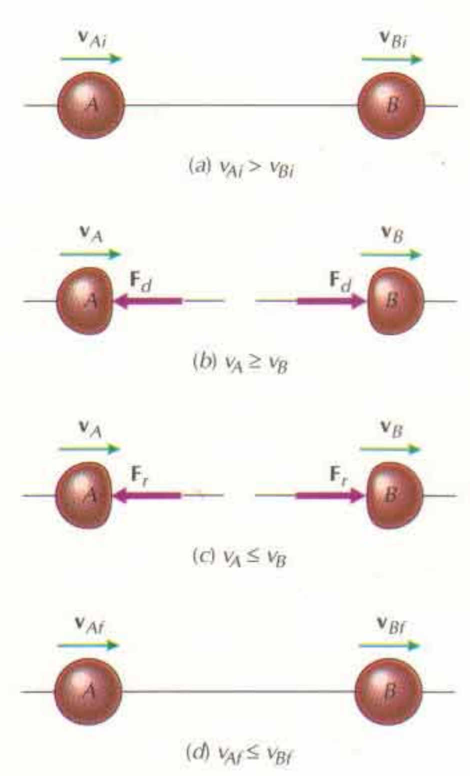


Figura 19-15

Es más, como los movimientos y las fuerzas tienen lugar todos a lo largo de la línea de impacto, sólo habrá que considerar la componente según ésta de la ecuación del teorema de la cantidad de movimiento. Tomaremos hacia la derecha el sentido positivo a lo largo de esta recta: las fuerzas y velocidades dirigidas hacia la derecha serán positivas y las fuerzas y velocidades hacia la izquierda negativas.

Durante el choque, sobre el par de puntos materiales no se ejercen fuerzas impulsivas exteriores y por tanto se conservará la cantidad de movimiento del sistema constituido por dicho par de puntos

$$m_A v_{Ai} + m_B v_{Bi} = m_A v_{Af} + m_B v_{Bf} \qquad \text{(19-10)}$$

Por otra parte, si se examinan los puntos por separado, la fuerza interior es impulsiva y deberá incluirse en la ecuación del teorema de la cantidad de movimiento. Durante la fase de deformación del choque (fig. 19-15*b*), el teorema de la cantidad de movimiento nos dice que

$$m_A v_{Ai} - \int_{t_i}^{t_c} F_d \, dt = m_A v_c$$

para el punto A, donde F_d es la fuerza de interacción que se ejerce sobre el punto A durante la fase de deformación, v_c es la velocidad común de los dos puntos al final de la fase de deformación y t_c es el tiempo al final de esta fase. Durante la fase de restauración (fig. 19-15*c*), el teorema de la cantidad de movimiento nos dice que

$$m_A v_c - \int_{t_c}^{t_f} F_r \, dt = m_A v_{Af}$$

para el punto A, donde F_r es la fuerza de interacción que se ejerce sobre el punto A durante la fase de restauración y v_{Af} es la velocidad final del punto A —la velocidad de A cuando termina la colisión.

El módulo del impulso de deformación $\int_{t_i}^{t_c} F_d \, dt$ es, generalmente, mayor que el del impulso de restauración $\int_{t_c}^{t_f} F_r \, dt$. El cociente de estos dos impulsos se denomina *coeficiente de restitución e:*

$$e = \frac{\int_{t_c}^{t_f} F_r \, dt}{\int_{t_i}^{t_c} F_d \, dt} = \frac{m_A v_c - m_A v_{Af}}{m_A v_{Ai} - m_A v_c} = \frac{v_c - v_{Af}}{v_{Ai} - v_c}$$

Un análisis análogo realizado con el punto B da un resultado semejante para el coeficiente de restitución:

$$e = \frac{\int_{t_c}^{t_f} F_r\, dt}{\int_{t_i}^{t_c} F_d\, dt} = \frac{m_B v_{Bf} - m_B v_c}{m_B v_c - m_B v_{Bi}} = \frac{v_{Bf} - v_c}{v_c - v_{Bi}}$$

Eliminando la velocidad v_c, que es desconocida, entre estas dos ecuaciones se tiene

$$e = -\frac{v_{Bf} - v_{Af}}{v_{Bi} - v_{Ai}} = -\frac{(v_{B/A})_f}{(v_{B/A})_i} \qquad \textbf{(19-11)}$$

Es decir, el coeficiente de restitución e es igual al cociente, cambiado de signo, entre la velocidad relativa de los dos puntos después del choque y dicha velocidad relativa antes del choque. Este cociente constituye una medida de las propiedades elásticas de los puntos materiales y se ha de medir experimentalmente.

Las ecuaciones 19-10 y 19-11 forman un sistema que permite determinar las velocidades de los dos cuerpos después del choque si se conocen las que llevaban antes del mismo.

Si en un choque es $e = 1$, se dice que es un *choque perfectamente elástico*. En tal caso, la ecuación 19-11 nos da

$$v_{Ai} + v_{Af} = v_{Bi} + v_{BF}$$

Pero la ecuación 19-10 puede escribirse en la forma

$$m_A(v_{Ai} - v_{Af}) = m_B(v_{Bf} - v_{Bi})$$

y multiplicando, miembro a miembro, estas dos ecuaciones tenemos

$$m_A(v_{Ai}^2 - v_{Af}^2) = m_B(v_{Bf}^2 - v_{Bi}^2)$$

Por último, trasponiendo términos y dividiendo por 2 resulta

$$\frac{1}{2}m_A v_{Ai}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bi}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{Af}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bf}^2$$

Por tanto, en el caso de un choque perfectamente elástico ($e = 1$), se conserva la energía cinética del par de puntos materiales.

En cambio, cuando $e = 0$ se dice que se trata de un *choque perfectamente plástico*. En tal caso, la velocidad relativa de los dos puntos después del choque es nula y ambos puntos se moverán juntos con la misma velocidad. Esto corresponde a la máxima pérdida de energía cinética en el choque. En los casos reales, el coeficiente de restitución se encuentra siempre comprendido entre los dos casos límites citados, $0 \leq e < 1$.

El coeficiente de restitución no es una propiedad característica de un cuerpo o de un material. Depende de los materiales de los dos cuerpos en colisión.

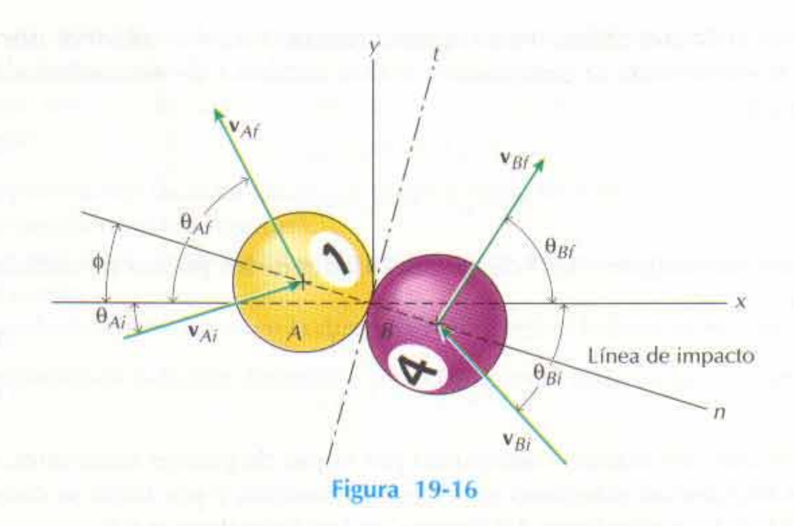


Figura 19-16

Aun cuando a menudo se considera constante, el coeficiente de restitución varía considerablemente con la velocidad de choque y con los tamaños, formas y temperaturas de los cuerpos que chocan. Aun cuando puedan utilizarse valores de e dados por manuales a falta de datos mejores, no son demasiado fiables.

19.4.2 Choque central oblicuo

El análisis del choque central oblicuo de dos puntos materiales es una sencilla extensión del análisis del choque central directo. En el caso de cuerpos perfectamente lisos, exentos de rozamiento, el choque central oblicuo se considerará que es la superposición de un movimiento uniforme en dirección perpendicular a la línea de impacto y un choque central directo a lo largo de ésta.

Los ejes de coordenadas se toman a lo largo de la línea de impacto (eje n) y perpendicular a ella (eje t), como se indica en la figura 19-16. La ecuación que traduce el teorema de la cantidad de movimiento es igualmente aplicable al sistema de puntos materiales (fig. 19-16) como a cada punto por separado (fig. 19-17). Durante el corto tiempo de choque, las únicas fuerzas impulsivas que se ejercen sobre uno y otro punto son las fuerzas interiores que están dirigidas según la línea de impacto (eje n).

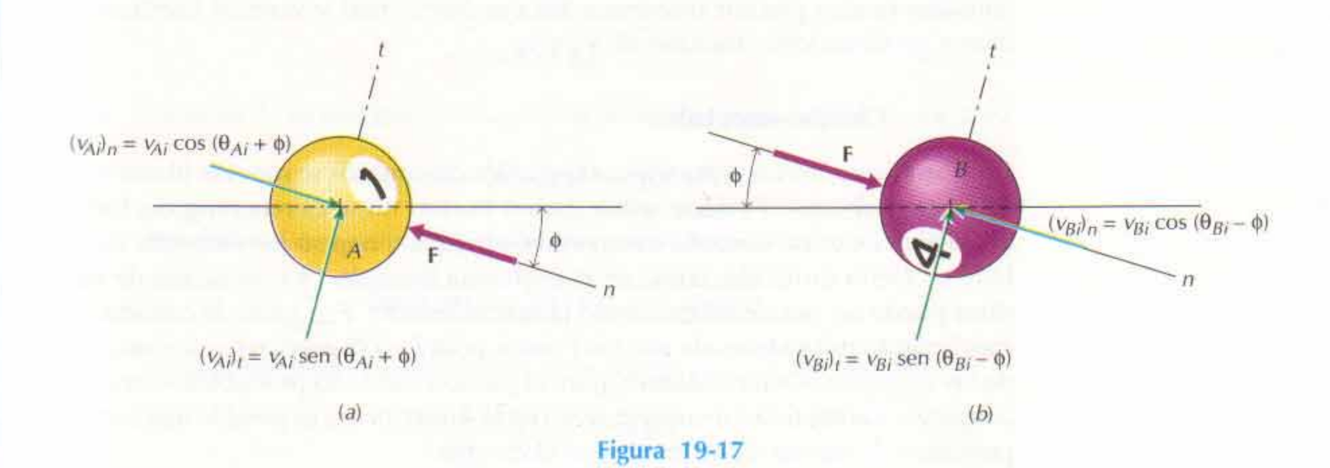


Figura 19-17

Como en la dirección t no se ejercen fuerzas impulsivas sobre uno y otro punto, se conservará la componente t de la cantidad de movimiento de cada uno de ellos:

$$m_A(v_{Ai})_t = m_A(v_{Af})_t \tag{19-12a}$$

$$m_B(v_{Bi})_t = m_B(v_{Bf})_t \tag{19-12b}$$

Por tanto, las componentes t de las velocidades de los puntos no cambian en el choque:

$$(v_{Ai})_t = (v_{Af})_t \tag{19-13a}$$

$$(v_{Bi})_t = (v_{Bf})_t \tag{19-13b}$$

En el caso del sistema constituido por el par de puntos materiales, no hay fuerzas impulsivas exteriores en ninguna dirección y por tanto se conservará la cantidad de movimiento del sistema en las direcciones n y t:

$$m_A(v_{Ai})_t + m_B(v_{Bi})_t = m_A(v_{Af})_t + m_B(v_{Bf})_t \tag{19-14a}$$

$$m_A(v_{Ai})_n + m_B(v_{Bi})_n = m_A(v_{Af})_n + m_B(v_{Bf})_n \tag{19-14b}$$

La ecuación 19-14*a* es la suma de las ecuaciones 19-12*a* y 19-12*b* y no aporta ninguna información adicional al problema. Por tanto, necesitaremos aún otra ecuación para poder obtener las dos incógnitas $(v_{Af})_n$ y $(v_{Bf})_n$. Repitiendo el análisis realizado en el apartado 19.4.1 para la dirección n tenemos

$$e = -\frac{(v_{Bf})_n - (v_{Af})_n}{(v_{Bi})_n - (v_{Ai})_n} = \frac{(v_{B/A})_{fn}}{(v_{B/A})_{in}} \tag{19-14c}$$

donde $(v_{B/A})_{fn}$ y $(v_{B/A})_{in}$ son las componentes n de las velocidades final e inicial de B relativas a A, respectivamente. Las ecuaciones 19-14*b* y 19-14*c* nos dan las dos ecuaciones necesarias para hallar las componentes normales de las velocidades finales $(v_{Af})_n$ y $(v_{Bf})_n$.

Una vez halladas las cuatro componentes de las velocidades finales $(v_{Af})_t$, $(v_{Af})_n$, $(v_{Bf})_t$ y $(v_{Bf})_n$, se podrán determinar fácilmente los módulos, direcciones y sentidos de las velocidades finales $\mathbf{v}_{Af}$ y $\mathbf{v}_{Bf}$. Aun cuando para obtener las componentes de las velocidades se necesiten los ejes n y t, sus direcciones rara vez tendrán importancia en el problema global en cuestión. Por tanto, los resultados finales podrán referirse a los ejes horizontal y vertical habituales o bien a las direcciones iniciales de $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$.

19.4.3 Choque vinculado

En el análisis anterior se ha supuesto que los dos puntos se movían libremente, salvo en el choque. Es decir, sobre dichos puntos no se ejercía ninguna fuerza impulsiva exterior. Cuando uno o ambos puntos tenga su movimiento vinculado en cierta dirección, como en el Problema Ejemplo 19-7, la fuerza de ligadura puede ser tan impulsiva como la fuerza interior. Por tanto, la cantidad de movimiento del sistema de los dos puntos podrá no conservarse en una u otra de las direcciones n o t. Además, para el punto vinculado probablemente no se conservará la cantidad de movimiento en la dirección t y es posible que la componente t de su velocidad cambie en el choque.

La ecuación 19-14 del coeficiente de restitución puede seguir utilizándose para relacionar las velocidades relativas a lo largo de la línea de impacto. Sin embargo, las otras ecuaciones deberán sustituirse por una combinación de lo siguiente:

1. Conservación de la cantidad de movimiento del sistema en una dirección perpendicular a la ligadura.
2. Conservación de la cantidad de movimiento del punto no vinculado, en la dirección t.
3. Ligaduras cinemáticas en la dirección de la velocidad del punto vinculado.

Estas ecuaciones deberán deducirse específicamente para cada problema concreto.

PROBLEMA EJEMPLO 19.6

Dos masas se deslizan por una barra horizontal exenta de rozamientos, según se indica en la figura 19-18. La corredera A tiene una masa de 2 kg y se desliza hacia la derecha a 3 m/s, mientras la corredera B tiene una masa de 0,75 kg y se desliza hacia la izquierda a 1 m/s. Si el coeficiente de restitución de las correderas vale 0,6, determinar:

a. La velocidad de cada masa después de chocar.
b. El tanto por ciento de disminución de la energía a consecuencia del choque.

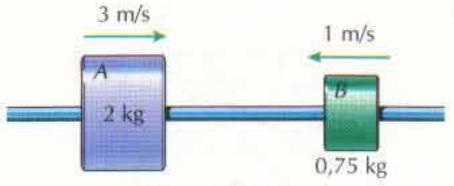


Figura 19-18

SOLUCIÓN

a. Este es un problema de choque central directo en el que la línea de impacto está dirigida a lo largo de la barra. Como en esta dirección no hay fuerzas impulsivas, se conservará la cantidad de movimiento a lo largo de la barra:

$$(2)(3) + (0,75)(-1) = 2v_{Af} + 0,75v_{Bf}$$

Además, la ecuación 19-11 da

$$0,6 = -\frac{v_{Bf} - v_{Af}}{(-1) - (3)}$$

Resolviendo el sistema que forman estas dos ecuaciones se tiene

$$v_{Af} = 1,255 \text{ m/s} \qquad \text{Resp.}$$

$$v_{Bf} = 3,65 \text{ m/s} \qquad \text{Resp.}$$

b. La suma de las energías cinéticas de las correderas antes del choque era

$$T_i = \frac{1}{2}(2)(3)^2 + \frac{1}{2}(0,75)(1)^2 = 9,375 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Después del choque, la suma de las energías cinéticas es

$$T_f = \frac{1}{2}(2)(1,255)^2 + \frac{1}{2}(0,75)(3,65)^2 = 6,571$$

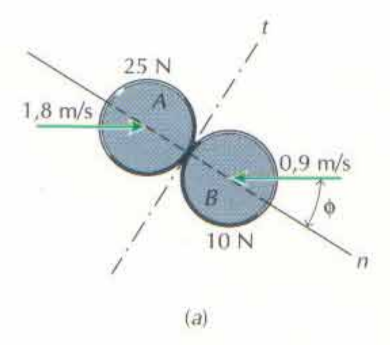
El tanto por ciento de disminución de la energía cinética será, por tanto,

$$\frac{9,375 - 6,571}{9,375}(100) = 29,9\% \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 19.7

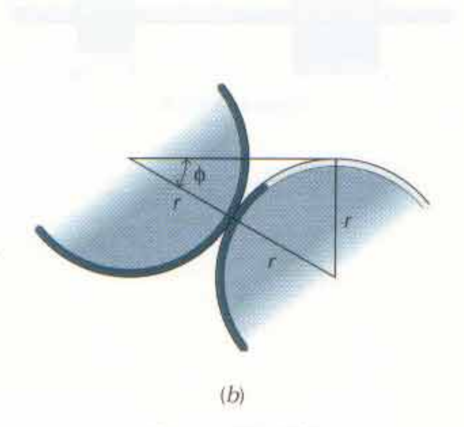
Dos discos de igual radio, que se deslizan por una superficie horizontal lisa, chocan oblicuamente según se indica en la figura 19-19*a*. El peso del disco *A* es de 25 N y se mueve hacia la derecha a 1,8 m/s, mientras que el disco *B* pesa 10 N y se mueve hacia la izquierda a 0,9 m/s. Si el coeficiente de restitución en el choque vale 0,7 y la duración del contacto es de 0,001 s, determinar:

a. Las velocidades de los discos inmediatamente después del choque.
b. El tanto por ciento de pérdida de energía a consecuencia del choque.
c. La fuerza media de interacción del disco *B* sobre el *A*.



(*a*)

Figura 19-19(a)



(*b*)

Figura 19-19(b)

SOLUCIÓN

a. Primeramente, se trazan ejes de coordenadas n y t a lo largo de la recta de impacto y perpendicular a ella, según se indica en la figura 19-19*a*. En la figura 19-19*b*, se ve que la distancia vertical que separa los centros es igual al radio r de los discos y que la distancia entre los centros es $2r$ (recta inclinada en la figura). Por tanto, el ángulo ϕ que forma la línea de impacto con la horizontal en la figura viene dado por

$$\phi = \text{sen}^{-1}\frac{r}{2r} = 30°$$

A continuación, se descomponen las velocidades iniciales en sus componentes según la línea de impacto y su perpendicular:

$$(v_{Ai})_t = 1{,}8 \text{ sen } 30° = 0{,}900 \text{ m/s}$$
$$(v_{Ai})_n = 1{,}8 \cos 30° = 1{,}5588 \text{ m/s}$$
$$(v_{Bi})_t = -0{,}9 \text{ sen } 30° = -0{,}450 \text{ m/s}$$
$$(v_{Bi})_n = -0{,}9 \cos 30° = -0{,}7794 \text{ m/s}$$

Como la única fuerza impulsiva que actúa sobre el sistema es la fuerza interior de reacción (que se ejerce en la dirección n), se conservará la cantidad de movimiento en la dirección t para cada disco y la componente t de su velocidad no se verá alterada por el choque:

$$(v_{Af})_t = 0{,}900 \text{ m/s} \qquad (v_{Bf})_t = -0{,}450 \text{ m/s}$$

A continuación, considerando que los dos discos constituyen un sistema de puntos materiales, sobre éste no se ejerce ninguna fuerza exterior impulsiva, en ninguna dirección, por lo que la cantidad de movimiento del sistema se conservará en todas las direcciones. En particular, para la dirección n, la conservación de la cantidad de movimiento da

$$\left(\frac{25}{g}\right)(1{,}5588) + \left(\frac{10}{g}\right)(-0{,}7794) = \left(\frac{25}{g}\right)(v_{Af})_n + \left(\frac{10}{g}\right)(v_{Bf})_n$$

Combinando esta ecuación con la definición de coeficiente de restitución

$$0{,}7 = -\frac{(v_{Bf})_n - (v_{Af})_n}{(-0{,}7794) - (1{,}5588)}$$

se tiene

$$(v_{Af})_n = 0{,}423 \text{ m/s} \qquad \text{y} \qquad (v_{Bf})_n = 2{,}060 \text{ m/s}$$

Por último, las velocidades finales se expresan relativas a sus direcciones horizontales iniciales. El módulo de la velocidad final del disco A es (fig. 19-19c)

$$v_{Af} = \sqrt{(0{,}423)^2 + (0{,}900)^2} = 0{,}994 \text{ m/s}$$

y su dirección relativa a la horizontal viene dada por

$$\tan(\theta_{Af} + 30°) = 0{,}900/0{,}423$$

o sea $\theta_{Af} = 34{,}8°$. Por tanto, la velocidad final del disco A será

$$\mathbf{v}_{Af} = 0{,}994 \text{ m/s} \measuredangle 34{,}8° \qquad \text{Resp.}$$

Para el disco B (fig. 19-19d)

$$(v_{Bf})_n = \sqrt{(0{,}450)^2 + (2{,}060)^2} = 2{,}11 \text{ m/s}$$
$$\tan(\theta_{Bf} - 30°) = 0{,}450/2{,}060$$
$$\theta = 42{,}3°$$

y

$$\mathbf{v}_{Bf} = 2{,}11 \text{ m/s} \measuredangle 42{,}3° \qquad \text{Resp.}$$

b. La suma de las energías cinéticas de los dos discos antes del choque era

$$T_i = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{9{,}81}\right)(1{,}8)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{10}{9{,}81}\right)(0{,}9)^2 = 4{,}541 \text{ J}$$

Después del choque, la suma de las energías cinéticas es

$$T_f = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{9{,}81}\right)(0{,}994)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{10}{9{,}81}\right)(2{,}11)^2 = 3{,}528 \text{ J}$$

El tanto por ciento de disminución de la energía cinética será, pues,

$$\frac{4{,}541 - 3{,}528}{4{,}541}(100) = 22{,}3 \ \% \qquad \text{Resp.}$$

c. Aplicando el teorema de la cantidad de movimiento al disco A (fig. 19-19e) se tiene

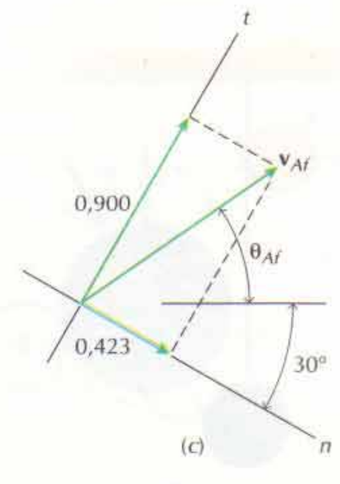
$$\frac{25}{9{,}81}(1{,}8\mathbf{i}) + 0{,}001\mathbf{F} = \frac{10}{9{,}81}(0{,}994)(\cos 34{,}8°\mathbf{i} + \text{sen } 34{,}8°\mathbf{j})$$

lo cual da

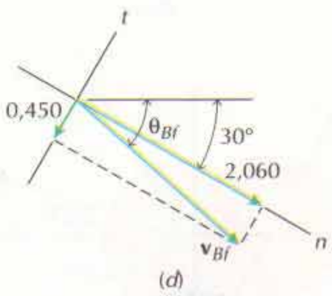
$$\mathbf{F} = -2507\mathbf{i} + 1454{,}4\mathbf{j} \qquad \text{Resp.}$$

o sea

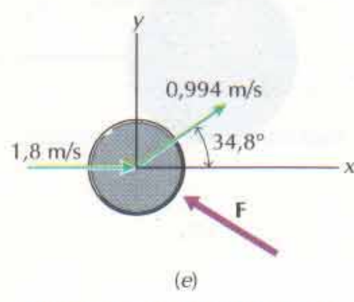
$$= 2898 \text{ N} \measuredangle 30° \qquad \text{Resp.}$$



(c)



(d)



(e)

Figura 19-19 (continuación)

PROBLEMA EJEMPLO 19.8

Una esfera B de 3 kg que pende de un hilo inextensible de 1,5 m de longitud recibe el golpe de otra esfera A de 2 kg hecha del mismo material (fig. 19-20a). Inicialmente, la esfera A está tangente al hilo y cae 1 m antes de chocar con B. Si el coeficiente de restitución vale 0,8 y la duración del contacto es $\Delta t = 0{,}01$ s, determinar:

a. La velocidad de cada esfera inmediatamente después del choque.
b. La fuerza tensora media del hilo durante el impacto.
c. El máximo ángulo θ que describirá la esfera B a consecuencia del choque.

SOLUCIÓN

a. *Teorema de las fuerzas vivas:* Primeramente, se utiliza el teorema de las fuerzas vivas para determinar la velocidad de la esfera A inmediatamente antes del impacto. Tomando nula la energía potencial gravitatoria en la posición inicial de A,

$$T_1 + V_{g1} + U_{1\to 2}^{(o)} = T_2 + V_{g2}$$
$$0 + 0 + 0 = \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 - m_A (9{,}81)(1)$$

lo cual da

$$\mathbf{v}_{A2} = 4{,}429 \text{ m/s} \downarrow$$

donde $\mathbf{v}_{A2} = \mathbf{v}_{Ai}$ es la velocidad de la esfera A inmediatamente antes del impacto.

Teorema de la cantidad de movimiento: A continuación, se toman las coordenadas n y t a lo largo de la línea de impacto y perpendicularmente a ella, según se indica en la figura 19- 20*b*. La separación horizontal (en la figura) de los centros de las esferas es r_A y la separación inclinada (en la figura) entre dichos centros es $r_A + r_B$. Por tanto, el ángulo ϕ que forma la línea de impacto con la vertical (en la figura) será

$$\phi = \operatorname{sen}^{-1} \frac{r_A}{r_A + r_B}$$

Como las esferas son del mismo material, tendrán la misma densidad ρ = masa/volumen

$$\rho = \frac{2 \text{ kg}}{\frac{4}{3}\pi r_A^3} = \frac{3 \text{ kg}}{\frac{4}{3}\pi r_B^3}$$

Por tanto

$$r_B = \sqrt[3]{3/2}\, r_A = 1{,}145 r_A$$

y

$$\phi = 27{,}79°$$

A continuación, se descomponen las velocidades en sus componentes según la línea de impacto y su perpendicular

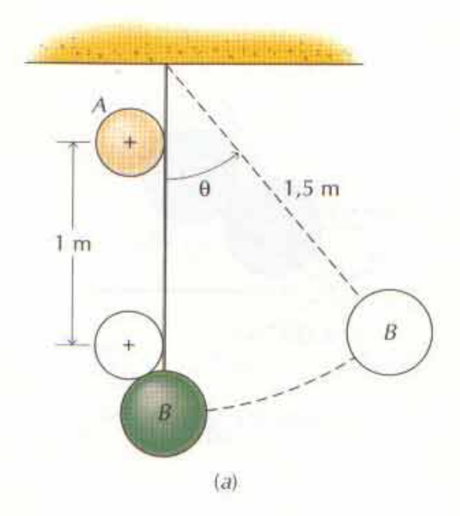
$$(v_{Ai})_t = -4{,}429 \text{ sen } 27{,}79° = -2{,}065 \text{ m/s}$$
$$(v_{Ai})_n = 4{,}429 \cos 27{,}79° = 3{,}918 \text{ m/s}$$
$$(v_{Bi})_t = (v_{Bi})_n = 0 \text{ m/s}$$

Además, como el hilo es inextensible, la esfera B no podrá bajar después del impacto y por tanto,

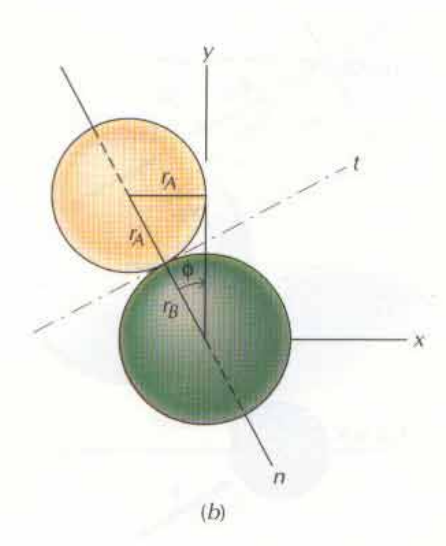
$$\mathbf{v}_{Bf} = v_{Bf}\mathbf{i}$$

y

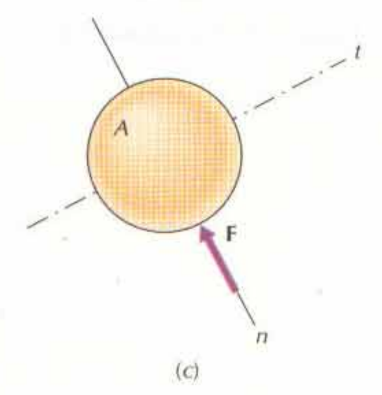
$$(v_{Bf})_t = v_{Bf} \cos 27{,}79° = 0{,}8847 v_{Bf}$$
$$(v_{Bf})_n = v_{Bf} \text{ sen } 27{,}79° = 0{,}4662 v_{Bf}$$



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Figura 19-20

Como el hilo restringe el movimiento de la esfera B, la tensión del hilo es tan impulsiva como la fuerza interior de reacción y la cantidad de movimiento del par de esferas no se conservará ni en la dirección n ni en la t. En vez de ello, se escribirán las ecuaciones que traducen el teorema de la cantidad de movimiento de cada una de las esferas por separado. Atendiendo a los diagramas de sólido libre de las figuras 19-20*c* y 19-20*d*, las ecuaciones mencionadas dan para las componentes t y n

$$2(-2{,}605) = 2(v_{Af})_t \qquad (a)$$

$$2(3{,}918) - F\Delta t = 2(v_{Af})_n \qquad (b)$$

$$0 + T\Delta t \text{ sen } 27{,}79° = 3(0{,}8847 v_{Bf}) \qquad (c)$$

$$0 - T\Delta t \text{ sen } 27{,}79° + F\Delta t = 3(0{,}4662 v_{Bf}) \qquad (d)$$

donde F es la fuerza media de impacto entre las esferas, T es la fuerza media de tensión del hilo y $\Delta t = 0{,}01$ s es la duración del impacto. Las ecuaciones *a* a *d*, combinadas con la definición de coeficiente de restitución

$$0{,}8 = \frac{-0{,}4662 v_{Bf} - (v_{Af})_n}{0 - (3{,}918)} \qquad (e)$$

constituyen un sistema que, resuelto, da

$$(v_{Af})_t = -2{,}065 \text{ m/s} \qquad (v_{Af})_n = -2{,}242 \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v}_{Bf} = 1{,}915 \text{ m/s} \longrightarrow \qquad \text{Resp.}$$

Aún hay que expresar la velocidad final de A relativa a la dirección horizontal. El módulo de la velocidad final de la esfera A es (fig. 19-20*e*)

$$v_{Af} = \sqrt{(2{,}065)^2 + (-2{,}242)^2} = 3{,}048 \text{ m/s}$$

y su dirección relativa a la horizontal viene dada por

$$\tan(\theta_{Af} + 27{,}29°) = 2{,}242/2{,}065$$

o sea $\theta_{Af} = 19{,}56°$. Por tanto, la velocidad final de la esfera A será

$$\mathbf{v}_{Af} = 3{,}05 \text{ m/s} \nwarrow 19{,}56° \qquad \text{Resp.}$$

b. Una vez halladas las componentes de la velocidad, la ecuación c da la tensión media del hilo

$$T = 1090 \text{ N} \qquad \text{Resp.}$$

c. *Teorema de las fuerzas vivas:* Por último, se vuelve a aplicar el teorema de las fuerzas vivas para hallar el ángulo que describirá la esfera B después del choque. Tomando el cero de energía potencial gravitatoria en el extremo superior del hilo,

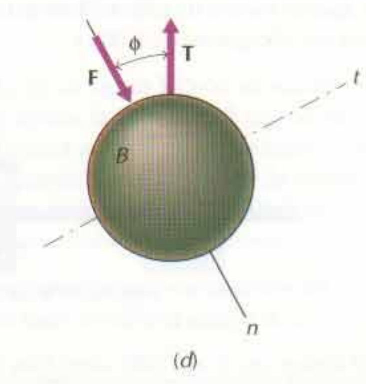
$$T_1 + V_{g1} + U_{1\to 2}^{(o)} = T_2 + V_{g2}$$

o sea

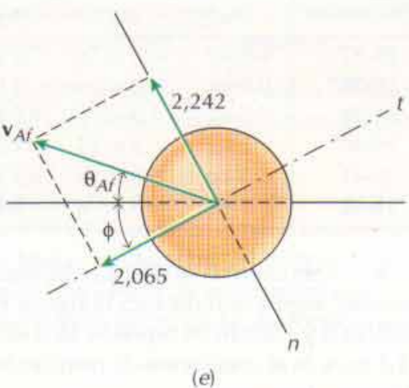
$$\frac{1}{2} m_B (1{,}915)^2 - m_B(9{,}81)(15) + 0$$
$$= 0 - m_B(9{,}81)(1{,}5 \cos\theta)$$

lo cual da

$$\theta = 28{,}9° \qquad \text{Resp.}$$



(*d*)



(*e*)

Figura 19-20 (continuación)

19-37 a 19-42 Dos cuentas deslizan libremente por una varilla horizontal, según se indica en la figura P19-37. Para las condiciones que se especifican, determinar:

a. La velocidad final de las cuentas.
b. El tanto por ciento de la energía cinética inicial que se pierde a consecuencia del choque.
c. La fuerza media de interacción entre las cuentas si la duración del choque es de 0,005 s.

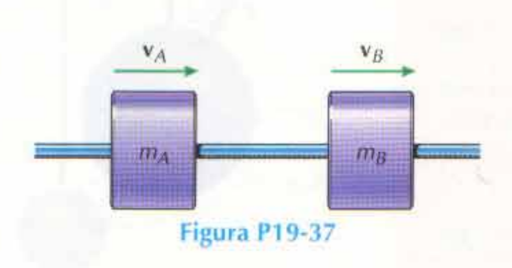


Figura P19-37

Problema	m_A	v_A	m_B	v_B	e
19-37	4,5 kg	0,9 m/s	1 kg	0 m/s	0,3
19-38*	0,5 kg	2 m/s	5 kg	0 m/s	0,7
19,39	3,5 kg	1,5 m/s	1,5 kg	0,6 m/s	0,7
19-40*	3 kg	1 m/s	1 kg	−3 m/s	0,9
19-41	3 kg	0,9 m/s	0,5 kg	−0,6 m/s	0,3
19-42	2 kg	3 m/s	3 kg	2 m/s	0,5

19-43 Tres cuentas se deslizan libremente por una varilla horizontal, según se indica en la figura P19-43. Inicialmente, las cuentas B y C están en reposo y la A se mueve hacia la derecha a 1,5 m/s. Si el coeficiente de restitución vale 0,8 para todos los choques, determinar:

a. La velocidad final de cada cuenta después de que hayan tenido lugar todos los choques.
b. El tanto por ciento de la energía cinética inicial que se ha perdido a consecuencia de los choques.

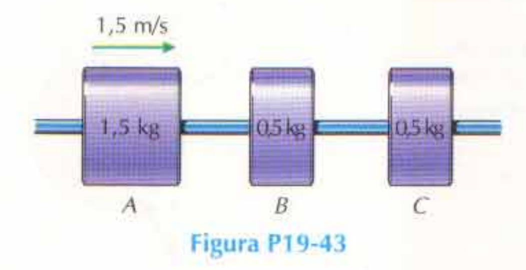


Figura P19-43

19-44* Tres cuentas se deslizan libremente por una varilla horizontal, según se indica en la figura P19-44. Inicialmente, la cuenta B está en reposo, la cuenta A se mueve hacia la derecha a 3 m/s y la cuenta C se mueve hacia la izquierda a 2 m/s. Si el coeficiente de restitución vale 0,8 para todos los choques y el primero tiene lugar entre las cuentas A y B, determinar:

a. La velocidad final de cada cuenta después que hayan tenido lugar todos los choques.
b. El tanto por ciento de la energía cinética inicial que se ha perdido a consecuencia de los choques.

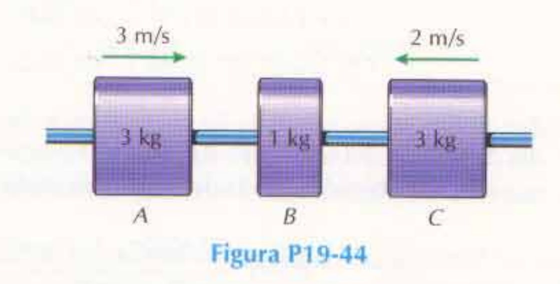


Figura P19-44

19-45 Repetir el problema 19-43 para el caso en que la cuenta B tenga una masa de 3 kg y los demás parámetros sean los mismos.

19-46 Repetir el problema 19-44 para el caso en que el primer choque tenga lugar entre las cuentas B y C y las demás condiciones sean las mismas.

19-47* Una esfera de 1 kg cae y rebota sobre una placa de 5 kg que descansa en el suelo (fig. P19-47*a*). Si la esfera parte del re-

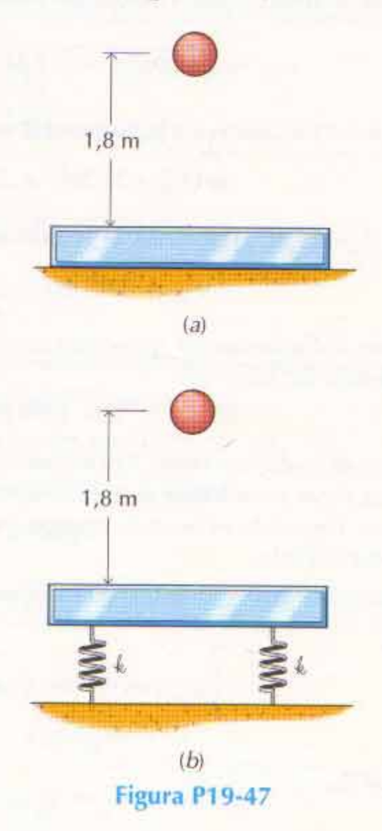


Figura P19-47

poso desde 1,8 m por encima de la placa y rebota hasta una altura de 1,5 m después del impacto, determinar:

a. El coeficiente de restitución para este choque.
b. La altura a la que rebotaría la esfera si la placa de 5 kg descansara sobre dos muelles de rigidez k = 2 kN/m cada uno (fig. P19-47*b*).

19-48* Dos esferas penden de sendos hilos según se indica en la figura P19-48. La distancia del techo al centro de cada esfera es de 2 m y el coeficiente de restitución vale 0,75. Si la esfera *A* (m_A = 2 kg) se separa 60° y se suelta a partir del reposo, determinar:

a. El máximo ángulo θ_B que describirá la esfera *B* (m_B = 3 kg) a consecuencia del impacto.
b. El ángulo θ_A que rebotaría la esfera *A* a consecuencia del impacto.

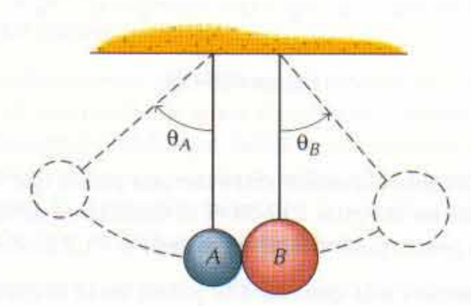


Figura P19-48

19-49 Dos esferas penden de sendos hilos según se indica en la figura P19-48. La distancia del techo al centro de cada esfera es de 1,2 m. Cuando la esfera *A* (2,5 kg) se separa 60° y se suelta a partir del reposo, se observa que la esfera *B* describe un ángulo máximo θ_B = 30° y que la esfera *A* rebota un ángulo θ_A = 15°. Determinar:

a. El peso de la esfera *B*.
b. El coeficiente de restitución en el impacto.

19-50* Para las dos esferas del problema 19-48, determinar el mínimo ángulo θ_A desde el que habría que soltar la esfera *A* para que la esfera *B* describiera un ángulo θ_B = 50° a consecuencia del impacto.

19-51 La esfera de la figura P19-51 pesa 25 N, se suelta a partir del reposo cuando θ_A = 60°, baja y choca contra la caja *B* que pesa 50 N. Si la distancia del techo al centro de la esfera es de 0,9 m, el coeficiente de restitución vale 0,8 en este choque y el coeficiente de rozamiento entre caja y suelo vale 0,3, determinar:

a. La velocidad de la caja inmediatamente después del choque.
b. La distancia que recorrerá la caja antes de detenerse.

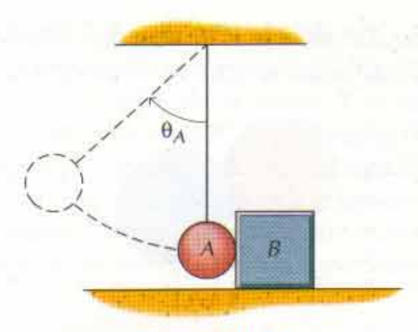


Figura P19-51

19-52* La esfera de 2 kg de la figura P19-51 se suelta a partir del reposo, baja y choca contra la caja *B* de 5 kg. La distancia del techo al centro de la esfera es de 1 m, el coeficiente de restitución vale 0,7 en este choque y el coeficiente de rozamiento cinético entre caja y suelo vale 0,1. Si la caja se desliza 750 mm desde el impacto hasta que se detiene, determinar:

a. La velocidad de la caja inmediatamente después del choque.
b. El ángulo θ_A desde el cual se soltó la esfera *A*.

19-53 En el sistema del problema 19-51, se exige que la fuerza media de interacción entre la esfera y la caja no supere los 5000 N. Si la duración del choque es de 0,001 s, determinar:

a. El máximo ángulo θ_A desde el cual se puede soltar la esfera.
b. La distancia que se deslizará la caja a consecuencia del choque.

19-54 Dos discos iguales deslizan sobre una mesa de aire según se indica en la figura P19-54. Si el disco *A* tiene una velocidad inicial de 5 m/s hacia la derecha, el disco *B* está inicialmente en reposo y el coeficiente de restitución vale 0,9, determinar las velocidades finales (en módulo, dirección y sentido) de los dos discos.

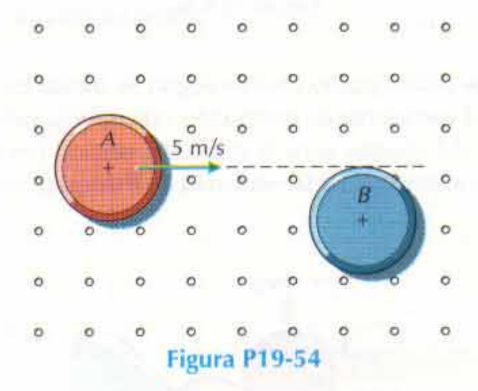


Figura P19-54

19-55* Dos discos iguales se deslizan sobre una mesa de aire según se indica en la figura P19-55. Si el coeficiente de restitución vale 0,9, determinar las velocidades finales (en módulo, dirección y sentido) de los dos discos.

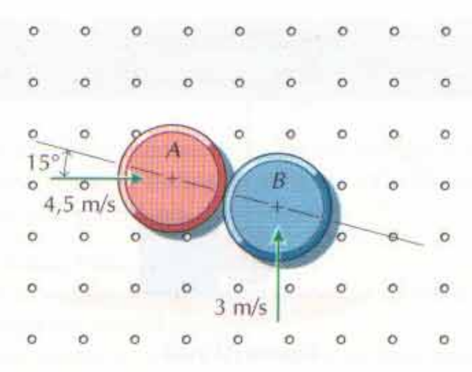


Figura P19-55

19-56* En una mesa de billar, la bola blanca choca con la bola n°1 que se introduce en la tronera de la esquina, según se indica en la figura P19-56. Si el coeficiente de restitución vale 0,95, determinar la velocidad de la bola blanca después del choque.

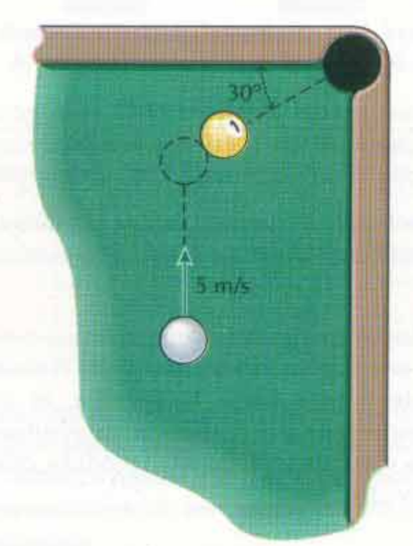


Figura P19-56

19-57 Dos bolas iguales chocan según se indica en la figura P19-57. Si el coeficiente de restitución vale 0,7 y la velocidad de *A* después del choque tiene la dirección vertical (en la figura) que se indica, determinar la velocidad de *B* después del choque.

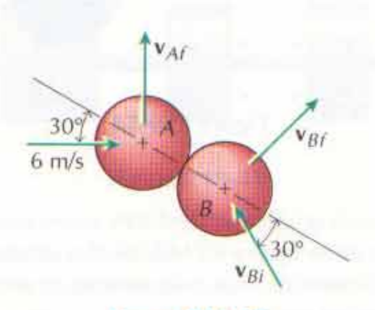


Figura P19-57

19-58* Dos discos (de diferente tamaño) chocan sobre una mesa de aire, según se indica en la figura P19-58. Si el coeficiente de restitución vale 0,7 y la velocidad final de cada disco es perpendicular a su dirección inicial de movimiento, determinar los módulos de las velocidades finales y la masa del disco *B*.

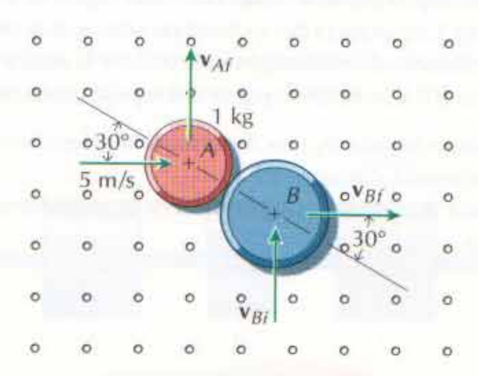


Figura P19-58

19-59 Sobre una superficie dura cae una pelota que rebota según se indica en la figura P19-59. Si el coeficiente de restitución vale 0,9 y la pelota parte del reposo siendo $h = 1{,}2$ m, determinar:

a. La distancia *c* a la que caerá la pelota en la superficie horizontal a consecuencia del rebote.
b. La máxima altura *d* del rebote medida desde la superficie horizontal.
c. La distancia *b* a lo largo de la superficie horizontal correspondiente al punto más alto del rebote.

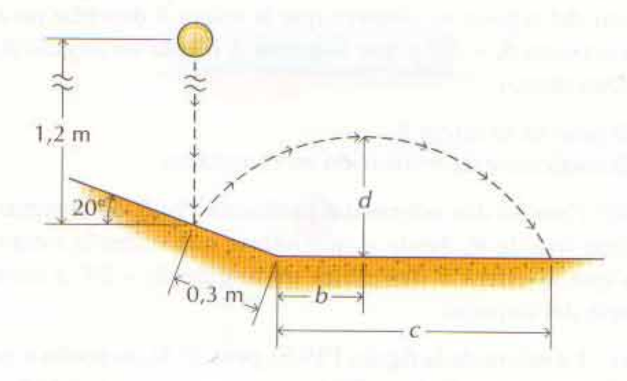


Figura P19-59

19-60* Sobre una superficie dura cae una pelota que rebota según se indica en la figura P19-60. Si el coeficiente de restitución vale 0,8, la pelota parte del reposo siendo $h = 1$ m y la pelota salva apenas la pared en el punto más alto del rebote, determinar las distancias *b*, *c* y *d* de la figura.

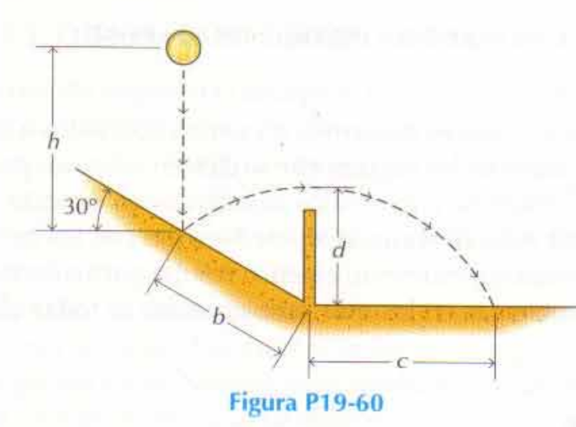


Figura P19-60

19-61 Sobre una superficie dura cae una pelota que rebota y pasa por encima de una pared vertical según se indica en la figura P19-60. Si el coeficiente de restitución vale 0,8 y la altura de la pared es $d = 0{,}9$ m, determinar la altura h desde la cual hay que soltar la pelota para que salve apenas la pared en el punto más alto del rebote.

19-62* Un dispositivo para llamar la atención del público, instalado en el escaparate de unos almacenes, consiste en un cañón de aire comprimido que lanza repetidamente una pelota que rebota en una pared, según se indica en la figura P19-62. Si el coeficiente de restitución vale 0,9 y la velocidad de la pelota al salir del cañón es de 3 m/s, determinar:

a. La distancia x a la pared a la que hay que colocar el dispositivo.
b. La distancia y correspondiente al punto de la pared en el que ha de incidir la pelota.

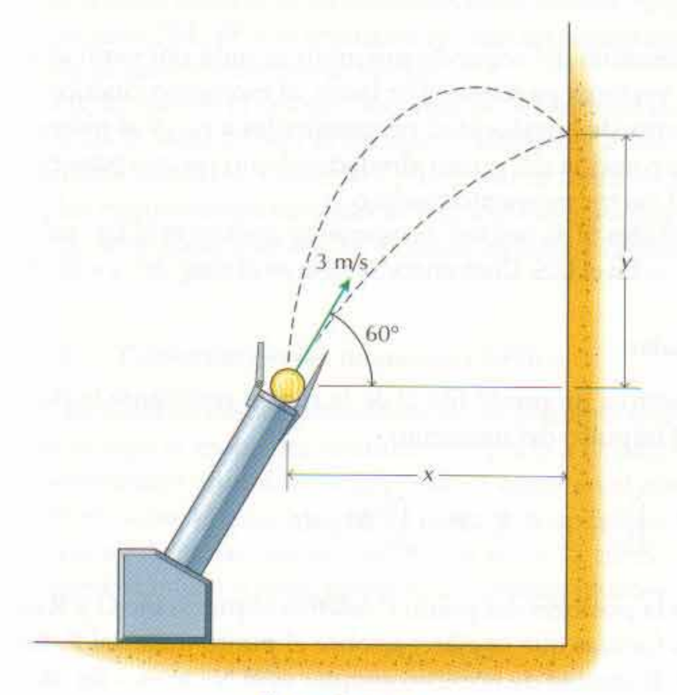


Figura P19-62

19-63 La esfera B que pesa 10 N se halla en reposo en una repisa y recibe el impacto de otra esfera igual (fig. P19-63). La distancia del techo al centro de la esfera A es de 0,9 m y el coeficiente de restitución vale 0,7. En el instante del impacto, el hilo está vertical y el centro de la esfera A está al mismo nivel que el punto más bajo de la esfera B. Si la esfera A se suelta a partir del reposo con $\theta_A = 60°$, determinar la distancia x que recorrerá la esfera B antes de volver a tocar la superficie horizontal.

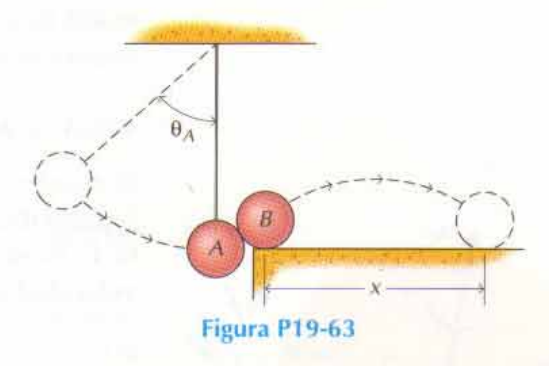


Figura P19-63

19-64* La esfera B de 2 kg está en reposo en una repisa y recibe el impacto de otra esfera igual (fig. P19-63). La distancia del techo al centro de la esfera A es de 2 m y el coeficiente de restitución vale 0,7. En el instante del impacto, el hilo está vertical y el centro de la esfera A está al mismo nivel que el punto más bajo de la esfera B. Determinar el ángulo θ_A desde el que habrá que soltar la esfera A para que la esfera B recorra una distancia $x = 1{,}5$ m antes de volver a tocar la superficie horizontal.

19-65 Supóngase que se sustituye la superficie rígida del problema 19-61 por un carrito de peso 7,5 N que pueda rodar libremente en dirección horizontal, según se indica en la figura P19-65. Si el coeficiente de restitución vale 0,8 y la altura de la pared es $d = 0{,}3$ m, determinar la altura h desde la que habría que soltar la pelota de peso 2,5 N para que salvara apenas la pared en el punto más alto del rebote.

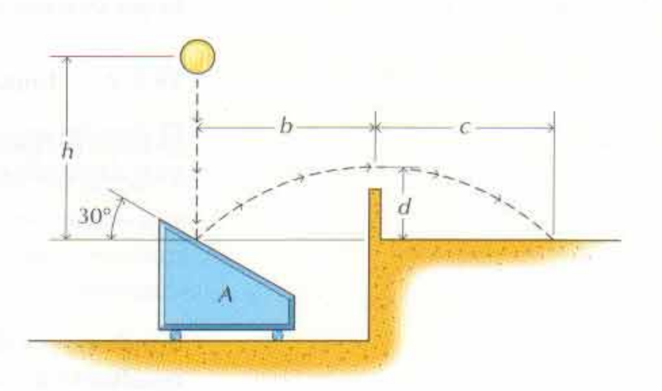


Figura P19-65

19.5 IMPULSO ANGULAR Y MOMENTO CINÉTICO DE UN PUNTO MATERIAL

El teorema del momento cinético que se desarrolla en varios apartados a continuación, relaciona los momentos de las fuerzas que se ejercen sobre un punto material con su velocidad, cuando se conocen los momentos en función del tiempo. Combinando, una vez más, la segunda ley de Newton con los principios de la Cinemática, el teorema del momento cinético resulta particularmente útil en la resolución de problemas en los que varias fuerzas (o todas ellas) pasen por un punto fijo.

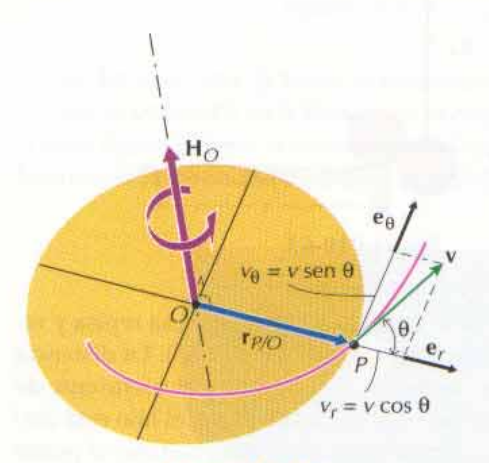


Figura 19-21

19.5.1 Momento cinético

El *momento cinético* $\mathbf{H}_O$ de un punto material P respecto a un punto fijo O lo definimos diciendo que es el momento respecto a O de la cantidad de movimiento $\mathbf{L}$. Si es $\mathbf{r}_{P/O}$ el vector de posición que va de O al punto P de masa m y velocidad $\mathbf{v}$, será

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r}_{P/O} \times (m\mathbf{v}) \qquad (19\text{-}15)$$

El módulo del momento cinético es igual a $r_{P/O}\, mv$ sen θ, donde v es la celeridad del punto y θ es el ángulo que forman el vector de posición $\mathbf{r}_{P/O}$ y la velocidad $\mathbf{v}$. El vector momento cinético será perpendicular al plano determinado por los vectores $\mathbf{r}_{P/O}$ y $\mathbf{v}$; su sentido es el que se indica en la figura 19-21.

Expresando la velocidad en función de las coordenadas polares en el plano determinado por $\mathbf{r}_{P/O}$ y $\mathbf{v}$ (fig. 19-21), el momento cinético queda en la forma

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r}_{P/O} \times m(v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta)$$

Ahora bien, el primer término del segundo miembro es nulo por serlo el producto vectorial de dos vectores paralelos. Por tanto, al momento cinético sólo contribuirá la componente de la velocidad perpendicular a $\mathbf{r}_{P/O}$ y el momento cinético representa una rotación del punto alrededor de un eje que pase por O y tenga la dirección del vector momento cinético.

En el sistema de unidades SI, la unidad de momento cinético es el kg · m^2/s o, lo que es igual, el N · m · s. En el U.S. Customary system es el slug · ft^2/s = lb · ft · s.

19.5.2 Impulso angular

El *impulso angular* respecto a un punto fijo O de la fuerza resultante lo definimos diciendo que es el impulso del momento

$$\int_{t_i}^{t_f} \mathbf{r}_{P/O} \times \mathbf{R}\, dt = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{M}_O\, dt$$

donde $\mathbf{r}_{P/O}$ es de nuevo la posición del punto P relativa al punto fijo O y $\mathbf{R}$ es la resultante de todas las fuerzas que se ejercen sobre el punto material P. En el sistema de unidades SI, la unidad de impulso angular es el N · m · s = kg · m^2/s, que es lo mismo que la unidad de momento cinético. En el U.S. Costumary system, es la lb · ft · s = slug · ft^2/s.

19.5.3 Teorema del momento cinético

Derivando respecto al tiempo el momento cinético, tenemos

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{P/O}}{dt} \times (m\mathbf{v}) + \mathbf{r}_{P/O} \times \left(m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)$$
$$= \mathbf{v} \times (m\mathbf{v}) + \mathbf{r}_{P/O} \times (m\mathbf{a})$$

Ahora bien, el primer término $\mathbf{v} \times (m\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, ya que el producto vectorial de dos vectores de igual dirección es nulo. En el segundo término, podemos utilizar la segunda ley de Newton para sustituir la magnitud $m\mathbf{a}$ por la fuerza resultante $\mathbf{R}$. Así pues, el segundo término no será sino $\mathbf{r}_{P/O} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O$, que es el momento respecto al punto O de la fuerza $\mathbf{R}$. Por tanto,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{H}_O = \mathbf{M}_O \qquad \text{(19-16)}$$

es decir: *La velocidad de variación del momento cinético de un punto material respecto a un punto fijo O, $\mathbf{H}_{Oi}$, es igual al momento respecto a O de todas las fuerzas que se ejercen sobre dicho punto material.*

Si conocemos, en función del tiempo, los momentos de las fuerzas, podremos integrar la ecuación 19-16 entre un instante inicial t_i y un instante final t_f y obtendremos así la expresión del teorema del momento cinético:

$$\mathbf{H}_{Oi} + \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{M}_O \, dt = \mathbf{H}_{Of} \qquad \text{(19-17)}$$

es decir: *El momento cinético final de un punto material, respecto a un punto fijo O, $\mathbf{H}_{Of}$, es la suma vectorial de su momento cinético inicial, respecto a O, $\mathbf{H}_{Oi}$, más el impulso angular $\int \mathbf{M}_O\,dt$ de la resultante de todas las fuerzas que se ejercen sobre el punto material durante el intervalo de tiempo.*

Al igual que en el caso del teorema de la cantidad de movimiento, las ecuaciones 19-16 y 19-17 son ecuaciones vectoriales a las que corresponden tres ecuaciones escalares. Como $\mathbf{M}_O$ puede variar tanto en módulo como en dirección, las componentes cartesianas rectangulares suelen ser las más convenientes. Las tres componentes se pueden aplicar independientemente unas de otras.

19.5.4 Conservación del momento cinético

Salvo en algunos casos particulares, no es corriente que se conozca cómo varía con el tiempo el momento resultante respecto a O, $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{P/O} \times \mathbf{R}$. Entre los casos particulares aludidos, es importante aquel en el que todas las fuerzas que se ejercen sobre el punto material pasen por un punto O, pues sus momentos respecto a éste serían todos nulos y por tanto su suma, con lo que los momentos cinéticos inicial y final, respecto a O, serían iguales:

$$\mathbf{H}_{Oi} = \mathbf{H}_{Of} \qquad \text{(19-18)}$$

Este comportamiento se conoce con el nombre de *principio de conservación del momento cinético.*

19.5.5 Sistemas de puntos materiales

En el caso de un sistema de puntos materiales en interacción, podemos escribir por separado las ecuaciones que traducen el teorema del momento cinético para cada punto y luego sumarlas. Por ejemplo, para el conjunto de puntos materiales representado en la figura 19-6, las ecuaciones mencionadas (ec. 19-16) son

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{1/O} \times m_1\mathbf{v}_1) = \mathbf{r}_{1/O} \times (\mathbf{R}_1 + \mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{13} + \ldots + \mathbf{f}_{1i} + \ldots)$$
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{2/O} \times m_2\mathbf{v}_2) = \mathbf{r}_{2/O} \times (\mathbf{R}_2 + \mathbf{f}_{21} + \mathbf{f}_{23} + \ldots + \mathbf{f}_{2i} + \ldots)$$
$$\vdots$$
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{\ell/O} \times m_\ell\mathbf{v}_\ell) = \mathbf{r}_{\ell/O} \times (\mathbf{R}_\ell + \mathbf{f}_{\ell 1} + \mathbf{f}_{\ell 2} + \ldots + \mathbf{f}_{\ell i} + \ldots)$$

etc. Sumándolas tenemos

$$\sum_\ell\left(\frac{d}{dt}\mathbf{H}_{\ell/O}\right) = \sum_\ell (\mathbf{r}_{\ell/O} \times \mathbf{R}_\ell) + (\mathbf{r}_{1/O} \times \mathbf{f}_{12} + \mathbf{r}_{1/O} \times \mathbf{f}_{12}) + (\mathbf{r}_{1/O} \times \mathbf{f}_{13} + \mathbf{r}_{3/O} \times \mathbf{f}_{31}) + \ldots$$

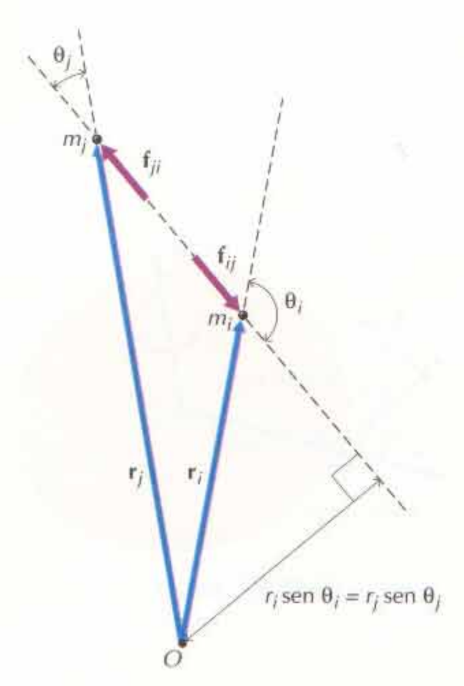


Figura 19-22

Ahora bien, las fuerzas interiores, dos a dos, tienen igual recta soporte y módulo pero sentidos opuestos (fig. 19-22). Por tanto, la suma de momentos respecto a O para cada pareja de fuerzas será nula y para el sistema de puntos materiales

$$\frac{d}{dt}\mathbf{H}_O = \sum_{\ell=1}^{N} \mathbf{M}_{\ell/O} \qquad \textbf{(19-19)}$$

donde $\mathbf{H}_O = \Sigma\, \mathbf{H}_{\ell/O}$ es el momento cinético total respecto a O del sistema de puntos, $\Sigma\, \mathbf{M}_{\ell/O}$ es la suma de momentos respecto a O de todas las fuerzas exteriores que se ejercen sobre el sistema y no habrá que considerar los momentos de las fuerzas interiores.

Integrando la ecuación 19-19 respecto al tiempo, entre los instantes t_i y t_f obtenemos el *teorema del momento cinético para un sistema de puntos materiales:*

$$(\mathbf{H}_O)_i + \int_{t_i}^{t_f} \sum_{\ell=1}^{N} \mathbf{M}_{\ell/O}\, dt = (\mathbf{H}_O)_f \qquad \textbf{(19-20)}$$

es decir: *El momento cinético final* $(\mathbf{H}_O)_f$ *de un sistema de puntos materiales respecto a un punto fijo O es igual a la suma vectorial de su momento cinético inicial* $(\mathbf{H}_O)_i$ *respecto al punto O más el impulso angular* $\int \Sigma\, \mathbf{M}_{\ell/O}\, dt$ *respecto a O de todas las fuerzas exteriores que se ejercen sobre el sistema de puntos.*

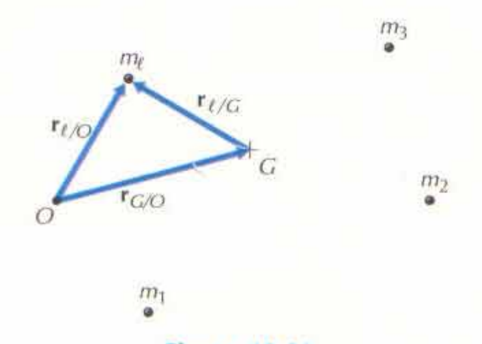


Figura 19-23

Es corriente que se tengan que calcular los momentos y el momento cinético de un sistema de puntos materiales respecto a su centro de masa y no respecto a un punto fijo O. El momento cinético del sistema de puntos materiales respecto a su centro de masa G se define como el momento de la cantidad de movimiento

$$\mathbf{H}_G = \Sigma\mathbf{H}_{\ell/G} = \Sigma\mathbf{r}_{\ell/G} \times (m_\ell\mathbf{v}_\ell)$$

donde $\mathbf{r}_{\ell/G}$ es la posición del punto ℓ-ésimo relativa al centro de masa G (fig. 19-23) y $\mathbf{v}_\ell = \dot{\mathbf{r}}_{\ell/O}$ es la velocidad absoluta del punto ℓ-ésimo. La velocidad absoluta se puede sustituir utilizando la ecuación de la velocidad relativa

$\mathbf{v}_\ell = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_{\ell/G}$, donde $\mathbf{v}_G$ es la velocidad del centro de masa del sistema de puntos materiales y se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_G &= \sum \mathbf{r}_{\ell/G} \times m_\ell(\mathbf{v}_G + \mathbf{v}_{\ell/G}) \\ &= (\sum m_\ell \mathbf{r}_{\ell/G}) \times \mathbf{v}_G + \sum \mathbf{r}_{\ell/G} \times (m_\ell \mathbf{v}_{\ell/G})\end{aligned}$$

La cantidad entre paréntesis del primer término es nula en virtud de la definición de centro de masa, ya que los vectores de posición $\mathbf{r}_{\ell/G}$ tienen su origen en el centro de masa. Por tanto,

$$\mathbf{H}_G = \sum \mathbf{r}_{\ell/G} \times (m_\ell \mathbf{v}_\ell) = \sum \mathbf{r}_{\ell/G} \times (m_\ell \mathbf{v}_{\ell/G}) \qquad (19\text{-}21)$$

Es decir, el momento cinético del sistema de puntos materiales respecto al centro de masa G se puede calcular o bien utilizando la velocidad absoluta $\mathbf{v}_\ell = \dot{\mathbf{r}}_{\ell/O}$ o bien utilizando la velocidad relativa al centro de masa $\mathbf{v}_{\ell/G}$.

Derivando $\mathbf{H}_G$ respecto al tiempo tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{H}_G}{dt} &= \sum\left(\frac{d\mathbf{r}_{\ell/G}}{dt} \times m_\ell \mathbf{v}_\ell + \mathbf{r}_{\ell/G} \times m_\ell \frac{d\,\mathbf{v}_\ell}{dt}\right) \\ &= \sum \mathbf{v}_{\ell/G} \times m_\ell \mathbf{v}_\ell + \sum \mathbf{r}_{\ell/G} \times m_\ell \mathbf{a}_\ell \\ &= \sum \mathbf{v}_{\ell/G} \times m_\ell (\mathbf{v}_G + \mathbf{v}_{\ell/G}) + \sum \mathbf{r}_{\ell/G} \times m_\ell \mathbf{a}_\ell \\ &= (\sum m_\ell \mathbf{v}_{\ell/G}) \times \mathbf{v}_G + \sum \mathbf{v}_{\ell/G} \times m_\ell \mathbf{v}_{\ell/G} + \sum \mathbf{r}_{\ell/G} \times m_\ell \mathbf{a}_\ell\end{aligned}$$

Pero la suma del primer término también es nula en virtud de la definición de centro de masa ya que $\sum m_\ell \mathbf{v}_{\ell/G} = \frac{d}{dt}\sum m_\ell \mathbf{v}_{\ell/G}$ y el vector de posición $\mathbf{r}_{\ell/G}$ tiene su origen en el centro de masa G. Además, cada término del segundo sumatorio de esta ecuación es nulo por serlo el producto vectorial de dos vectores de igual dirección. Por último, utilizando la segunda ley de Newton para sustituir los factores $m_\ell \mathbf{a}_\ell$, como se hizo en la deducción de la ecuación 19-19, tenemos

$$\frac{d\mathbf{H}_G}{dt} = \sum \mathbf{M}_{\ell/G} \qquad (19\text{-}22)$$

donde $\sum \mathbf{M}_{\ell/G}$ es la suma de los momentos de las fuerzas exteriores respecto al centro de masa G y no es necesario considerar los momentos de las fuerzas interiores. Integrando la ecuación 19-22 respecto al tiempo tenemos

$$(\mathbf{H}_G)_i + \int_{t_i}^{t_f} \sum \mathbf{M}_{\ell/G}\, dt = (\mathbf{H}_G)_f \qquad (19\text{-}23)$$

Notemos que la forma del momento cinético de un sistema de puntos materiales es la misma cuando se suman los momentos respecto a un punto fijo O que cuando se suman respecto al centro de masa G. Sin embargo, la forma de las ecuaciones no será la misma si se suman los momentos respecto a un punto móvil arbitrario P. En este caso, los términos que contengan $\sum m_\ell \mathbf{r}_{\ell/P}$ no desaparecerán y las ecuaciones 19-22 y 19-23 tendrá términos adicionales.

Por último, debemos tener presente que las ecuaciones 19-19 a 19-23 se han deducido para un sistema cualquiera de puntos materiales. Son igualmente aplicables a un sistema de puntos que se muevan independientemente unos de otros que a un sistema de puntos que constituyan un cuerpo rígido.

PROBLEMA EJEMPLO 19.9

Un satélite de peso 2500 N se encuentra en órbita circular a 160 km por encima de la Tierra y se quiere llevarlo a otra órbita circular situada 1600 km por encima de la Tierra mediante un motor de propulsión a chorro que proporciona un empuje de 3750 N (fig. 19-24). El cambio de órbita se efectúa siguiendo una órbita de tránsito elíptica disparando el motor de maniobra primeramente en A y después en B. Si la velocidad necesaria en A en la órbita de maniobra es 8191 m/s, determinar qué duración ha de tener el encendido del motor en A y en B para efectuar el cambio de órbita.

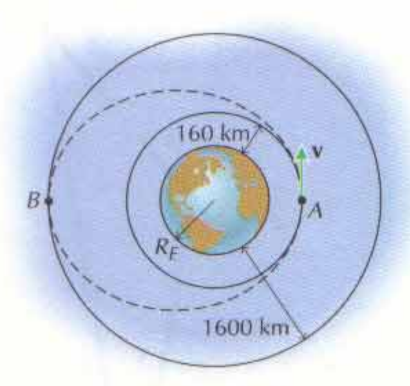


Figura 19-24

SOLUCIÓN

En las órbitas circulares, la aceleración del satélite es

$$a = \frac{v^2}{r}$$

dirigida hacia el centro de la Tierra y la única fuerza que se ejerce sobre el satélite es

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{gmR_E^2}{r^2}$$

también dirigida hacia el centro de la Tierra, donde R_E es el radio de la Tierra. Entonces, la ley de Newton da

$$\frac{gmR_E^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

lo cual da, para la velocidad en las órbitas circulares

$$v_c = R_E\sqrt{\frac{g}{r}}$$

Por tanto, haciendo $R_E = 6370$ km,

$$v_{160c} = (6370)(10^3)\sqrt{\frac{9{,}81}{(6530)(10^3)}} = 7807{,}6 \text{ m/s}$$

para la órbita circular inferior y

$$v_{1600c} = (6370)(10^3)\sqrt{\frac{9{,}81}{(7970)(10^3)}} = 7067{,}1 \text{ m/s}$$

para la órbita más elevada.

Como, en toda órbita circular, la velocidad es perpendicular al radio, el momento cinético respecto al eje perpendicular al plano de la órbita circular será $H = rmv$;

$$H_{160c} = (6530)(10^3)\left(\frac{2500}{9{,}81}\right)(7807{,}6) = 1{,}2993(10^3) \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$$

$$H_{1600c} = (7970)(10^3)\left(\frac{2500}{9{,}81}\right)(7067{,}6) = 1{,}4354(10^3) \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$$

En el punto A de la órbita elíptica, la velocidad también es perpendicular al radio, por lo que el momento cinético del satélite en la órbita elíptica en A será también $H = rmv$;

$$H_{160e} = (6530)(10^3)\left(\frac{2500}{9{,}81}\right)(8191) = 1{,}3631(10^3) \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$$

Aplicando entonces el teorema del momento cinético (ec. 19-17) durante el encendido en A y representando por E el empuje, se tiene (la gravedad actúa según el eje y por tanto su momento respecto a éste es nulo)

$$H_{160c} + r_A T \Delta t_A = H_{160e}$$
$$1{,}2993(10^{13}) + (6530)(10^3)(3750)\Delta t_A = 1{,}3631(10^{13})$$

de donde

$$\Delta t_A = 26{,}1 \text{ s} \qquad \text{Resp.}$$

Aplicando el teorema del momento cinético durante el encendido en B, se tiene

$$H_{160e} + r_B T \Delta t_B = H_{1600c}$$
$$1{,}3631(10^{13}) + 7970(10^3)(3750)\Delta t_B = 1{,}4354(10^{13})$$

de donde

$$\Delta t_B = 24{,}2 \text{ s} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 19.10

Una masa de 0,6 kg, sujeta al extremo de una cuerda inextensible, se desliza por una superficie horizontal (fig. 19-25*a*). El otro extremo, tras pasar por un orificio practicado en dicha superficie, está sujeto a un resorte que tiene $k = 100$ N/m. El resorte tiene su longitud natural cuando $\ell = 0$. Si, en el instante representado, $v = 10$ m/s y $\ell = 0{,}5$ m, determinar los valores mínimo y máximo de ℓ del movimiento resultante.

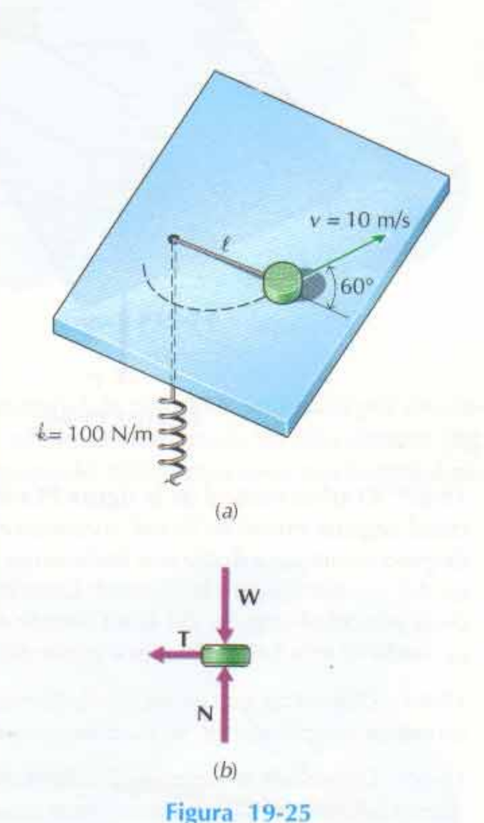


Figura 19-25

SOLUCIÓN

El momento cinético respecto a un eje vertical que pase por el orificio se conserva ya que ninguna de las tres fuerzas que se ejercen sobre la masa tiene momento respecto a dicho eje (fig. 19-25*b*). Tanto la fuerza peso W como la fuerza normal N son paralelas al eje, por lo que su momento respecto a él será nulo, mientras que la tensión de la cuerda corta al eje, por lo que tampoco dará momento.

En el instante representado, el momento cinético vale

$$H_{Oi} = (0{,}5)(0{,}6)(10 \text{ sen } 60°) \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

Cuando la cuerda esté a su longitud mínima o máxima, la velocidad de la masa será perpendicular a la cuerda y el momento cinético será

$$H_{Of} = \ell(0{,}6)v$$

Por tanto, la conservación del momento cinético respecto a un eje vertical que pase por el orificio da

$$(0{,}5)(0{,}6)(10 \text{ sen } 60°) = \ell(0{,}6)v \qquad (a)$$

El teorema de las fuerzas vivas da otra ecuación que relaciona la longitud de la cuerda con la velocidad. Ni el peso W ni la fuerza normal N trabajan y el trabajo efectuado por la fuerza del resorte deriva de un potencial. Por tanto,

$$\frac{1}{2}(0{,}6)(10)^2 + \frac{1}{2}(100)(0{,}5)^2 = \frac{1}{2}(0{,}6)v^2 + \frac{1}{2}(100)\ell^2 \qquad (b)$$

Resolviendo el sistema constituido por las ecuaciones *a* y *b* se tiene

$$\ell_{max} = 0{,}828 \text{ m} \qquad \text{Resp.}$$

$$\ell_{min} = 0{,}405 \text{ m} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

19-66* Un punto material de 250 g, sujeto al extremo de un hilo inextensible, se desliza por una superficie horizontal siguiendo una trayectoria circular (fig. P19-66). El hilo pasa por un orificio central y de su otro extremo se tira lentamente reduciendo el radio de la trayectoria de 500 mm a 200 mm. Si la velocidad inicial del punto es de 5 m/s, determinar su velocidad cuando el radio es de 200 mm.

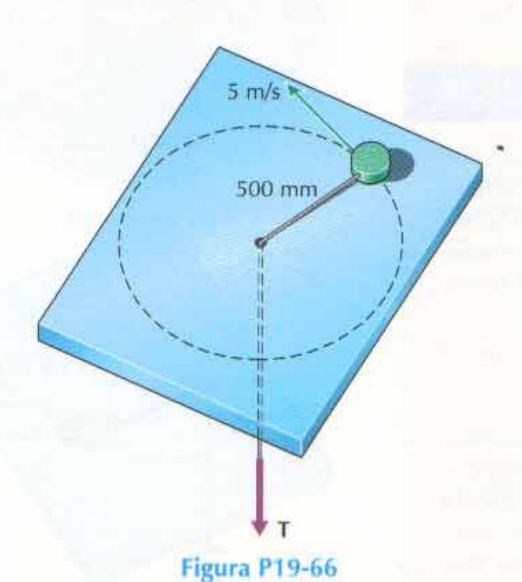


Figura P19-66

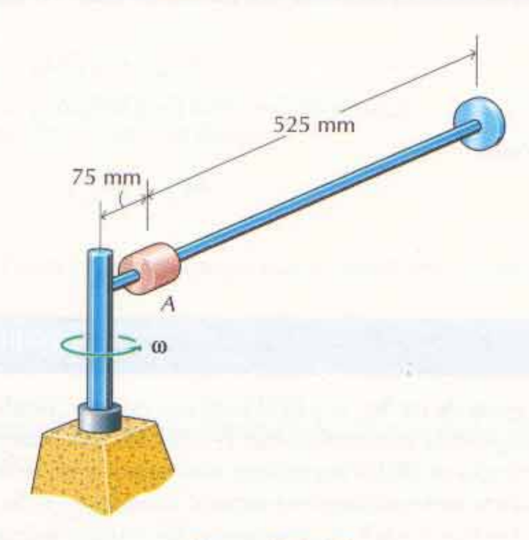


Figura P19-67

19-67* El árbol vertical de la figura P19-67 gira con una velocidad angular inicial de 20 rad/s cuando el cilindro *A* de 2,5 N de peso comienza a deslizarse lentamente hacia afuera a lo largo del miembro ligero horizontal. Determinar la disminución de la velocidad angular del árbol cuando el cilindro *A* se deslice desde 75 mm hasta 600 mm a partir del eje del árbol.

19-68 Demostrar que en un movimiento debido a una fuerza central la magnitud $r^2\dot{\theta}$ se mantiene constante.

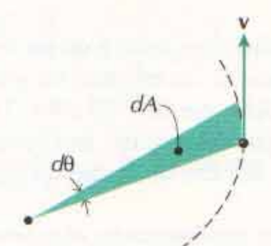


Figura P19-69

19-69 Demostrar la segunda ley de Kepler: "El radio vector que va del Sol a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales." Es decir, demostrar que dA/dt = constante, donde dA es el área sombreada de la figura P19-69.

19-70* Un satélite alrededor de la Tierra está en órbita elíptica de semieje mayor a = 17000 km y semieje menor b = 13725 km (fig. P19-70). Si en *A* la velocidad del satélite es de 9500 m/s, determinar su velocidad en *B* y en *C*.

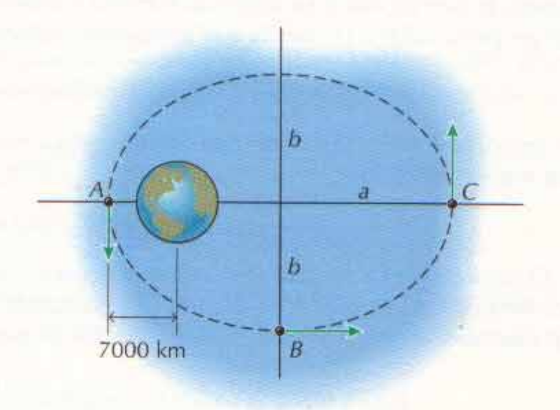


Figura P19-70

19-71* Una bola de peso 25 N está unida al extremo de un hilo inextensible de 0,6 m de longitud (fig. P19-71). En el instante representado, la velocidad está contenida en un plano horizontal siendo $v = 1{,}8$ m/s y $\theta = 60°$. Determinar el mínimo ángulo θ del movimiento resultante de la bola.

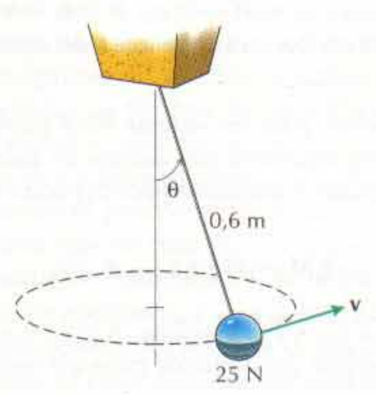


Figura P19-71

19-72* Una bolita rueda libremente por el interior de una superficie cónica de 30°, según se indica en la figura P19-72. En el instante representado, la velocidad de la bolita es horizontal siendo $z = 500$ mm. Determinar la máxima altura a la que subirá la bolita si la velocidad inicial es $v_i = 4$ m/s. Repetirlo para el caso en que $v_i = 1$ m/s.

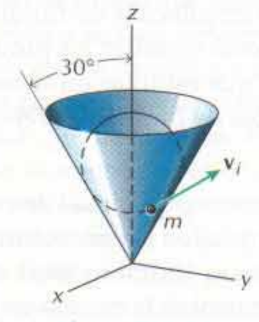


Figura P19-72

19-73 Una bolita rueda libremente por el interior de una superficie cónica, según se indica en la figura P19-73. En el instante representado, la velocidad de la bolita es horizontal siendo $z = 60$ cm. Si la mínima altura que se alcanza por el movimiento resultante es de 30 cm, determinar la velocidad inicial v_i de la bolita y su velocidad en el punto más bajo.

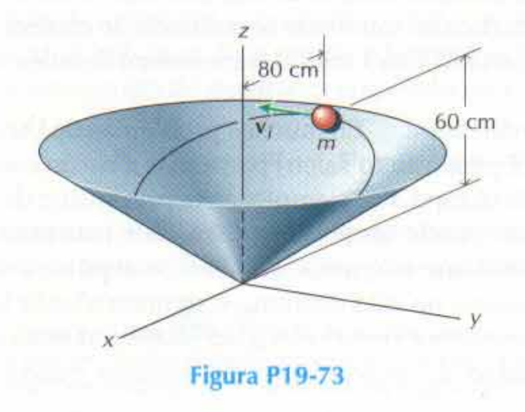


Figura P19-73

19-74* Un punto material de 2 kg que se desliza por una superficie horizontal está unido al extremo de un hilo elástico (fig. P19-74). El otro extremo del hilo, que tiene una longitud natural de 400 mm y una constante elástica $k = 250$ N/m, está amarrado en A. En su posición más proxima a A ($d = 200$ mm), el punto lleva una celeridad de 5 m/s. Determinar:

a. La velocidad del punto (celeridad v y dirección θ) cuando la longitud del hilo sea de 750 mm y el punto se esté alejando de A.
b. La longitud del hilo elástico y la velocidad del punto material cuando se halle en la posición más alejada de A.
c. La velocidad del punto material cuando la longitud del hilo sea de 600 mm y el punto se mueva hacia A.

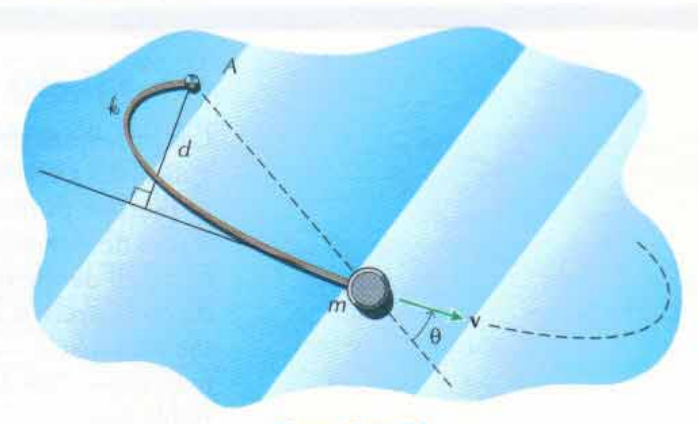


Figura P19-74

19-75 Un punto material de peso 10 N se desliza por una superficie horizontal sujeto al extremo de un hilo elástico (fig. P19-75). El otro extremo del hilo, el cual tiene una longitud na-

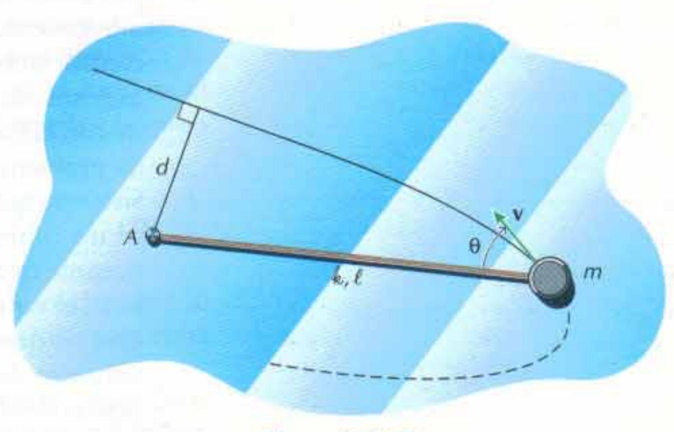


Figura P19-75

tural de 45 cm y una constante elástica k = 133 N/m está amarrado en A. Si $v = 3$ m/s, $\theta = 40°$ y $\ell = 675$ mm, en el instante representado, determinar:

a. La velocidad del punto material (celeridad v y dirección θ) cuando sea nula la tensión del hilo.
b. La distancia d de mayor aproximación al punto A.
c. La longitud del hilo elástico y la velocidad del punto material cuando esté lo más alejado posible de A.

19-76 Demostrar, para un sistema de n puntos materiales, que el momento cinético del sistema respecto a un punto fijo O puede escribirse en la forma

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{H}_G + \mathbf{r}_G \times m\mathbf{v}_G$$

donde $\mathbf{H}_O = \Sigma \mathbf{r}_{i/O} \times m_i\mathbf{v}_i$, $\mathbf{H}_G = \Sigma\, \mathbf{r}_{i/G} \times m_i\mathbf{v}_i$, $m = \Sigma\, m_i$ y $\mathbf{r}_G$ y $\mathbf{v}_G$ son los vectores de posición y velocidad, respectivamente, del centro de masa del sistema de puntos materiales respecto al punto fijo O.

19-77 Demostrar, para un sistema de n puntos materiales, que el momento cinético del sistema respecto a un punto móvil P puede escribirse en la forma

$$\mathbf{H}_P = \mathbf{H}_G + \mathbf{r}_{G/P} \times m\mathbf{v}_G$$

donde $\mathbf{H}_P = \Sigma\, \mathbf{r}_{i/P} \times m_i\mathbf{v}_i$, $\mathbf{H}_G = \Sigma\, \mathbf{r}_{i/G} \times m_i\mathbf{v}_i$, $m = \Sigma\, m_i$ y $\mathbf{v}_G$ es la velocidad absoluta del centro de masa del sistema de puntos materiales.

19-78 Demostrar, para un sistema de n puntos materiales, que el momento resultante del sistema de fuerzas exteriores respecto a un punto P arbitrario (móvil) puede escribirse en la forma

$$\sum \mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_G + \mathbf{r}_{G/P} \times m\mathbf{a}_G$$

donde $\Sigma\, \mathbf{M}_P = \Sigma\, \mathbf{r}_{i/P} \times \mathbf{F}_i$, $\mathbf{H}_G = \Sigma\, \mathbf{r}_{i/G} \times m_i\mathbf{v}_i$, $m = \Sigma\, m_i$ y $\mathbf{a}_G$ es la aceleración absoluta del centro de masa del sistema de puntos materiales.

19.6 SISTEMAS DE MASA VARIABLE

Los principios de la Cinética desarrollados en los capítulos anteriores sólo son aplicables a sistemas constantes de puntos materiales —sistemas que ni ganan ni pierden puntos materiales. Sin embargo, muchos problemas de Dinámica tratan de sistemas de muchos puntos materiales en los que cada uno de éstos es difícil de identificar (tales como en la circulación de fluidos). Para este tipo de problemas es a menudo más conveniente estudiar los puntos de una región fija del espacio —un *volumen de control*— que estudiar un sistema fijo de puntos materiales. Dos de los tipos más corrientes de problemas referentes a masa variable son:

1. **Flujo de masa estacionario.** En muchos problemas de circulación de fluidos, las partículas fluidas penetran y salen de un volumen de control en igual proporción. Aun cuando la masa (número total de partículas) del fluido existente en el volumen de control es la misma en todo instante, las partículas que la constituyen están cambiando constantemente. Como las partículas que penetran en el volumen de control tienen cantidades de movimiento diferentes de las de las que salen de él, sobre el volumen de control deberán ejercerse fuerzas exteriores aun cuando la cantidad de movimiento total de las partículas interiores al volumen de control no varíe con el tiempo. En el apartado 19.6.1 consideraremos en detalle este tipo de problema.
2. **Sistemas que ganan o pierden masa.** En muchos problemas de Dinámica, en un volumen de control penetran (o salen) partículas a razón constante durante cierto intervalo de tiempo. Por ejemplo, en la propulsión de un cohete, el volumen de control puede ser el casco del cohete más el combustible no quemado. A medida que se quema, el cohete lo expulsa y sale del volumen de control. El sistema no sólo disminuye su masa al salir las partículas de él, sino que las expulsa a cierta velocidad relativa al resto del sistema. Por tanto, la cantidad de movimiento del sistema puede variar

incluso en ausencia de fuerzas exteriores aplicadas a él. En el apartado 19.6.3 se considerará en detalle este tipo de problema.

19.6.1 Flujo de masa estacionario

El conocimiento de las fuerzas que una corriente estacionaria de fluido ejerce sobre las paletas de una turbina o de un ventilador es importante en el análisis de muchas máquinas. El análisis completo de tal problema corresponde a un curso de Mecánica de fluidos. En este libro sólo vamos a utilizar el fenómeno para ilustrar cómo se aplican los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético a tales problemas de flujo estacionario.

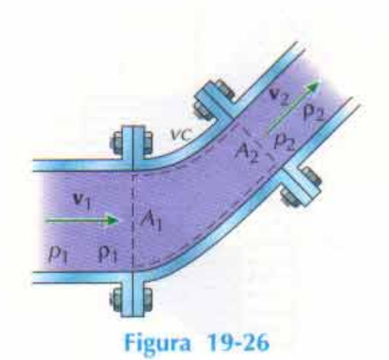


Figura 19-26

Consideremos el problema de hallar la fuerza que se ejerce sobre un codo reductor de una tubería cuando lo atraviesa una corriente estacionaria de fluido, como se indica en la figura 19-26. El fluido penetra en el codo con cierta velocidad $\mathbf{v}_1$, cierta presión p_1 y una densidad (masa por unidad de volumen) ρ_1, que se suponen constantes en toda la sección de admisión de área A_1. El fluido abandona luego el codo con una velocidad $\mathbf{v}_2$, presión p_2 y densidad ρ_2 también constantes en toda la sección de salida de área A_2. El flujo se supone estacionario; es decir, en el interior del codo no se produce ningún aumento ni disminución de fluido. Por tanto, la masa de fluido que abandona el codo por unidad de tiempo es igual a la que penetra en él por unidad de tiempo.

Se ha dibujado un volumen de control $\mathscr{VC}$ que encierra una región de fluido limitada por la superficie sobre la cual se ejerce la fuerza que buscamos y las superficies sobre las cuales se ejercen fuerzas conocidas o que se pueden determinar. Además, las superficies que limitan el volumen de control se eligen de manera que el flujo de fluido que las atraviese por unidad de tiempo sea o bien nulo o bien conocido o fácil de determinar. El sistema de partículas encerradas en el volumen de control constituye un sistema de masa variable, ya que continuamente gana partículas que penetran en él mientras pierde un número igual de partículas que de él salen. Por tanto, los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético que se han desarrollado antes en este capítulo para sistemas fijos de puntos materiales no serán directamente aplicables a la masa que constituye el volumen de control.

Para tener un sistema fijo de puntos materiales al cual sean aplicables los teoremas mencionados, consideremos el sistema de partículas ampliado representado en la figura 19-27*a*. Este sistema consta de las partículas existentes en el instante t en el volumen de control (cuya masa total es m_t) más las partículas que penetrarán en el volumen de control en un intervalo de tiempo Δt (cuya masa total es Δm_1). Como todas las partículas que se hallen a una distancia de la sección de admisión no superior a $\Delta s_1 = v_1 \, \Delta t$ penetrarán en el codo en el tiempo Δt, el volumen de la región adicional es $V_1 = A_1 \, \Delta s_1$.[1] Entonces, la masa total de este grupo de partículas ampliado será

$$\mathcal{M} = m_t + \Delta m_1 = m_t + \rho_1 V_1 = m_t + \rho_1 A_1 v_1 \Delta t \tag{19-24}$$

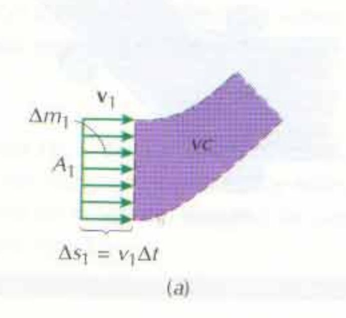
En el instante $t + \Delta t$, este mismo grupo de partículas ocupará la región que se indica en la figura 19-27*b*. Esta región consta de las partículas existentes en el

[1] Suponemos aquí que el área A_1 es la de una sección perpendicular a la velocidad, con lo que la región será un cilindro recto de revolución. Si la velocidad no fuese perpendicular a la sección, la fórmula del volumen incluiría el *seno* del ángulo que formaría la velocidad con el plano de dicha sección.

volumen de control original en el instante $t + \Delta t$ (cuya masa total es $m_{t+\Delta t}$) más las que han salido del volumen de control durante el tiempo Δt (cuya masa total es Δm_2). La masa del sistema fijo de partículas vendrá ahora dada por

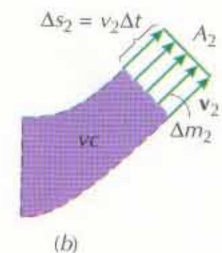
$$\mathcal{M} = m_{t+\Delta t} + \Delta m_2 = m_{t+\Delta t} + \rho_2 V_2 = m_{t+\Delta t} + \rho_2 A_2 v_2 \Delta t \qquad \textbf{(19-25)}$$

Ahora bien, por hipótesis de flujo estacionario la masa de las partículas en el interior del volumen de control es siempre la misma; es decir, $m_t = m_{t+\Delta t}$. Por tanto, combinando las ecuaciones 19-24 y 19-25 tendremos, en el límite, cuando $\Delta t \to 0$



(a)

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \qquad \textbf{(19-26)}$$



(b)

Figura 19-27

que confirma lo antes dicho de que la masa de fluido que sale por unidad de tiempo del codo es exactamente igual a la que penetra en él por unidad de tiempo.

Lo que verifica nuestra anterior aseveración de que tanto fluido como sale del codo penetra en él en el mismo tiempo.

La ecuación 19-26 expresa el principio de *conservación de la masa*. Los términos de la ecuación representan la *masa que circula por unidad de tiempo* $\dot{m} = \rho v A$, tanto penetrando como saliendo del volumen de control. En el sistema de unidades SI se mide en kg/s. El el U.S. Customary system se expresa en slug/s = lb · s/ft. En el caso de flujo de fluidos incompresibles (fluidos en los que la densidad es constante) así como en otros flujos de densidad constante, en vez de la masa que circula por unidad de tiempo se utiliza el *caudal* o volumen que circula por unidad de tiempo

$$Q = \frac{\dot{m}}{\rho} = A_1 v_1 = A_2 v_2$$

El caudal se mide en m^3/s en el sistema SI y en ft^3/s en el U.S. Customary system.

En el instante t, el sistema fijo de partículas antes identificado tiene una cantidad de movimiento

$$\mathbf{L}_t = \Delta m_1 \mathbf{v}_1 + (\mathbf{L}_{\mathcal{VC}})_t = (\dot{m}\Delta t_1)\,\mathbf{v}_1 + (\mathbf{L}_{\mathcal{VC}})_t$$

donde $(\mathbf{L}_{\mathcal{VC}})_t$ es la cantidad de movimiento de todas las partículas del volumen de control en el instante t y $\Delta m_1 \mathbf{v}_1$ es la cantidad de movimiento de las partículas que están a punto de entrar en el volumen de control en el instante t. En el instante $t + \Delta t$, el mismo sistema de partículas tendrá una cantidad de movimiento

$$\mathbf{L}_{t+\Delta t} = (\mathbf{L}_{\mathcal{VC}})_{t+\Delta t} + \Delta m_2 \mathbf{v}_2 = (\mathbf{L}_{\mathcal{VC}})_{t+\Delta t} + (\dot{m}\,\Delta t)\,\mathbf{v}_2$$

Pero como el flujo es estacionario, $(\mathbf{L}_{\mathcal{VC}})_t = (\mathbf{L}_{\mathcal{VC}})_{t+\Delta t}$ y la cantidad de movimiento (ec. 19-6)

$$\mathbf{L}_t + \sum \left(\int \mathbf{F}\,dt\right) = L_{t+\Delta t}$$

da en el límite cuando $\Delta t \to 0$

$$(\dot{m}\,\Delta t)\,\mathbf{v}_1 + \sum \mathbf{F}\,\Delta t = (\dot{m}\,\Delta t)\,\mathbf{v}_2$$

o sea

$$\sum \mathbf{F} = \dot{m}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \qquad (19\text{-}27)$$

donde $\Sigma\,\mathbf{F}$ es la suma de todas las fuerzas exteriores que se ejercen sobre el sistema de partículas interiores al volumen de control.

En la ecuación 19-27 es importante incluir *todas* las fuerzas exteriores que se ejercen sobre el sistema de partículas interiores al volumen de control. Por tanto, el trazar un diagrama de sólido libre correcto es tan importante en estos problemas de flujo de fluidos como en cualquier otro problema referente a un punto material o a un cuerpo rígido. Por lo que respecta al diagrama de sólido libre del volumen de control (fig. 19-28),

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_p + \mathbf{W} - p_1 A_1 \mathbf{n}_1 - p_2 A_2 \mathbf{n}_2$$

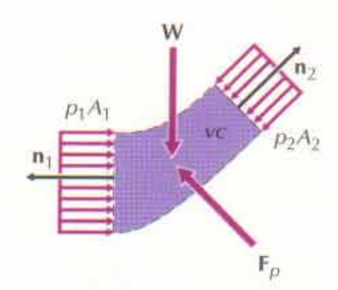


Figura 19-28

donde $\mathbf{F}_p$ es la fuerza que ejerce el codo de la tubería sobre el fluido del volumen de control (el fluido ejercerá sobre el codo una fuerza igual y opuesta); **W** es el peso del fluido del volumen de control; $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son los vectores unitarios normales hacia fuera de las secciones de áreas A_1 y A_2, respectivamente y $-p_1A_1\mathbf{n}_1$ y $-p_2A_2\mathbf{n}_2$ son las fuerzas que, sobre el fluido del volumen de control, ejercen las porciones de fluido contiguas.

Se puede obtener un resultado análogo utilizando el teorema del momento cinético expresado por la ecuación 19-20 (o por la 19-23). Tomando los momentos cinéticos y los momentos de todas las fuerzas exteriores respecto a un punto fijo O (o respecto al centro de masa G), tenemos

$$\mathbf{r}_1 \times [\,(\dot{m}\,\Delta t)\,\mathbf{v}_1] + \sum \mathbf{M}_O\,\Delta t = \mathbf{r}_2 \times [\,(\dot{m}\,\Delta t)\,\mathbf{v}_2]$$

o sea

$$\sum \mathbf{M}_O = \dot{m}(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2 - \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1) \qquad (19\text{-}28)$$

donde $\Sigma\,\mathbf{M}_O = \Sigma\,(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ es la suma de los momentos de todas las fuerzas exteriores que se ejercen sobre el fluido interior al volumen de control y $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son los vectores de posición de los centros de las secciones A_1 y A_2, respectivamente. Los momentos cinéticos y los momentos de todas las fuerzas deben calcularse respecto a un mismo punto fijo O (o respecto al centro de masa G).

19.6.2 Aplicaciones comunes del flujo estacionario

Las ecuaciones 19-27 y 19-28 se pueden utilizar para resolver una amplia gama de problemas de Dinámica de fluidos que incluyen el codo reductor de la figura 19-26 y las situaciones representadas en la figura 19-29. Podemos formular algunas consideraciones acerca de la aplicación de estos principios a algunos de los tipos más comunes de movimiento de fluidos:

1. **Circulación por tubos.** En la circulación por tuberías (fig. 19-26), codos (fig. 19-19*a*) y toberas (fig. 19-29*b*), se supone conocida el área de la sección recta del flujo en toda sección de interés y las velocidades del fluido se pueden obtener o de la masa que circula por unidad de tiempo o del caudal Q. La presión del fluido en la tubería no será, en general, ni despreciable ni constante y deberá conocerse o determinarse a partir de otros principios de la Mecánica de fluidos. El peso del fluido suele ser despreciable frente a otras fuerzas que intervengan en el problema a menos que sea muy grande el volumen de control. Si la tubería es muy larga y/o es

muy pequeño su diámetro, podrá ser necesario incluir el rozamiento del fluido con la pared de aquélla (esta fuerza de rozamiento no está indicada en el diagrama de sólido libre de la figura 19-28).

2. **Circulación por un canal.** En la circulación de agua por debajo de una compuerta (fig. 19-29*c*) o por encima de una presa (fig. 19-29*d*), la presión del fluido es muy importante y no se puede despreciar. En Mecánica de fluidos se demuestra que en una región del flujo en donde las líneas de corriente sean rectas y paralelas, la presión en el fluido aumenta linealmente con la profundidad $p = \rho g h$, donde h es la profundidad de un punto bajo la superficie del fluido. Aun cuando será necesario conocer el peso para hallar la fuerza que se ejerce sobre el fondo del canal, no es necesario para hallar la fuerza que se ejerce sobre superficies verticales tales como la compuerta o la presa representadas en las figuras 19-29*c* y 19-29*d*. El rozamiento del fluido con el fondo y las paredes del canal rara vez tendrá importancia frente a las otras fuerzas del problema.

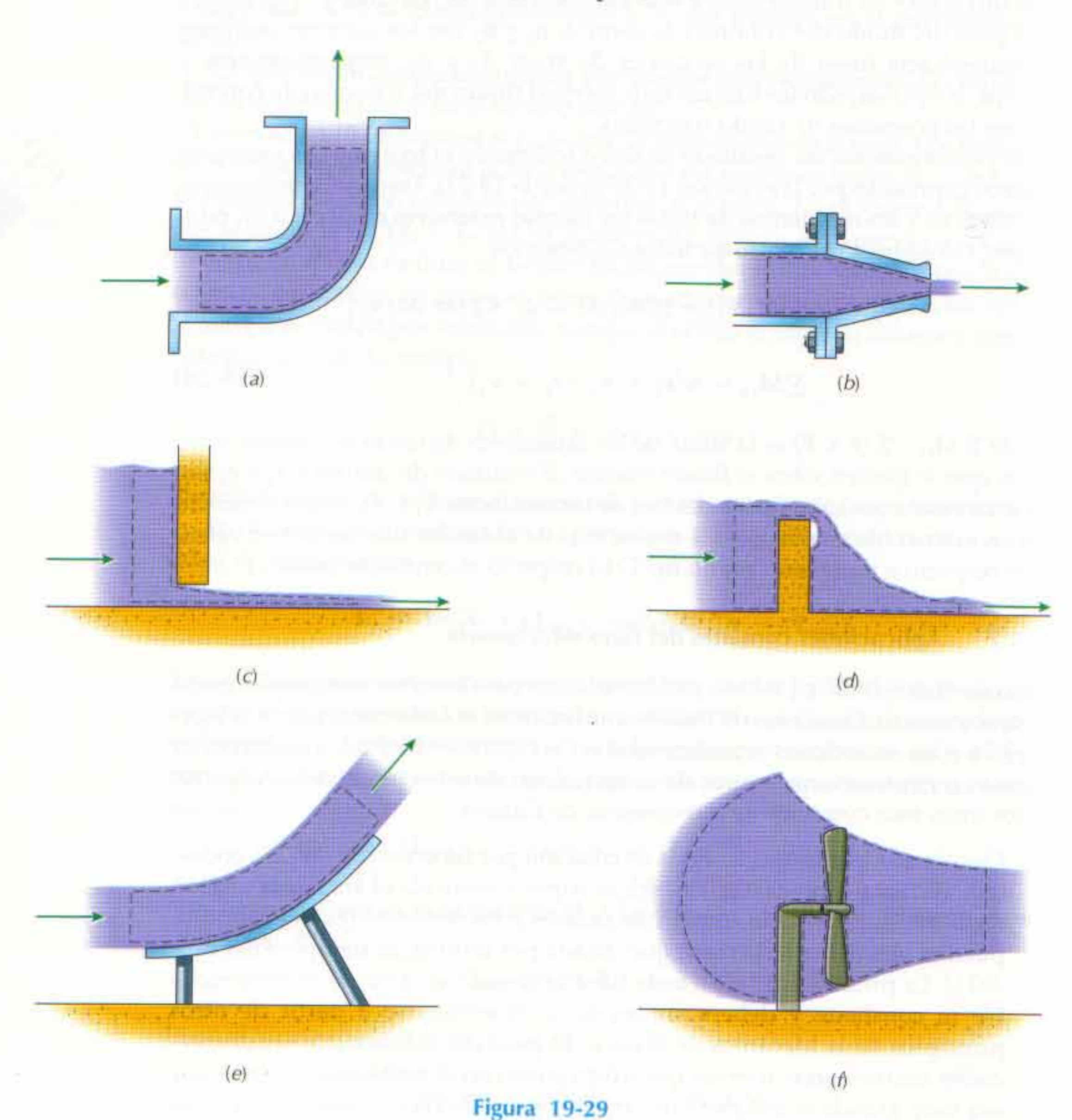


Figura 19-29

3. **Chorro libre.** En Mecánica de fluidos se demuestra que la presión en los chorros libres (flujo de un fluido no contenido por una tubería o por las paredes de un canal) es igual a la del fluido que lo rodea. En el caso del fluido desviado por la aleta fija representada en la figura 19-29*e*, esto significa que la presión en el chorro de agua que incide en la aleta y la presión en el chorro que sale de ella son ambas nulas. También se demuestra que en flujos como éste, la celeridad del chorro que sale de la aleta es igual a la celeridad del chorro que en ella incide. El peso del fluido y las fuerzas de rozamiento con la aleta rara vez tienen importancia.
4. **Ventiladores estacionarios.** Cuando un ventilador que gira con velocidad uniforme es atravesado por aire o agua, la velocidad del fluido aumenta de un lado de las paletas al otro. Salvo en una región próxima al ventilador, el fluido que se acerca a él y el chorro que de él sale (fig. 19-29*f*) se pueden tratar como chorros libres: puede despreciarse la presión. Mientras el chorro expulsado por el ventilador suele estar concentrado y tener una velocidad uniforme, el aire que se aproxima al ventilador suele estar más disperso: el área de admisión es muy grande y se podrá despreciar la velocidad de admisión.
5. **Alabes y hélices móviles.** Los flujos alrededor de álabes móviles y de hélices móviles no son estacionarios, por lo que las ecuaciones anteriores no se podrán aplicar directamente en estos casos. No obstante, si los álabes o las hélices se mueven en línea recta con celeridad constante, un observador que se moviera con el álabe o la hélice vería estacionario al flujo. Por tanto, estos problemas pueden convertirse en problemas de flujo estacionario y aplicar las ecuaciones anteriores si se toma un sistema de coordenadas que se mueva con el álabe o la hélice. Las velocidades (y por tanto los caudales) deberán expresarse con relación al sistema de coordenadas móvil. Si el álabe o la hélice no se moviera en línea recta con celeridad constante, habría que desarrollar otras ecuaciones que tuvieran en cuenta, en forma adecuada, la aceleración del sistema flujo / coordenadas.

19.6.3 Sistemas que ganan o pierden masa

El otro tipo que se analizará de sistema de masa variable es aquel que gana masa por acopio de partículas (como un recolector móvil que se va llenando de agua o grano) o que la pierde por ir expulsándola (como un cohete quemando el combustible).

Se desarrollará el método general para el sistema que adquiere masa, pero es igualmente aplicable a ambos.

Consideremos un cuerpo, como el de la figura 19-30, que está absorviendo una corriente de partículas. Es evidente que se trata de un sistema de masa variable y que los conceptos de momento cinético y cantidad de movimiento antes desarrollados en este capítulo no se pueden aplicar directamente a este cuerpo. En su lugar, definamos un sistema de partículas formado por el cuerpo (que en el instante t tiene una masa m y una velocidad $\mathbf{v}$) y por las partículas (con masa total Δm y velocidad $\mathbf{v}_a$) absorbidas en el intervalo Δt (fig. 19-31). Este sistema, mayor que el inicial, es un sistema fijo de puntos materiales en el intervalo Δt y se le pueden aplicar los teoremas de la cantidad de movimiento para relacionar las fuerzas ejercidas sobre el sistema con su variación en cantidad de movimiento.

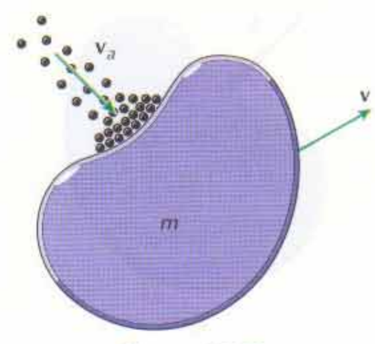


Figura 19-30

En el instante t, la cantidad de movimiento del sistema es simplemente la suma de las cantidades de movimientos de sus partes (fig. 19-31*a*)

$$\mathbf{L}_t = m\mathbf{v} + \Delta m\ \mathbf{v}_a$$

mientras que después de la absorción de la partícula o partículas y que toda la masa se esté moviendo como un solo objeto de masa $m + \Delta m$ y velocidad $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ (fig. 19-31*b*) es

$$\mathbf{L}_{t+\Delta t} = (m + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) = m\mathbf{v} + \Delta m\ \mathbf{v} + m\ \Delta\mathbf{v} + \Delta m\ \Delta\mathbf{v}$$

Luego si $\mathbf{R}$ es la resultante de todas las fuerzas *exteriores* ejercidas sobre le sistema, el teorema del momento cinético (ec. 19-6) da

$$m\mathbf{v} + \Delta m\ \mathbf{v}_a + \int \mathbf{R}\ dt = m\mathbf{v} + \Delta m\ \mathbf{v} + m\ \Delta\mathbf{v} + \Delta m\ \Delta\mathbf{v}$$

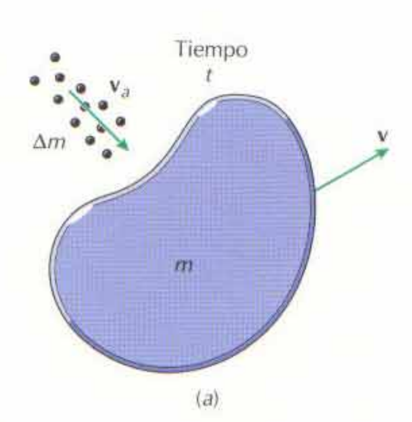
Dividiendo por Δt y reordenando la ecuación resulta

$$\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{R}\ dt = m\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} - \frac{\Delta m}{\Delta t}(\mathbf{v}_a - \mathbf{v}) + \frac{\Delta m \Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$$

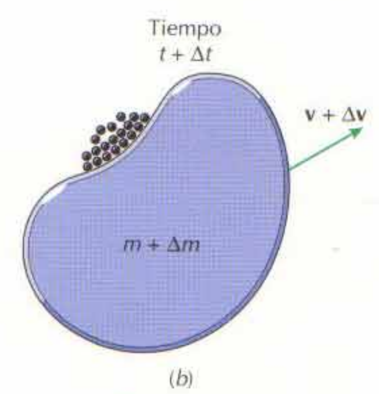
que en el límite, cuando $\Delta t \to 0$, se convierte en

$$\mathbf{R} = m\mathbf{a} - \dot{m}(\mathbf{v}_a - \mathbf{v}) = m\mathbf{a} - \dot{m}\ \mathbf{v}_{a/n}$$

en la que $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\mathbf{v}/\Delta t$ es la aceleración del cuerpo a causa de la acción de las fuerzas exteriores y de las partículas absorbidas, $\dot{m} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta m/\Delta t$ es la razón a que el cuerpo absorbe masa del chorro de partículas, $\mathbf{v}_{a/m} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}$ es la velocidad de las partículas respecto al cuerpo (velocidad relativa) y $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta m\ \Delta\mathbf{v}/\Delta t = \lim_{\Delta t \to 0} \dot{m}\ \Delta\mathbf{v} = \mathbf{0}$



(*a*)



(*b*)

Figura 19-31

La fuerza $\mathbf{R}$ representa la resultante de *todas las fuerzas* exteriores ejercidas sobre el sistema, es decir el cuerpo y la parte de masa absorbida. No obstante, esta fuerza resultante *no comprende* las fuerzas de acción y reacción $\mathbf{P}$ (fig. 19-32) entre el cuerpo y la masa que se absorbe porque son fuerzas interiores del sistema.

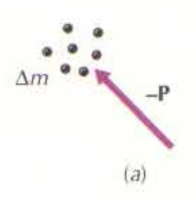
Es interesante comparar la ecuación 19-29 con la segunda ley de Newton del movimiento. Por ejemplo, según esa ley, como la fuerza resultante es igual al cambio de cantidad de movimiento, se podría expresar como

$$\mathbf{R} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \dot{m}\mathbf{v} + m\dot{\mathbf{v}}$$

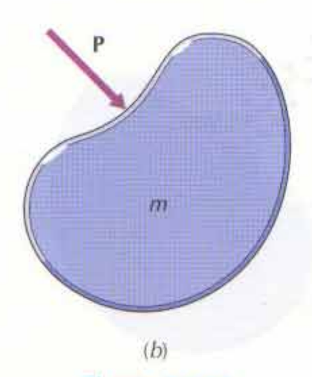
La ecuación 19-29 concuerda con esta expresión de la ley de Newton únicamente si $\mathbf{v}_a = \mathbf{0}$, es decir si la masa adquirida está en reposo antes de ser absorbida.

Si se compara la ecuación 19-29 con la segunda ley de Newton del movimiento expresada en su forma habitual $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, es cómodo despejar $m\mathbf{a}$ en la ecuación 19-29, de modo que

$$\mathbf{R} + \dot{m}\mathbf{v}_{a/m} = m\mathbf{a} \qquad \textbf{(19-30)}$$



(*a*)



(*b*)

Figura 19-32

Así pues, el efecto ejercido sobre el cuerpo por las partículas que se están absorbiendo es el mismo que el que ejercerá una fuerza en la dirección de la celeridad relativa de módulo $\dot{m}v_{a/m}$. De hecho, la aplicación del teorema del momento cinético a una partícula sola Δm (fig. 19-32a) da

$$\Delta m\ \mathbf{v}_a + \int (-\mathbf{P})\, dt = \Delta m(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v})$$

que una vez simplificada dividiendo por Δt y haciendo $\Delta t \to 0$, da

$$\mathbf{P} = \dot{m}(\mathbf{v}_a - \mathbf{v}) = \dot{m}\mathbf{v}_{a/m} \tag{19-31}$$

Esta "fuerza efectiva" tenderá a acelerar el cuerpo si las partículas se suman "desde atrás" o va desacelerando si se suman "por delante" del cuerpo.

La ecuación 19-29 se puede aplicar a un cuepo que expulse masa, como por ejemplo un cohete mientras se quema su combustible. En su caso, la velocidad del flujo de masa $\dot{m}$ es negativa[1]. Así pues, por las ecuaciones 19-30 y 19-31, el efecto ejercido sobre el cuerpo por las partículas que se expulsan es el mismo que el de una fuerza en sentido opuesto al de la velocidad relativa y de módulo $P = |\dot{m}\ \mathbf{v}_{a/m}|$. Es decir, las partículas expulsadas "por detrás" tenderán a acelerar el cuerpo mientras que las expulsadas "por delante" tenderán a desacelerarlo. Este es el mecanismo de los cohetes.

19.6.4 Casos especiales de sistemas que ganan o pierden masa

Las ecuaciones 19-29 a 19-31 son aplicables a una amplia gama de sistemas que ganan o pierden masa que va desde los cohetes hasta los cables de grúas. Las ecuaciones se pueden simplificar en algunos casos particulares tales como:

1. **Trineo a reacción.** Cuando un trineo impulsado a chorro se acelera horizontalmente a lo largo de una pista recta, el peso y las fuerzas de reacción de la pista son normales a la velocidad y a la velocidad relativa. La fuerza de freno debida a las fuerzas aerodinámicas suele ser proporcional al cuadrado de la celeridad del vehículo kv^2. Por tanto, la componente de la ecuación 19-30 según la dirección del movimiento será

$$(m_0 - bt)\,\dot{v} = bu - kv^2 \tag{19-32}$$

donde b es la masa constante de combustible quemada por unidad de tiempo y u es la velocidad de los gases quemados relativa al trineo. Si se conociera el empuje P en vez de la masa expulsada por unidad de tiempo, podríamos combinar la ecuación 19-31 con la 19-30 y tendríamos

$$(m_0 - bt)\,\dot{v} = P - kv^2 \tag{19-33}$$

Resolviendo la ecuación 19-32 o la 19-33 hallaríamos la celeridad del trineo en función del tiempo.

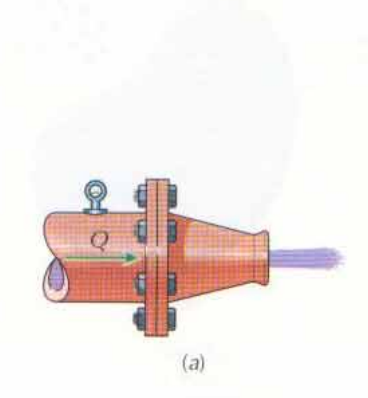
[1] Es decir, si el cohete quema por unidad de tiempo una cantidad constante b de combustible, la variación de su masa por unidad de tiempo será $\dot{m} = -b$. Entonces, si la masa inicial del cohete es m_0, su masa en el instante t será $m = m_0 + \dot{m}\,t = m_0 - bt$. Además, si la velocidad de los gases quemados respecto al cohete es $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{a/m}$, el empuje sobre el cohete, $\mathbf{P} = \dot{m}\ v_{a/m} = -b\mathbf{u}$ tendrá el sentido opuesto al de la velocidad relativa $\mathbf{u}$.

2. **Todas las fuerzas exteriores son nulas.** Cuando una nave espacial navega por el espacio exterior, no encuentra resistencia del medio. Si la nave está muy alejada de planetas y estrellas, las fuerzas gravitatorias que sobre ella se ejercen serán despreciables con lo que $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ y la ecuación 19-29 queda en la forma

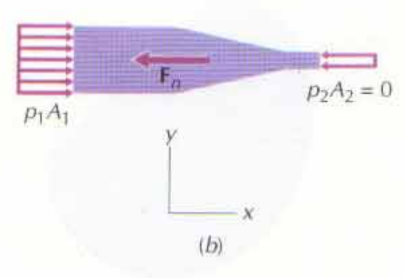
$$m\mathbf{a} = \dot{m}\mathbf{v}_{a/m}$$

PROBLEMA EJEMPLO 19.11

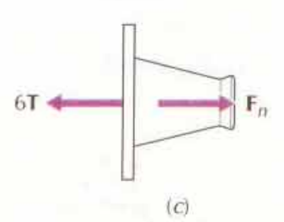
Una tobera expulsa agua a razón de 1892,5 l/min, según se indica en la figura 19-33*a*. La tobera está unida a una tubería de 10 cm de diámetro y tiene un diámetro de salida de 5 cm. Si la presión medida en la tubería es de 113,4 kPa, determinar la fuerza que se ejerce sobre cada perno. (La densidad del agua es 1000 kg/m³.)



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Figura 19-33

SOLUCIÓN

El caudal viene dado por

$$Q = \frac{1892{,}1 \text{ min}}{(1000 \text{ l/m}^3)(60 \text{ s/min})}$$
$$= 0{,}0315 \text{ m}^3\text{/s}$$
$$= v_1A_1 = v_2A_2$$

de donde, las velocidades resultan ser

$$v_1 = 4{,}01 \text{ m/s}$$

y

$$v_2 = 16{,}04 \text{ m/s}$$

Aplicando la componente x de la ecuación 19-27 al diagrama de sólido libre del agua contenida en la tobera (fig. 19-33*b*) se tiene

$$p_1A_1 - F_n = \rho Q(v_{2x} - v_{1x})$$

o sea

$$(113{,}4)\frac{\pi}{4}(10)^2 - F_n = (1000 \times 9{,}81)(0{,}0315)(16{,}04 - 4{,}01)$$

de donde

$$F_n = 518{,}9 \text{ N}$$

es la fuerza que la tobera ejerce sobre el agua. El agua ejerce sobre la tobera una fuerza de igual módulo y dirección, pero sentido opuesto. Luego, del diagrama de sólido libre de la tobera (fig. 19-33*c*), el equilibrio da para la tensión en los pernos

$$T = \frac{F_n}{6} = 86{,}48 \text{ N} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 19.12

Bajo la compuerta de un canal, circula agua de densidad $\rho = 1000\ \text{kg/m}^3$, según se indica en la figura 19-34*a*. La anchura del canal es de 2 m y su caudal es $Q = 3{,}10\ \text{m}^3/\text{s}$. Comparar la fuerza que ejerce el agua sobre la compuerta con la que ejercería si no circulara.

SOLUCIÓN

El diagrama de sólido libre del agua que presiona sobre la compuerta (fig. 19-34*b*) incluye las fuerzas de presión del agua contigua del canal $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Los módulos de estas fuerzas son iguales a las áreas encerradas bajo los diagramas de presión (fig. 19-34*c*; 19-34*d*)

$$F_1 = 0{,}5\,[\,(1000)\,(9{,}81)(3)]\,(3)(2) = 88\ 290\ \text{N}$$
$$F_2 = 0{,}5\,[\,(1000)\,(9{,}81)(0{,}3)]\,(0{,}3)(2) = 882{,}9\ \text{N}$$

La masa que circula por unidad de tiempo y las velocidades del agua se obtienen a partir del caudal $\dot{m} = \rho Q = \rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2$ y da

$$\dot{m} = (1000)\,(3{,}10) = 3100\ \text{kg/s}$$
$$v_1 = \frac{3{,}10}{(3)(2)} = 0{,}5167\ \text{m/s}$$

y

$$v_2 = \frac{3{,}10}{(0{,}3)(2)} = 5{,}167\ \text{m/s}$$

Aplicando entonces la ecuación 19-27 (para la componente x)

$$88\ 290 - 882{,}9 - F_g = (3100)\,(5{,}167 - 0{,}5167)$$

se tiene para la fuerza que se ejerce sobre el agua que pasa bajo la compuerta

$$\mathbf{F}_g = 73\ 000\ \text{N} \leftarrow \quad \text{sobre el agua}$$

El agua ejerce una fuerza de igual módulo y dirección, pero sentido opuesto, sobre la compuerta:

$$\mathbf{F}_g = 73\ 000\ \text{N} \rightarrow \quad \text{sobre la compuerta} \qquad \text{Resp.}$$

Si no se moviera el fluido, ejercería sobre la compuerta una fuerza de presión que aumentaría linealmente con la profundidad, según se indica en la figura 19-34*e*. El módulo de esta fuerza es igual al área encerrada bajo el diagrama presión-carga

$$F_{gs} = 0{,}5\,[\,(1000)\,(9{,}81)(2{,}5)]\,(2{,}5)(2)$$
$$= 61\ 300\ \text{N} \rightarrow \quad \text{sobre la compuerta} \qquad \text{Resp.}$$

La diferencia entre estas dos respuestas estriba en que las líneas de corriente de la circulación del líquido, en la proximidad de la compuerta, no son rectas y paralelas. Por tanto, la presión no varía linealmente con la profundidad en esta región.

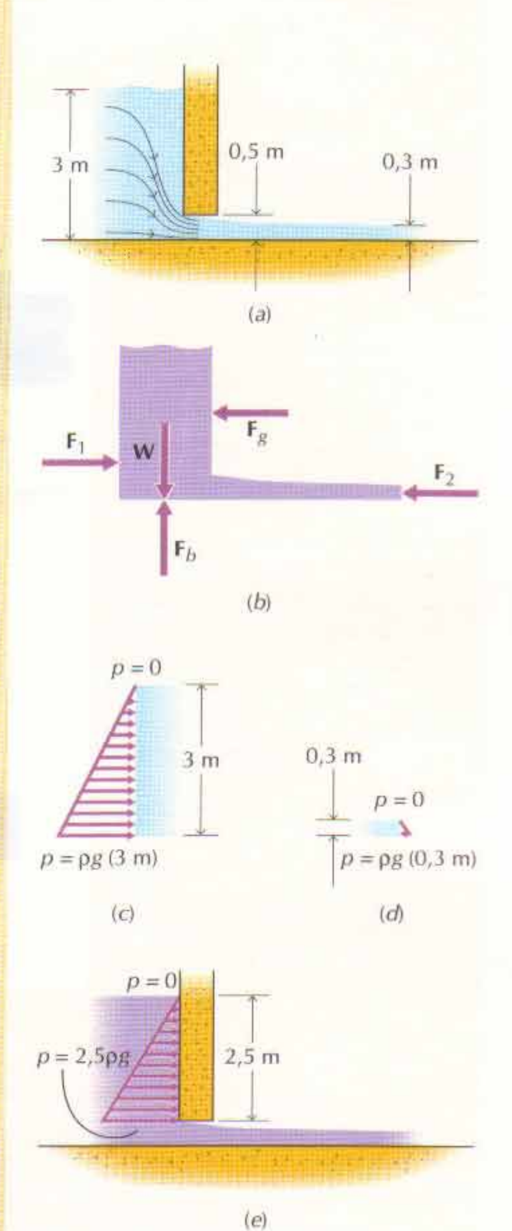


Figura 19-34

Se desvía un chorro de agua ($\gamma = \rho g = 9810\ \mathrm{N/m^3}$) mediante un álabe, según se indica en la figura 19-35*a*. El chorro de agua tiene una velocidad absoluta de 10 m/s y un diámetro de 25 mm. Si el ángulo de desviación del álabe es de 50°, determinar la fuerza horizontal **P** necesaria para mover el álabe hacia la izquierda con celeridad constante de 3 m/s.

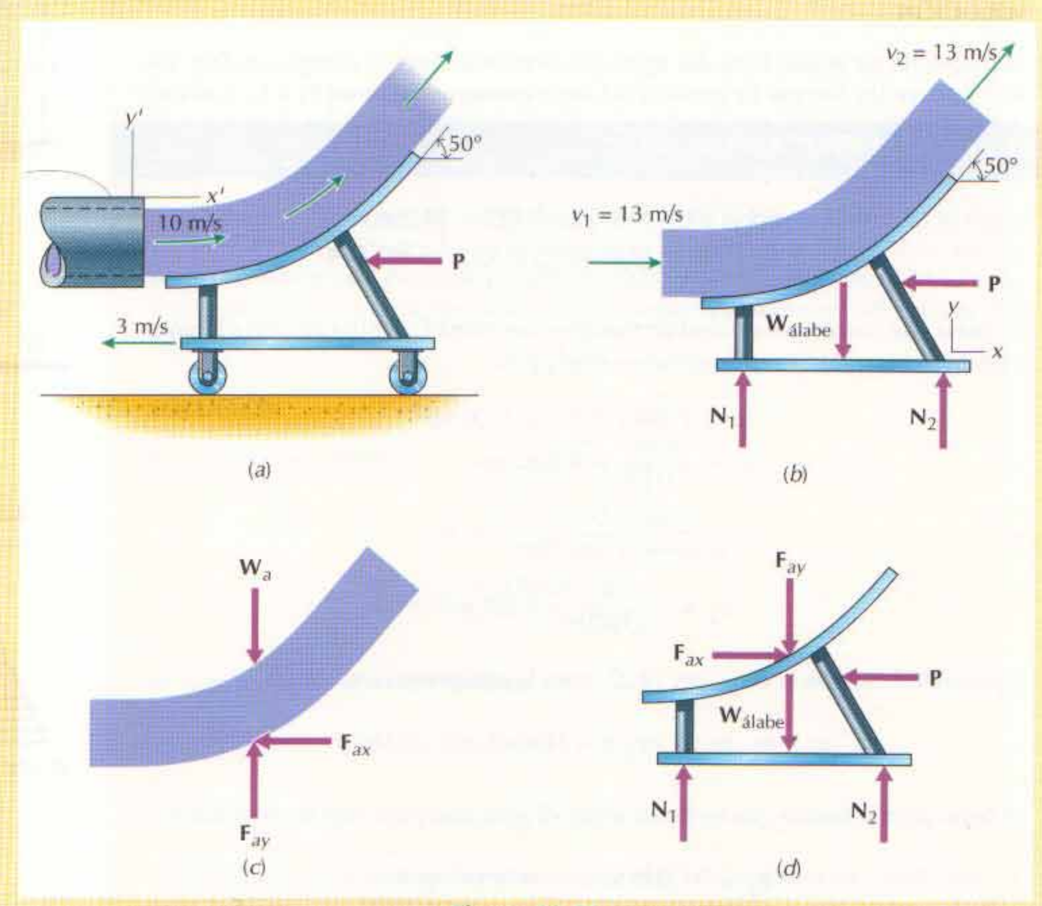


Figura 19-35

SOLUCIÓN

En un sistema de coordenadas que se mueva hacia la izquierda con el álabe (fig. 19-35*b*), la circulación es estacionaria y será aplicable la ecuación 19-27. En este sistema de coordenadas, el agua parece acercarse al álabe con una celeridad de 13 m/s y la masa que circula por unidad de tiempo será

$$\rho Q = \rho v_1 A_1 = (1000)(13)\left(\frac{\pi}{4}\right)(0{,}025)^2 = 6{,}381\ \mathrm{kg/s}$$

En los problemas de chorro libre, como éste, la celeridad del agua que sale del álabe es la misma que la del agua que llega a él, 13 m/s. Por tanto, aplicando al diagrama de sólido libre de la figura 19-35*c* la ecuación 19-27 (en lo que respecta a la componente *x*) se tiene la fuerza que el álabe ejerce sobre el agua

$$-F_{ax} = \rho Q(v_{2x} - v_{1x}) = (6{,}381)(13\cos 50° - 13)$$
$$\mathbf{F}_{ax} = 29{,}6\ \mathrm{N} \leftarrow \quad \text{sobre el agua}$$

El agua ejerce una fuerza de igual módulo y dirección, pero sentido opuesto, sobre el álabe

$$\mathbf{F}_{ax} = 29{,}6 \text{ N} \longrightarrow \quad \text{sobre el álabe}$$

Por último, aplicando al álabe la ecuación de equilibrio se tiene la fuerza necesaria para mantener al álabe en movimiento hacia la izquierda con celeridad constante

$$\mathbf{P} = 29{,}6 \text{ N} \longleftarrow \quad \text{sobre el álabe}$$ Resp.

PROBLEMA EJEMPLO 19.14

Un trineo de 1000 kg movido por propulsión a chorro descansa sobre una pista horizontal. Su motor quema combustible a razón de 15 kg/s y la velocidad del gas expulsado relativa al trineo es de 3500 m/s. Si 200 kg del peso inicial del trineo corresponden al combustible, ignórense las resistencias aerodinámicas y determínese:

a. La aceleración inicial del trineo.
b. El empuje que el motor ejerce sobre el trineo.
c. La velocidad y aceleración del trineo un instante antes de que se apague el chorro motor.

SOLUCIÓN

a. Como sobre el trineo no se ejercen fuerzas exteriores en la dirección horizontal, la ecuación 19-19 da

$$R_x = 0 = ma_x - \dot{m}v_{a/m}$$

donde $m = 1000 + \dot{m}\,t$, $\dot{m} = 15$ kg/s y $v_{a/m} = -3500$ m/s. Despejando la aceleración inicial ($t = 0$) se tiene

$$a_x = \frac{-15}{1000}(-3500) = 52{,}5 \text{ m/s}^2 = 5{,}35 \text{ g}$$ Resp.

b. El empuje sobre el trineo viene dado por la ecuación 19-31

$$P = \dot{m}v_{a/m} = (-15)(-3500) = 52\,500 \text{ N}$$ Resp.

c. La masa del trineo en el instante en que se ha agotado el combustible será 800 kg. Entonces, la aceleración será

$$a_x = \frac{-15}{800}(-3500) = 65{,}6 \text{ m/s}^2 = 6{,}69 \text{ g}$$ Resp.

La velocidad del trineo se obtendrá integrando la aceleración

$$\frac{dv}{dt} = a_x = \frac{-15}{1000-15t}(-3500)$$

lo cual da

$$v(t) = 3500 \ln\left(\frac{1000}{1000 - 15t}\right)$$

El motor habrá quemado los 200 kg de combustible en 200 / 15 = 13,33 s. Por tanto, la celeridad del trineo cuando se apague el motor será

$$v(13{,}33) = 781 \text{ m/s} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

19-79* Por el codo de 90° de una tubería de 25 mm de diámetro circula agua ($\gamma = \rho g = 9810$ N/m^3) con un caudal constante de $Q = 0{,}1274$ m^3/min (fig. P19-79). Si la presión en el agua es constante e igual a 13,79 kPa, determinar la fuerza (en módulo, dirección y sentido) que sobre la tubería ejerce el agua que por ella circula. (Supóngase que el codo está en un plano horizontal y despréciese el peso del agua contenida en la tubería.)

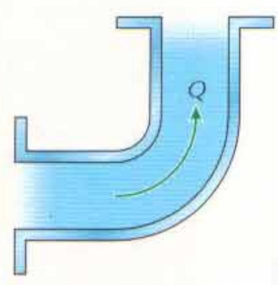


Figura P19-79

19-80* Por una tubería de 40 mm de diámetro circula agua ($\rho = 1000$ kg/m^3) con un caudal constante $Q = 0{,}15$ m^3/min (fig. P19-80). A la tubería se une una tobera que tiene un diámetro de salida de 20 mm y desvía la circulación del agua un ángulo de 30°. Si la tobera está unida a la tubería mediante cuatro pernos y la presión en la tubería inmediatamente antes de la tobera es de 29 680 Pa, determinar la tensión media en los cuatro pernos. (Supóngase que el codo está en un plano horizontal y despréciese el peso del agua contenida en la tobera.)

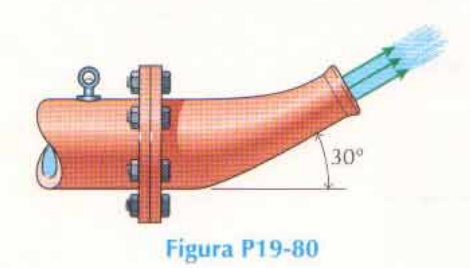


Figura P19-80

19-81 Si la tobera del Problema Ejemplo 19-11 formase un ángulo de 180° (en un plano horizontal) según se indica en la figura P19-81, determinar la tensión media en cada uno de los seis pernos que unen la tobera a la tubería.

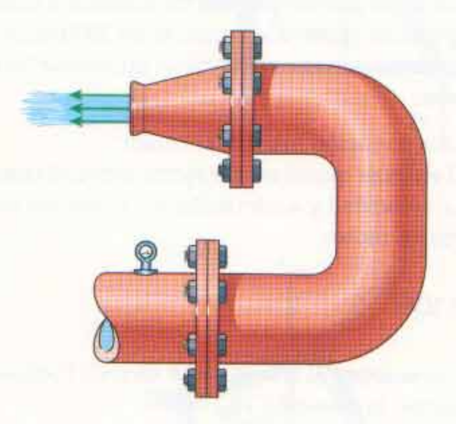


Figura P19-81

19-82* Por encima de un vertedero de pared delgada (umbral agudo) circula agua ($\rho = 1000$ kg/m^3) con un caudal constante $Q = 3{,}33$ m^3/s, según se indica en la figura P19-82. Si el canal tiene una anchura de 5 m, determinar la componente horizontal de la fuerza que el agua ejerce sobre el vertedero.

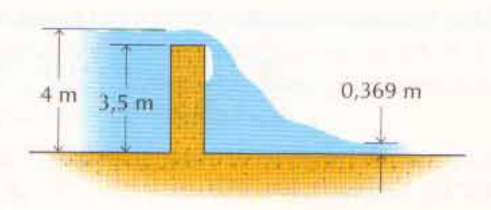


Figura P19-82

19-83 Bajo una compuerta inclinada circula agua ($\gamma = \rho g = 9810$ N/m^3) con un caudal constante $Q = 3{,}54$ m^3/s, según se indica en la figura P19-83. La anchura del canal es de 3 m. Sabiendo que la fuerza que el agua ejerce contra la compuerta es perpendicular a ésta, determinar el módulo de dicha fuerza.

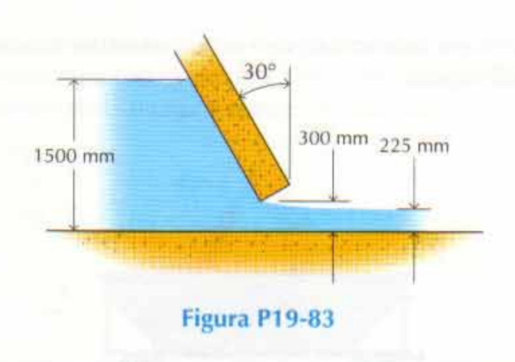


Figura P19-83

19-84 Un álabe desvía 50° un chorro de agua (ρ = 1000 kg/m^3) de 25 mm de diámetro, según se indica en la figura P19-84. La masa combinada del álabe y su base es de 10 kg. Si el coeficiente de rozamiento estático entre la base y el suelo es μ_s = 0,25, determinar la máxima velocidad del chorro para la cual no se mueva el álabe.

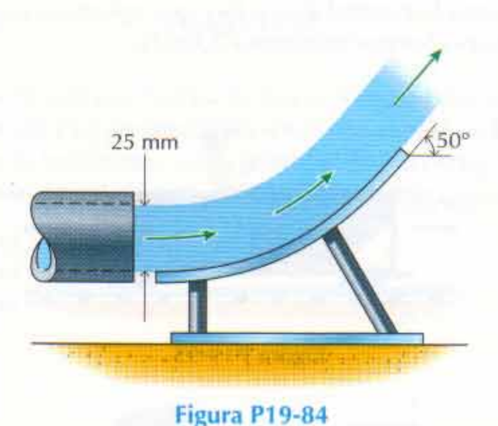


Figura P19-84

19-85* Un juguete consiste en una cabeza de payaso unida a una manguera que lanza un chorro de agua ($\gamma = \rho g$ = 9810 N/m^3) verticalmente hacia arriba suspendiendo un gorro de forma cónica, según se indica en la figura P19-85. El peso del gorro es de 2,5 N y el agua al salir de él forma un ángulo de 30° con la vertical. Si el diámetro del chorro que penetra en el gorro es de 12,5 mm, determinar qué caudal es necesario para sostenerlo en el aire.

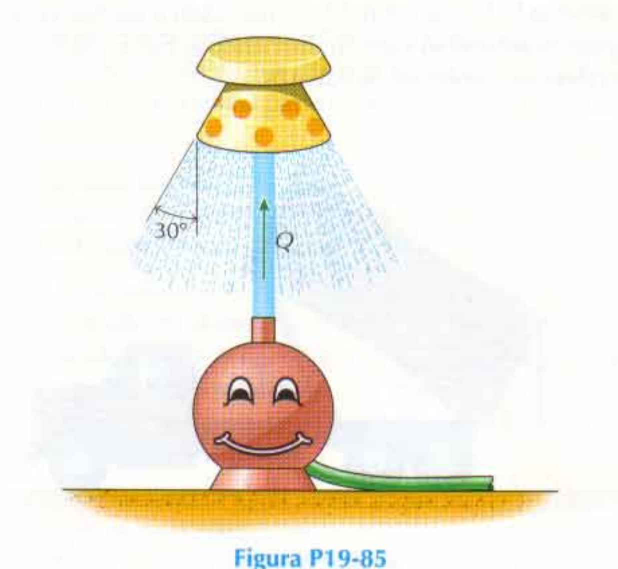


Figura P19-85

19-86 Un chorro de agua (ρ = 1000 kg/m^3) de 40 mm de diámetro incide en el centro de una placa montada sobre cuatro muelles iguales (k = 1500 N/m cada uno) según se indica en la figura P19-86. Si el chorro incidente lleva una celeridad de 5 m/s y el agua que sale de la placa lo hace radialmente hacia afuera (perpendicularmente a la dirección del chorro incidente), determinar el acortamiento de los muelles debido a la fuerza del agua.

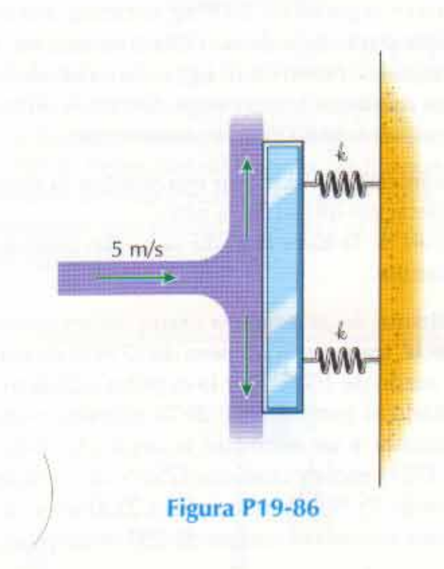


Figura P19-86

19-87* El ventilador de sobremesa de la figura P19-87 expulsa un chorro de aire ($\gamma = \rho g$ = 11,77 N/m^3) de 25 cm de diámetro que tiene una celeridad de 6 m/s. Si el ventilador pesa 25 N, determinar el mínimo coeficiente de rozamiento entre ventilador y mesa para el cual no se deslice aquél sobre ésta.

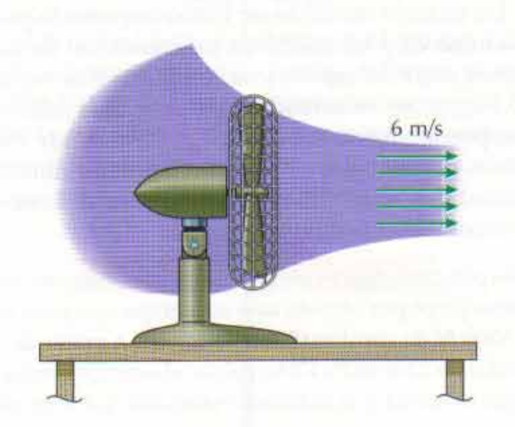


Figura P19-87

19-88* Un helicóptero de 2300 kg lanza verticalmente hacia abajo un chorro de aire de 10 m de diámetro. Determinar qué celeridad ha de tener este aire ($\rho = 1{,}225$ kg/m^3) cuando el helicóptero está suspendido.

19-89 Una nave espacial que pesa 100 kN aumenta su celeridad orbital mediante un motor de maniobra. Éste quema combustible a razón de 250 N/s y la velocidad de los gases expulsados relativa a la nave es de 3000 m/s. Si la celeridad inicial de la nave era de 7800 m/s, determinar:

a. El empuje inicial que el motor ejerce sobre la nave.
b. La aceleración inicial de la nave.
c. La velocidad de la nave al cabo de 10 s de funcionamiento del motor.

19-90* Una nave espacial de 2200 kg enciende sus cohetes de retropropulsión para reducir su celeridad orbital. El motor quema combustible a razón de 10 kg/s y la velocidad de los gases expulsados relativa a la nave es de 2700 m/s. Si la celeridad inicial de la nave era de 8000 m/s, determinar:

a. El empuje inicial que el motor ejerce sobre la nave.
b. La desaceleración inicial de la nave.
c. La velocidad de la nave cuando se hayan quemado 800 kg de combustible.

19-91 La cápsula de la primera etapa de un cohete de dos pesa 500 N vacía, transporta un peso de 3750 N de combustible que quema a razón de 100 N/s y lo expulsa a 2100 m/s. Cuando se ha agotado el combustible de la primera etapa, se desprende su cápsula y se enciende la segunda. Esta segunda cápsula pesa 375 N vacía y contiene 2750 N de combustible que quema a razón de 75 N/s y lo expulsa a 2100 m/s. Si se utiliza este cohete para lanzar un cuerpo de 250 N de peso, determinar:

a. El empuje inicial que ejerce sobre el cuerpo.
b. La velocidad del cohete cuando se desprende de la primera etapa en el instante en que se agota.
c. La máxima velocidad que alcanza el cuerpo que se lanza.

19-92* Un modelo reducido de trineo impulsado por cohete tiene una masa de 5 kg, cuatro de los cuales son de combustible. El trineo parte del reposo y su combustible se expulsa a razón de 0,5 kg/s con velocidad de 150 m/s. Si la resistencia del aire es proporcional a su celeridad, $F_R = 0{,}3v$, donde v se expresa en metros por segundo y F_R en newton, determinar la máxima celeridad que alcanzará el trineo cuando se lance por una pista horizontal exenta de rozamiento.

19-93 Supóngase que el cohete de dos etapas del problema 19-91 se sustituye por otro de una sola etapa que pesa vacío 875 N, lleva 6500 N de combustible y lo quema a razón de 100 N/s expulsándolo a 2100 m/s. Determinar el empuje inicial sobre el cuerpo que se lanza y la máxima velocidad que éste alcanza.

19-94* Se carga un vagón de 18 000 kg con grano a razón de 2000 kg/s (fig. P19-94). Si el grano llega al vagón según un ángulo de 60° y una celeridad de 6 m/s, determinar la aceleración inicial del vagón.

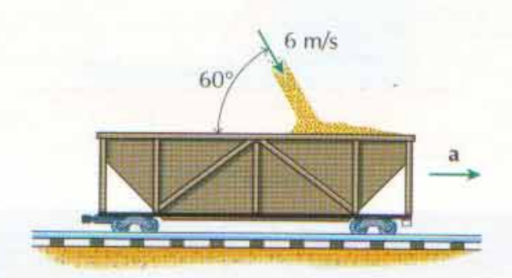


Figura P19-94

19-95 Un vagón que pesa 200 kN se carga con grano a razón de 25 kN/s (fig. P19-95). Si el grano cae verticalmente, determinar la fuerza horizontal **P** que hay que aplicar al vagón para que se mueva horizontalmente a 0,3 m/s.

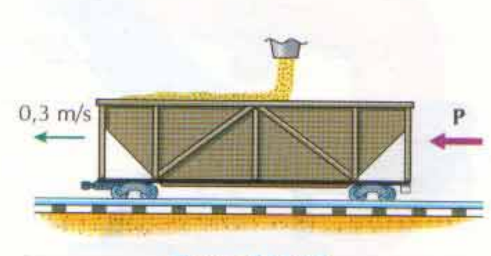


Figura P19-95

19-96* Un volquete vierte arena ($\rho = 1860$ kg/m^3) a razón de 0,7 m^3/s (fig. P19-96). La masa inicial del camión con la arena es de 20 000 kg. Si la arena se descarga según un ángulo de 40° sobre la horizontal y una celeridad de 5 m/s relativa al camión, determinar la fuerza (en módulo, dirección y sentido) necesaria para mantener al camión moviéndose hacia adelante con una celeridad constante de 0,6 m/s.

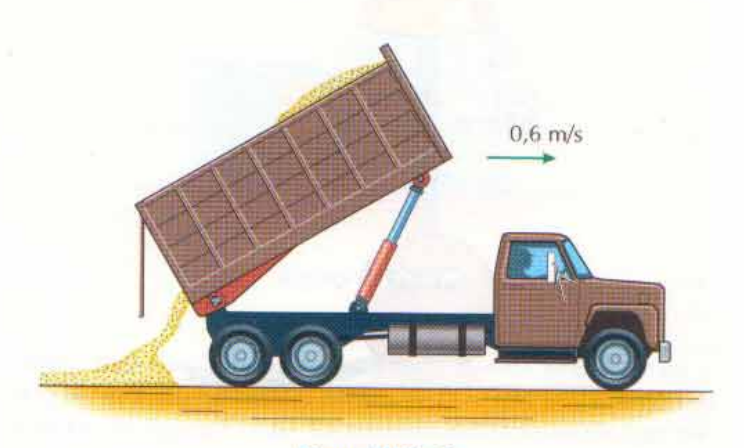


Figura P19-96

19-97 Se tira hacia arriba de una cadena que pesa 8,3 N/m con una celeridad constante de 2,4 m/s (fig. P19-97) Determinar el módulo de la fuerza **F** con que se tira cuando:

a. $y = 0{,}3$ m
b. $y = 1{,}2$ m
c. $y = 2{,}4$ m.

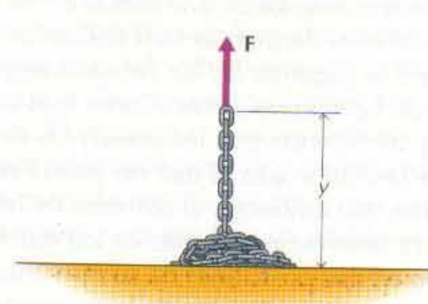


Figura P19-97

19-98* Se tira de una cadena de 8 m de longitud que tiene una masa total de 4 kg arrastrándola sobre una superficie horizontal exenta de rozamiento a una celeridad de 2 m/s (fig. P19-98). Determinar el módulo de la fuerza **F** de tracción cuando:

a. $y = 1$ m
b. $y = 3$ m
c. $y = 6$ m

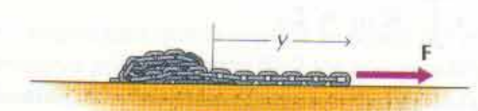


Figura P19-98

19-99 Se eleva una cadena de 4,2 m de longitud cuyo peso total es de 105 N tirando de ella con una fuerza constante $F = 45$ N (fig. P19-97). Si la cadena parte del reposo cuando $y = 0{,}3$ m, determinar:

a. Su celeridad cuando $y = 1{,}5$ m.
b. La máxima celeridad que alcanzará.
c. La máxima altura que alcanzará.

19-100 Una cadena de 6 m de longitud y densidad 0,5 kg/m está amontonada en el suelo (fig. P19-100). Su extremo superior está unido a un hilo ligero que pasa sobre una polea pequeña y exenta de rozamientos; del otro extremo del hilo pende un bloque de 1,5 kg. Si se suelta el sistema a partir del reposo con $y = 1$ m, determinar:

a. La máxima celeridad hacia arriba $\dot{y}$ que alcanzará el extremo superior de la cadena.
b. La máxima altura $y_{máx}$ que alcanzará este extremo.

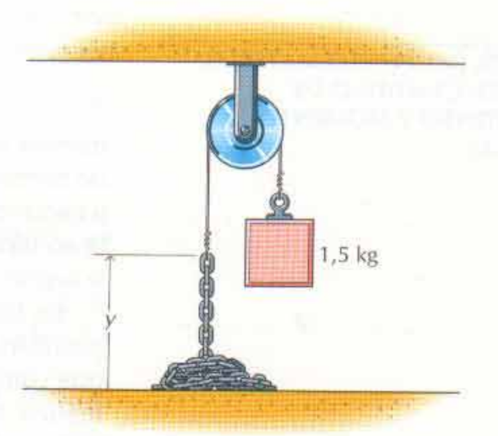


Figura P19-100

19-101 Una cadena de 7,2 m de longitud y que pesa 8,3 N/m está amontonada en el suelo (fig. P19-101). Su extremo superior está unido a un hilo ligero que pasa sobre una polea pequeña y exenta de rozamientos situada 6 m por encima del suelo; del otro extremo del hilo pende un bloque que pesa 40 N. Si se suelta el sistema a partir del reposo con $h = 4{,}5$ m e $y = 0{,}3$ m, determinar qué celeridad llevará el bloque inmediatamente antes de llegar al suelo.

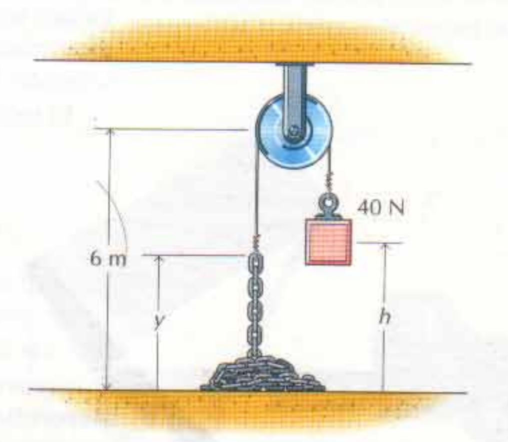


Figura P19-101

19-102* Una cadena larga y uniforme, de densidad 0,25 kg/m está apilada sobre una superficie horizontal según se indica en la figura P19-102. Si uno de sus extremos cae por un orificio, determinar la celeridad $\dot{y}$ de dicho extremo cuando $y = 3$ m. (Supóngase que todos los eslabones están en reposo hasta el momento en que caen a través del orificio.

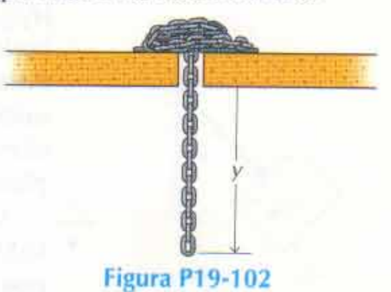


Figura P19-102

RESUMEN

Todo el estudio de la Cinética se basa en la segunda ley de Newton del movimiento. En los capítulos 15 y 16 se utilizó esta ley para relacionar directamente las fuerzas que se ejercen sobre puntos materiales y cuerpos rígidos con las aceleraciones que en ellos originan. Cuando se quiera tener información acerca de la aceleración o cuando se quiera conocer el valor de una fuerza en un instante, la segunda ley de Newton suele ser el método de más fácil aplicación.

En los capítulos 17 y 18 se integró la segunda ley de Newton respecto a la posición, obteniéndose el teorema de las fuerzas vivas. Como éste no es sino una combinación de la segunda ley de Newton con los principios de la Cinemática, no habrá ningún problema resoluble con él que no pueda resolverse utilizando la segunda ley de Newton. Sin embargo, el teorema de las fuerzas vivas resulta especialmente útil para resolver problemas en los que haya que relacionar la celeridad de un cuerpo en dos posiciones de su movimiento y las fuerzas que intervienen se puedan expresar en función de la posición de dicho cuerpo.

En este capítulo, se ha integrado la segunda ley de Newton respecto al tiempo para obtener el teorema de la cantidad de movimiento. Las ecuaciones que se obtienen resultan útiles para resolver problemas en los que haya que relacionar la celeridad de un cuerpo en dos intantes dados y las fuerzas que intervienen se puedan expresar en función del tiempo. El teorema de la cantidad de movimiento y el del momento cinético resultan particularmente útiles en la resolución de problemas de choque de cuerpos y de sistemas de masa variable.

El teorema de la cantidad de movimiento se expresa en la forma

$$\mathbf{L}_i + \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{R}\, dt = \mathbf{L}_f$$

La cantidad de movimiento final $\mathbf{L}_f = (m\mathbf{v})_f$ *de un punto material es la suma vectorial de su cantidad de movimiento inicial* $\mathbf{L}_i = (m\mathbf{v})_i$ *más el impulso* $\int \mathbf{R}\, dt$ *de la resultante de todas las fuerzas que se ejercen sobre el punto.* Esta ecuación es vectorial, por lo que representa tres ecuaciones escalares. Estas tres ecuaciones escalares son independientes entre sí.

El teorema del momento cinético se expresa en la forma

$$\mathbf{H}_{Oi} + \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{M}_O\, dt = \mathbf{H}_{Of} \tag{19-17}$$

es decir: *El momento cinético final* $\mathbf{H}_{Of} = [\mathbf{r}_{P/O} \times (m\mathbf{v})]_f$ *de un punto material respecto a un punto fijo O es la suma vectorial de su momento cinético inicial* $\mathbf{H}_{Oi} = [\mathbf{r}_{P/O} \times (m\mathbf{v})]_i$ *respecto a O más el impulso angular* $\int \mathbf{M}_O\, dt$ *respecto a O de la resultante de todas las fuerzas que se ejercen sobre el punto material durante el intervalo de tiempo en cuestión.* Al igual que sucedía con el teorema de la cantidad de movimiento, la ecuación 19-17 es una ecuación vectorial que representa a tres ecuaciones escalares. En los problemas planos, tan sólo la componente normal al plano proporciona información útil.

Un choque entre dos cuerpos es un suceso que tiene lugar durante un intervalo de tiempo muy corto. En él se originan fuerzas de reacción entre los cuerpos relativamente intensas a las que corresponden cambios de velocidad muy grandes de uno o ambos cuerpos.

Cuando dos partículas chocan frontalmente, la velocidad relativa de ellas antes y después del choque están relacionadas por el coeficiente de restitución

$$e = -\frac{v_{Bf} - v_{Af}}{v_{Bi} - v_{Ai}} = -\frac{(v_{B/A})_f}{(v_{B/A})_i} \qquad (19\text{-}11)$$

Cuando dos partículas chocan oblicuamente, la ecuación 19-11 relaciona las componentes normales de las velocidades relativas.

Ni el método del trabajo-energía ni los de los teoremas de la cantidad de movimiento o del momento cinético son adecuados para resolver todos los problemas. El máximo provecho de estos métodos se logra eligiendo de entre ellos el más adecuado para un problema particular o para una parte de un problema. A menudo resulta útil combinar los tres métodos, junto con la segunda ley de Newton, para resolver un problema particular.

PROBLEMAS DE REPASO

19-103* Un automóvil que pesa 16 kN y va a 72 km/h choca frontalmente con otro de peso 11 kN que está parado. En el choque, las ruedas de ambos quedan trabadas y patinan (μ_k = 0,5). Si los autos quedan pegados y se mueven conjuntamente después del choque:

a. Estimar la distancia que recorrerán después de chocar.
b. Determinar cuánta energía cinética se pierde en el choque.

19-104* Supóngase que la superficie rígida del problema 19-60 se sustituye por un carrito de 2 kg que puede rodar libremente en dirección horizontal, según se indica en la figura P19-104. Si el coeficiente de restitución vale 0,8, la pelota de 0,5 kg parte del reposo siendo h = 1 m y pasa apenas por encima de la pared en el punto más alto de su rebote, determinar las distancias b, c y d de la figura.

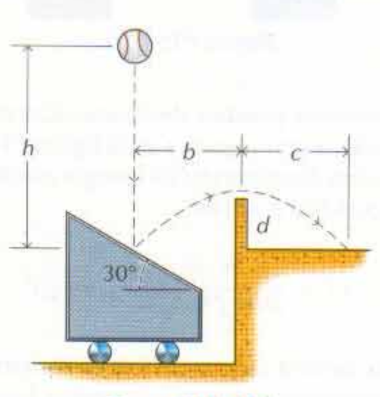


Figura P19-104

19-105 Un volquete vierte arena ($\gamma = \rho g$ = 19 kN/m^3) a razón de 0,71 m^3/s (fig. P19-105). El peso inicial del camión cargado con la arena es de 200 kN. Si se descarga la arena según un ángulo de 40° respecto a la horizontal con una celeridad de 4,5 m/s relativa al camión, determinar la aceleración inicial de éste.



Figura P19-105

19-106 Un péndulo balístico consiste en una caja de arena de 3 kg suspendida de un hilo ligero de 2 m de longitud (fig. P19-

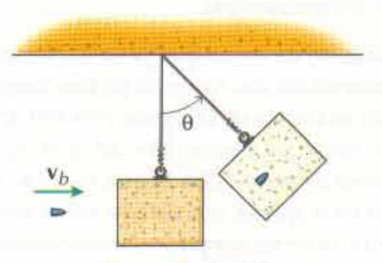


Figura P19-106

106). Una bala de 0,05 kg incide sobre la caja y queda incrustada en la arena. Si el máximo ángulo de oscilación del péndulo a continuación del impacto es de 25°, determinar:

a. La celeridad de arena y bala inmediatamente después del impacto.
b. La celeridad inicial v_i de la bala.

19-107* Una esfera A de peso 10 N pende inmóvil de un hilo inextensible, según se indica en la figura P19-107, cuando choca con ella otra esfera igual B que rueda sobre la superficie horizontal. La distancia del techo al centro de la esfera A es de 0,9 m y dicho centro se halla inicialmente al nivel de la superficie horizontal. Si el coeficiente de restitución vale 0,8, determinar:

a. El ángulo que formará la velocidad final de la esfera B con la horizontal.
b. El máximo ángulo θ_A que describirá la esfera A a consecuencia del choque.

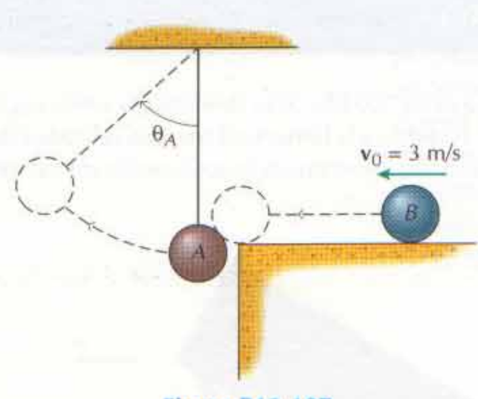


Figura P19-107

19-108 El motor de maniobra de una nave espacial de 1800 kg quema combustible a razón de 10 kg/s y la velocidad de salida de los gases expulsados relativa a la nave es de 2700 m/s. Inicialmente, la nave se halla en una órbita circular de 160 km con una velocidad de 7810 m/s. Si el satélite utiliza su motor para elevar su celeridad a 8190 m/s, determinar:

a. El empuje inicial que el motor ejerce sobre la nave.
b. El tiempo que deberá estar en marcha el motor si se suponen constantes la masa de la nave y el empuje.
c. El tiempo que deberá estar en marcha el motor si se tiene en cuenta la disminución de masa que sufre la nave al irse quemando el combustible.

19-109* Un saquito de arena que pesa 50 N oscila en un plano vertical x-z suspendido del extremo de una cuerda de 1,5 m de longitud, según se indica en la figura P19-109. Cuando se halla en del extremo de su oscilación ($\theta = 20°$ y $\dot{\theta} = 0$), recibe el impacto de una bala de peso 0,584 N que va a 247,5 m/s en la dirección y. Si la bala queda incrustada en la arena y la cuerda permanece recta, determinar para el movimiento subsiguiente:

a. El máximo ángulo $\theta_{máx}$ que formará la cuerda con la vertical.
b. La velocidad del saquito cuando $\theta = \theta_{máx}$.
c. La tensión de la cuerda cuando $\theta = \theta_{máx}$.

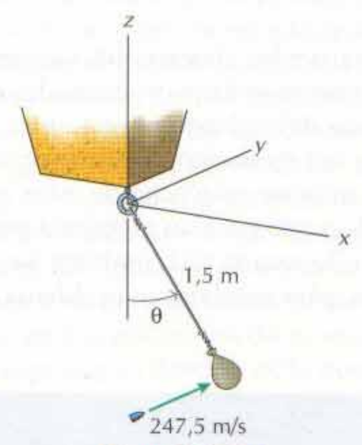


Figura P19-109

19-110 Dos cuentas pueden deslizarse libremente por una varilla horizontal, según se indica en la figura P19-110. Demostrar que las velocidades finales de dichas cuentas vienen dadas por

$$v_{Af} = v_{Ai} - \frac{(1+e)\,m_B}{m_A + m_B}(v_{Ai} - v_{Bi})$$

$$v_{Bf} = v_{Bi} - \frac{(1+e)\,m_A}{m_A + m_B}(v_{Ai} - v_{Bi})$$

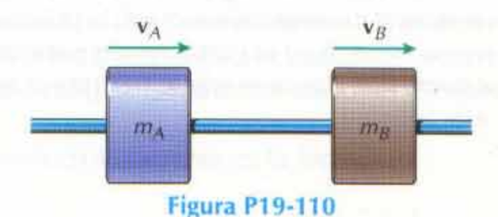


Figura P19-110

19-111 Dos cuentas pueden deslizarse libremente por una varilla horizontal, según se indica en la figura P19-110. Demostrar que la máxima disminución de energía cinética del sistema (lo cual corresponde a $e = 0$) es

$$\Delta T = \frac{1}{2}\left(\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}\right)(v_{Ai} - v_{Bi})^2$$

19-112* Se tira de una cadena de 8 m de longitud y densidad 0,5 kg/m arrastrándola sobre una superficie horizontal exenta de rozamiento mediante una fuerza de tracción $F = 18$ N (fig. P19-112). Si la cadena parte del reposo cuando $y = 0,5$ m, determinar su celeridad cuando quede extendida del todo.

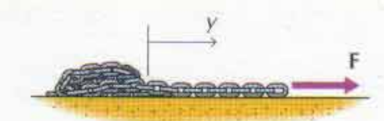


Figura P19-112

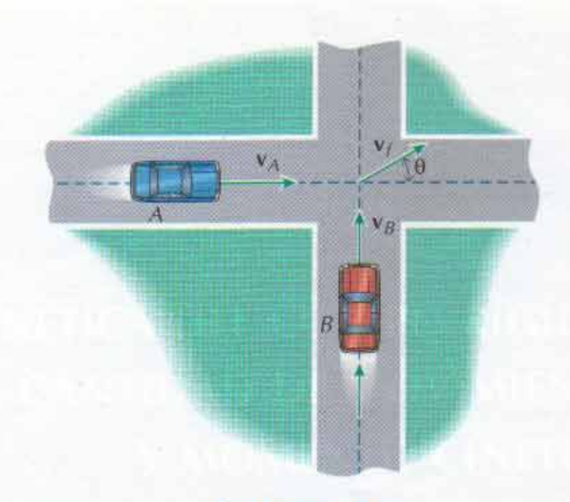


Figura P19-113

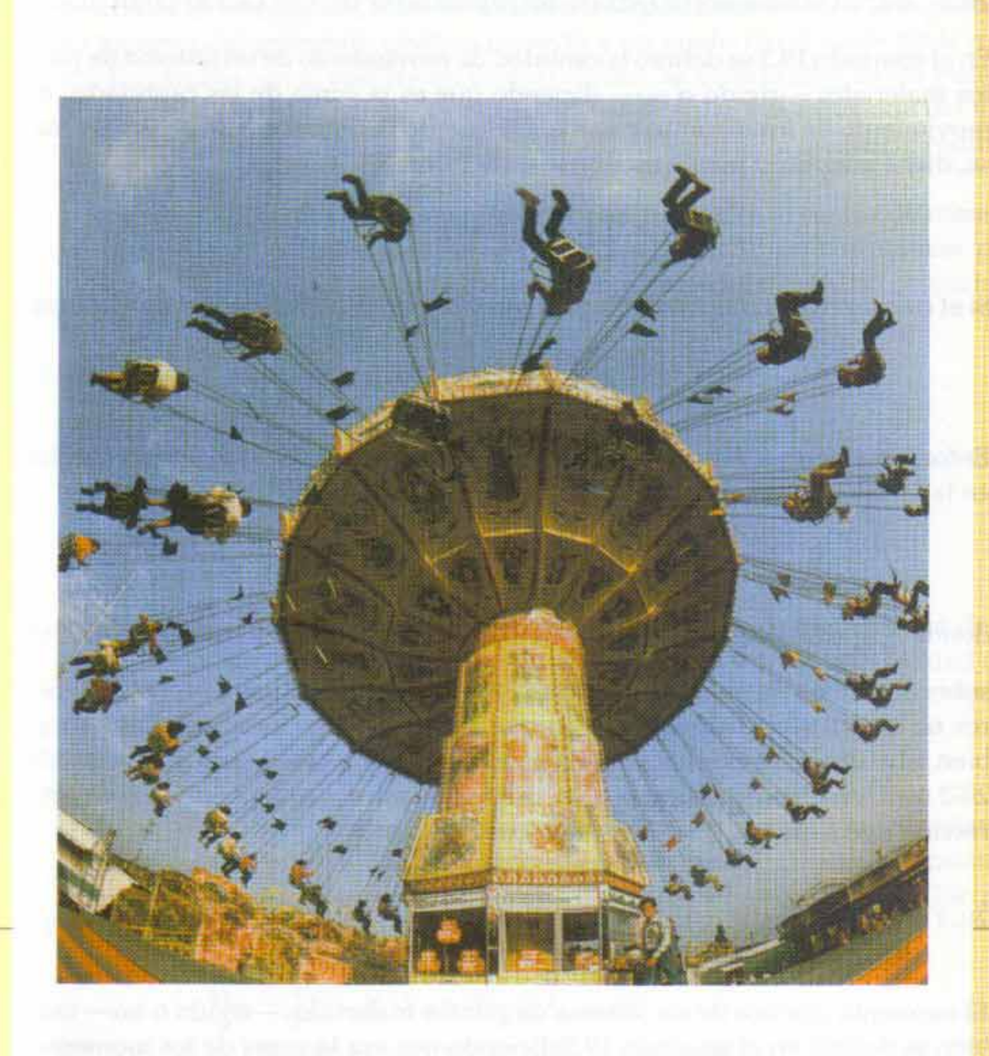
19-113 Dos automóviles chocan en un cruce, según se indica en la figura P19-113. El auto A pesa 12,5 kN y lleva una celeridad inicial $v_A = 32$ km/h mientras que el auto B pesa 15 kN y lleva una celeridad inicial $v_B = 24$ km/h. En el choque, las ruedas de los autos quedan trabadas y patinan ($\mu_k = 0{,}2$). Si los autos quedan pegados y se mueven conjuntamente después del choque, determinar:

a. La celeridad v_f y la dirección θ de los autos después del choque.
b. La distancia que recorrerán patinando los autos después del choque hasta detenerse.

19-114* Un vagón de ferrocarril A de 50 000 kg rueda con una celeridad inicial de 3 m/s por una vía recta y horizontal. Choca y queda acoplado con un segundo vagón B de masa 80 000 kg que llevaba una celeridad inicial de 2 m/s. Determinar la velocidad final común de ambos si el vagón B se movía inicialmente:

a. En el mismo sentido que el vagón A.
b. En sentido opuesto.

20 CINÉTICA DEL CUERPO RÍGIDO: IMPULSO, CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y MOMENTO CINÉTICO



Cuando los columpios de una rueda de parque de atracciones se van para fuera aumenta el momento de inercia de sistema. Por tanto, la conservación del momento cinético hará que la velocidad angular disminuya, a menos que se aplique un par de rotor.

20.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se dedujeron los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético para un punto material. Se vio que las ecuaciones correspondientes eran integrales primeras de las ecuaciones del movimiento respecto al tiempo. Las ecuaciones resultantes relacionan las fuerzas que se ejercen sobre el punto material, la velocidad de éste y el tiempo. Por tanto, los teoremas mencionados resultan particularmente útiles para resolver problemas en los que deban relacionarse las velocidades de un cuerpo correspondientes a dos instantes diferentes y se puedan expresar en función del tiempo las fuerzas que intervienen.

Los teoremas antes mencionados se han aplicado también a un sistema cualquiera de puntos materiales en interacción. Todos esos resultados son aplicables inmediatamente a un cuerpo rígido ya que éste es un sistema de puntos materiales en interacción. Lo único que queda por hacer es simplificar los resultados generales utilizando la ecuación de la velocidad relativa que relacione las velocidades de los puntos en un cuerpo rígido.

20.2 IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE UN CUERPO RÍGIDO

En el apartado 19.3 se definió la cantidad de movimiento de un sistema de puntos materiales —rígido o no— diciendo que es la suma de las cantidades de movimiento de los distintos puntos. Utilizando la definición de centro de masa, dicha magnitud puede escribirse en la forma

$$\mathbf{L} = \sum_{\ell} \mathbf{L}_{\ell} = \sum_{\ell} (m\mathbf{v})_{\ell} = m\mathbf{v}_G$$

Si el cuerpo rígido fuese continuo, la suma debería sustituirse por una integral

$$\mathbf{L} = \int d\mathbf{L} = \int \mathbf{v}\, dm = m\mathbf{v}_G \tag{20-1}$$

Entonces, el teorema de la cantidad de movimiento (ec. 19-9) se podría escribir en la forma

$$m(\mathbf{v}_G)_i + \sum_{\ell} \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{R}_{\ell}\, dt = m(\mathbf{v}_G)_f \tag{20-2}$$

donde $\sum_{\ell} \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{R}_{\ell}\, dt$ es el impulso de todas las fuerzas exteriores que se ejercen sobre el sistema de puntos materiales y los impulsos debidos a fuerzas interiores no tienen efecto alguno, por lo que podemos prescindir de ellos. Ahora bien, el sistema de puntos materiales es un sistema cualquiera y la ecuación 20-2 será igualmente aplicable a un sistema de puntos independientes en interacción que a los que constituyen un cuerpo rígido.

20.3 IMPULSO ANGULAR Y MOMENTO CINÉTICO DE UN CUERPO RÍGIDO EN MOVIMIENTO PLANO

El momento cinético de un sistema de puntos materiales —rígido o no— también se definió en el apartado 19.5 diciendo que era la suma de los momentos cinéticos de los distintos puntos materiales. En el caso de un sistema cualquiera

de puntos en interacción, visto en el apartado 19.5, ello nos llevaba a los enunciados diferenciales del teorema del momento cinético (ecs. 19-19 y 19-22):

$$\sum_{\ell} \mathbf{M}_{O\ell} = \frac{d}{dt}\mathbf{H}_O \qquad \text{y} \qquad \sum_{\ell} \mathbf{M}_{G\ell} = \frac{d}{dt}\mathbf{H}_G \tag{20-3}$$

y a los enunciados integrales del teorema del momento cinético (ecs. 19-20 y 19-23):

$$(\mathbf{H}_O)_i + \int_{t_i}^{t_f} \sum_{\ell} \mathbf{M}_{O\ell}\, dt = (\mathbf{H}_O)_f \tag{20-4a}$$

$$(\mathbf{H}_G)_i + \int_{t_i}^{t_f} \sum_{\ell} \mathbf{M}_{G\ell}\, dt = (\mathbf{H}_G)_f \tag{20-4b}$$

donde $\mathbf{H} = (\Sigma \mathbf{r}_\ell \times m\mathbf{v}_\ell)$, O es un punto fijo y G es el centro de masa del sistema de puntos materiales. Este sistema es arbitrario, por lo que las ecuaciones 20-3 y 20-4 también podrán aplicarse al caso en que los puntos constituyan un cuerpo rígido.

El momento cinético de un punto material se puede calcular respecto a un punto cualquiera, fijo o móvil. En el caso de un sistema arbitrario de puntos materiales en interacción, éstos se mueven independientemente y la expresión del teorema del momento cinético respecto a un punto fijo O suele ser la más útil. En cambio, en el caso de un cuerpo rígido, las velocidades de los puntos del cuerpo están relacionadas por la velocidad angular y la expresión del teorema del momento cinético respecto al centro de masa es la que suele resultar más útil.

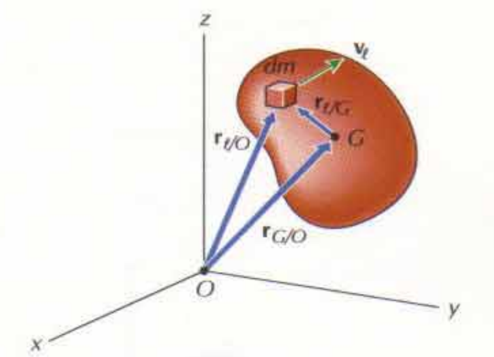


Figura 20-1

Sea $\mathbf{r}_{\ell/G}$ la posición del elemento de masa dm relativa al centro de masa G del cuerpo rígido representado en la figura 20-1. Si representamos por $\mathbf{v}_\ell = \dot{\mathbf{r}}_{\ell/O}$ la velocidad absoluta de dm, el momento cinético de dm respecto a G es el momento de la cantidad de movimiento

$$d\mathbf{H}_G = (\mathbf{r}_{\ell/G} \times \mathbf{v}_\ell)\, dm$$

Entonces, el momento cinético de todo el cuerpo rígido será

$$\mathbf{H}_G = \int d\mathbf{H}_G = \int (\mathbf{r}_{\ell/G} \times \mathbf{v}_\ell)\, dm$$
$$= \int \mathbf{r}_{\ell/G} \times (\mathbf{v}_G + \mathbf{v}_{\ell/G})\, dm$$

donde se ha sustituido la velocidad absoluta por la velocidad relativa de la ecuación $\mathbf{v}_\ell = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_{\ell/G} = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\ell/G}$ de la ecuación y $\mathbf{v}_G$ es la velocidad del centro de masa del cuerpo rígido.

20.3.1 Movimiento plano de un cuerpo rígido

El el caso del movimiento plano de un cuerpo rígido, la velocidad angular es perpendicular al plano del movimiento $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$. Por tanto, el momento cinético de un cuerpo rígido respecto a un eje que pase por su centro de masa G se podrá escribir en la forma

$$\mathbf{H}_G = \int \mathbf{r}_{\ell/G} \times (\mathbf{v}_G + \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{\ell/G})\, dm$$
$$= \left(\int \mathbf{r}_{\ell/G}\, dm\right) \times \mathbf{v}_G + \int \mathbf{r}_{\ell/G} \times (\omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{\ell/G})\, dm$$

En el primer término, la velocidad $\mathbf{v}_G$ del centro de masa se ha sacado de la integral porque es la misma para todo elemento de masa dm. Ahora bien, la integral $\int \mathbf{r}_{\ell/G}\, dm$ es nula en virtud de la definición de centro de masa ya que el vector de posición $\mathbf{r}_{\ell/G}$ tiene su origen en el centro de masa.

En el otro término, hagamos $\mathbf{r}_{\ell/G} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Entonces, sacando de la integral la constante ω y desarrollando el doble producto vectorial, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_G &= -\,\omega\int xz\ dm\ \mathbf{i} - \omega\int yz\ dm\ \mathbf{j} + \omega\int (x^2+y^2)\ dm\ \mathbf{k}\\ &= -\,\omega I_{Gxz}\ \mathbf{i} - \omega I_{Gyz}\ \mathbf{j} + \omega I_{Gz}\ \mathbf{k}\end{aligned} \tag{20-5}$$

donde $I_{Gz} = \int (x^2 + y^2)\ dm$ es el momento de inercia respecto al eje z e $I_{Gxz} = \int xz\ dm$ e $I_{Gyz} = \int yz\ dm$ son los productos de inercia del cuerpo rígido respecto a planos que pasan por el centro de masa.[1] Si el cuerpo rígido fuese simétrico respecto al plano del movimiento (p.e., una placa de grosor uniforme en la dirección z o un cilindro de revolución con su eje paralelo al eje z) o si el eje z que pasa por G es un eje de simetría,[2] los productos de inercia I_{Gxz} e I_{Gyz} serán nulos y

$$\mathbf{H}_G = \omega I_G \mathbf{k} \tag{20-6}$$

donde $I_G = I_{Gz}$ es el momento de inercia del cuerpo rígido respecto a un eje que pasa por el centro de masa G y que es perpendicular al plano del movimiento. Entonces, sustituyendo por la ecuación 20-6 en la 20-4*b* tenemos la forma diferencial de la ecuación que nos da el teorema del momento cinético de un cuerpo rígido en movimiento plano

$$\Sigma\mathbf{M}_G = \frac{dI_G\omega}{dt}\mathbf{k} = I_G\alpha\mathbf{k} \tag{20-7}$$

donde $\Sigma\mathbf{M}_G$ es la suma de los momentos de las fuerzas exteriores respecto al centro de masa G. En el caso de que las fuerzas estén contenidas en el plano del movimiento, el momento $\mathbf{M}_G = M_G\mathbf{k}$ y las componentes x e y de la ecuación 20-7 se satisfarán idénticamente.[3] Entonces, para la componente z de la ecuación 20-7 podremos escribir

$$\Sigma M_G = \frac{dI_G\omega}{dt} = I_G\alpha \tag{20-8}$$

---

[1] Notemos que si se calculara el momento cinético respecto a un punto fijo O en vez de respecto al centro de masa G, sería $\int \mathbf{r}_{\ell/O}\ dm = m\mathbf{r}_{G/O} \neq \mathbf{0}$ y el primer término se reduciría a $m\mathbf{r}_{G/O} \times \mathbf{v}_G$ y no cero. Además, los vectores de posición del segundo término se tomarían a partir de puntos diferentes y

$$\int \mathbf{r}_{G/O} \times (\omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{\ell/G})\ dm$$

no daría los momentos de inercia de la ecuación 20-5.

[2] Estas dos situaciones son dos casos particulares de la situación más general de cuando el eje z que pasa por G es eje principal de inercia.

[3] Notemos que si los productos de inercia I_{Gxz} e I_{Gyz} no fuesen nulos, el momento cinético tendría también componentes x e y incluso en el caso de movimiento plano. Esto significa que serían necesarias componentes x y / o y de los momentos para mantener el movimiento en el plano x-y si variara la velocidad angular.

que es una de las ecuaciones generales del movimiento de los cuerpos rígidos (ec. 16-23*c*). Por último, integrando la ecuación 20-8 respecto al tiempo tenemos la forma integral de la ecuación que traduce el teorema del momento cinético para un cuerpo rígido

$$(I_G\omega)_i + \int_{t_i}^{t_f} \sum M_G \, dt = (I_G\omega)_f \qquad (20\text{-}9)$$

La ecuación 19-23 (que es aplicable a cualquier sistema —rígido o no— de puntos materiales en interacción) y la ecuación 20-9 (que es aplicable a un cuerpo rígido) nos dicen ambas que el impulso angular $\int_{t_i}^{t_f} \sum M_G \, dt$ que se ejerce sobre un sistema de puntos materiales es igual a la variación de momento cinético $(H_G)_f - (H_G)_i$ de dicho sistema. La única diferencia entre las ecuaciones 19-23 y 20-9 estriba en la manera en que se calculan los momentos cinéticos inicial y final. Por tanto, la utilización de la ecuación 20-9 sólo exige que el cuerpo se comporte rígidamente en el instante inicial t_i y en el instante final t_f, con lo que se podrá calcular H_G tomándolo igual a $I_G\omega$ en tales instantes. Entre los instantes inicial y final, las partes del cuerpo pueden moverse unas respecto a otras con lo que $(I_G)_i$ puede no ser igual a $(I_G)_f$.

20.3.2 Rotación en torno a un eje fijo

Un tipo de problema que se encuentra corrientemente en Dinámica es la rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo (fig. 20-2). En tal caso, todos los puntos del cuerpo describen trayectorias circulares en planos perpendiculares al eje y centradas en éste. Por tanto, el movimiento será plano y serán aplicables todas las ecuaciones de la 20-1 a la 20-9. Aun cuando estas ecuaciones se pueden aplicar directamente a este tipo de problemas, el teorema del momento cinético se puede simplificar combinándolo con el teorema de la cantidad de movimiento.

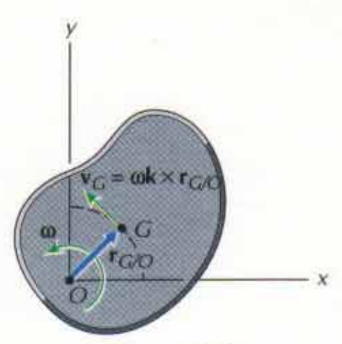


Figura 20-2

Tomemos un sistema de coordenadas cuyo eje *z* esté dirigido según el eje de rotación y cuyo origen *O* sea el punto de intersección del eje de rotación con el plano del movimiento (el plano que contiene al centro de masa). El centro de masa *G* recorrerá una trayectoria circular alrededor del eje de rotación con una velocidad $\mathbf{v}_G = \omega\,\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{G/O}$ donde $\mathbf{r}_{G/O} = x_G\mathbf{i} + y_G\mathbf{j}$. Por tanto, la suma del momento cinético respecto a *G* más el momento de la cantidad de movimiento respecto a *O* da

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_G + \mathbf{r}_{G/O} \times m\mathbf{v}_G &= I_G\omega\mathbf{k} + \mathbf{r}_{G/O} \times m(\omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{G/O}) \\ &= I_G\omega\mathbf{k} + m(x_G^2 + y_G^2)\omega\mathbf{k} = I_O\omega\mathbf{k} = \mathbf{H}_O \end{aligned}$$

Análogamente, la suma del impulso angular respecto a *G* más el momento del impulso respecto al punto fijo *O* da

$$\begin{aligned} &\int_{t_i}^{t_f} \sum_\ell M_{G\ell}\mathbf{k}\, dt + \mathbf{r}_{G/O} \times \int_{t_i}^{t_f} \sum \mathbf{R}_\ell \, dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \left(\sum_\ell \mathbf{r}_{\ell/G} \times \mathbf{R}_\ell \right) + \left(\mathbf{r}_{G/O} \times \sum \mathbf{R}_\ell \right) dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \sum_\ell \left((\mathbf{r}_{\ell/G} + \mathbf{r}_{G/O}) \times \mathbf{R}_\ell \right) dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \sum_\ell M_{O\ell}\, \mathbf{k}\, dt \end{aligned}$$

Por tanto, sumando el momento de la ecuación 20-2 respecto al punto fijo O a la ecuación 20-9 tenemos

$$(I_O\omega)_i + \int_{t_i}^{t_f} \sum_\ell M_{O\ell}\, dt = (I_O\omega)_f \qquad \textbf{(20-10)}$$

Es decir, en el caso de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo, la variación del momento cinético respecto al eje de rotación es igual al impulso angular respecto a dicho eje.

20.3.3 Representación gráfica de los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético

Las ecuaciones 20-2 y 20-9 nos dicen que la cantidad de movimiento y el momento cinético de los puntos materiales que constituyen un cuerpo rígido se pueden sustituir por una "fuerza" y un "par" equivalentes en el centro de masa G. La "fuerza" equivalente es igual al vector cantidad de movimiento $\mathbf{L} = m\mathbf{v}_G$ y el "par" equivalente es igual al vector momento cinético $\mathbf{H}_G = I_G\omega\mathbf{k}$. Así pues, los resultados de las ecuaciones 20-2 y 20-9 se pueden resumir gráficamente en la forma que indican los diagramas cinéticos de la figura 20-3. Es decir, sumando la "fuerza" y "par" equivalentes de cantidad de movimiento y momento cinético en el instante t_i (fig. 20-3*a*) con el sistema fuerza-par equivalente de los impulsos (fig. 20-3*b*) tenemos la "fuerza" y el "par" equivalentes de cantidad de movimiento y momento cinético en el instante t_f (fig. 20-3*c*).

La representación gráfica de la figura 20-3 incluye también el caso particular de la rotación en torno a un eje fijo. Si es O un punto del eje de rotación, como el descrito en el apartado 20.3.2, calculando el momento de los sistemas fuerza-par equivalentes de cada parte de la figura tendremos la ecuación 20-10. Por ejemplo, en la figura 20-3*a* la velocidad del centro de masa $\mathbf{v}_G = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{G/O}$ es perpendicular a $\mathbf{r}_{G/O}$ y el momento respecto a O del sistema fuerza-par es

$$\begin{aligned} H_G + r_{G/O} m v_G &= I_G\omega + r_{G/O} m r_{G/O}\omega \\ &= (I_G + m r_{G/O}^2)\,\omega = I_O\omega \end{aligned}$$

tal como se obtuvo en el apartado 20.3.2.

La representación gráfica de la figura 20-3 puede también utilizarse para escribir el teorema del momento cinético respecto a un punto fijo arbitrario P. No obstante, si el cuerpo no girase en torno a un eje que pase por P, sería $\mathbf{v}_G \neq \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{G/P}$ y la suma de H_G más el momento de la cantidad de movimiento *no* se reduciría a $I_P\omega$.

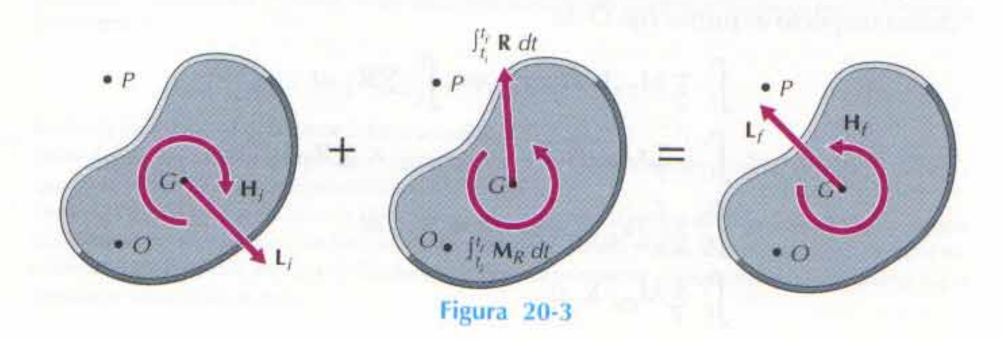


Figura 20-3

20.3.4 Centro de percusión

Al igual que puede reducirse una fuerza y un par a su forma más sencilla (su resultante), los vectores cantidad de movimiento y momento cinético de la figura 20-3 pueden reducirse a un único vector cantidad de movimiento. La "resultante" será igual a la cantidad de movimiento del centro de masa $m\mathbf{v}_G$ y su recta soporte tendrá la dirección de la cantidad de movimiento $m\mathbf{v}_G$ y estará situada a una distancia

$$d = \frac{I_G\omega}{mv_G}$$

del centro de masa (fig. 20-4).

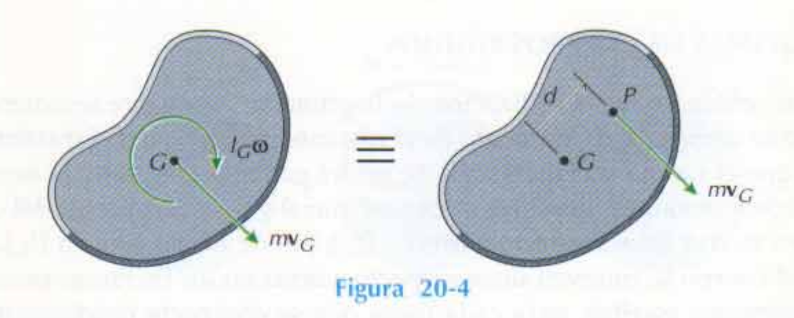


Figura 20-4

En particular, en el caso de un cuerpo que gire en torno a un eje fijo que pase por O, la cantidad de movimiento y el momento cinético del sistema reducidos al centro de masa G (fig. 20-5*a*) son equivalentes a la cantidad de movimiento del sistema $m\mathbf{v}_G$ en el punto P (fig. 20-5*b*). La cantidad de movimiento es la misma en ambos diagramas cinéticos. El momento cinético será también el mismo si se toma la posición de P de tal manera que

$$r_P(mv_G) = I_G\omega + r_G(mv_G)$$

El punto P así situado recibe el nombre de *centro de percusión.*

Notemos que la situación del centro de percusión depende del movimiento del cuerpo así como de su tamaño, forma y distribución de su masa. Como el cuerpo de la figura 20-5 gira en torno a un eje fijo, $v_G = r_G\omega$ y por tanto

$$r_P(mr_G\omega) = mk_G^2\omega + r_G(mr_G\omega)$$

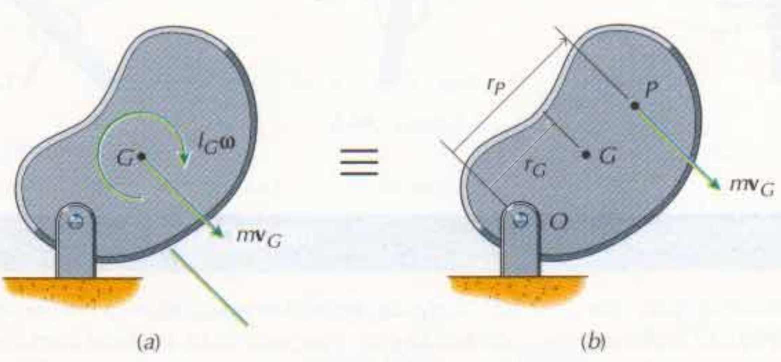


Figura 20-5

donde k_G es el radio de giro del cuerpo respecto a un eje que pase por su centro de masa y sea paralelo al eje de rotación. Dividiendo los dos miembros de la igualdad por el factor común $m\omega$ tenemos

$$r_P r_G = k_G^2 + r_G^2$$

o sea

$$(r_P - r_G)\, r_G = k_G^2$$

Es decir, la distancia entre centro de percusión y el centro de masa $d = r_P - r_G$ es igual al cociente entre k_G^2, que es constante para un cuerpo dado, y r_G, que depende de la situación del eje de rotación.

20.4 SISTEMAS DE CUERPOS RÍGIDOS

Ya hemos señalado que la utilización de la ecuación 20-9 exige solamente que el cuerpo se comporte rígidamente en el instante inicial t_i y en el instante final t_f con lo que el momento cinético H_G se podrá calcular mediante la expresión $I_G\omega$ en dichos instantes. Entre los instantes inicial y final, las partes del cuerpo se pueden mover unas respecto a otras e $(I_G)_i$ puede no ser igual a $(I_G)_f$. Si las partes del cuerpo se mueven unas respecto a otras en los instantes inicial y/o final, deberemos escribir, para cada parte que se comporte rígidamente, una ecuación que relacione el impulso angular con el momento cinético y luego habrá que sumarlas. Si los momentos de la cantidad de movimiento y los momentos de las fuerzas se toman, en cada ecuación, respecto al mismo punto, los momentos de las fuerzas de unión que mantienen unidas las diferentes partes se anularán dos a dos y no será necesario calcularlos. Esto se realiza fácilmente utilizando la representación gráfica de la figura 20-6. En las partes primera y última de la figura, la cantidad de movimiento de cada cuerpo rígido se ha sustituido por un sistema "fuerza-par" equivalente en su particular centro de masa. En la parte central de la figura, las fuerzas de unión son fuerzas interiores y no es necesario representarlas.

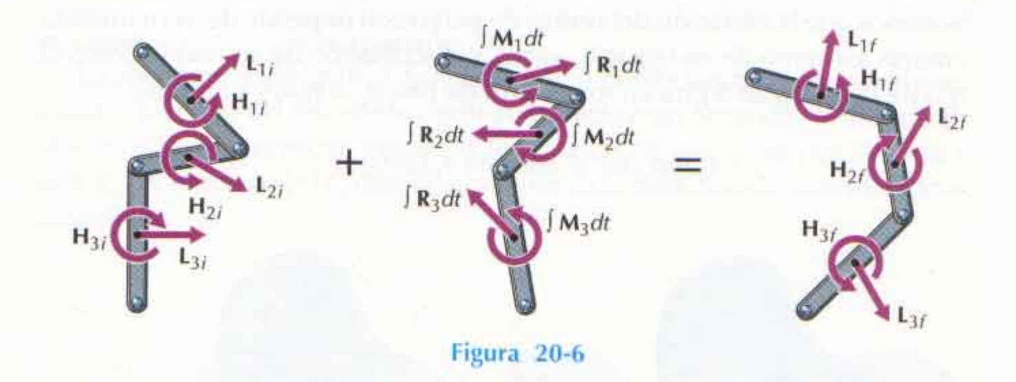


Figura 20-6

PROBLEMA EJEMPLO 20.1

Un disco uniforme que pesa 100 N gira en torno a un eje que pasa por su centro (fig. 20-7*a*). El radio del disco mide 225 mm y su velocidad angular inicial es de 600 rpm en sentido horario. Sobre el disco está aplicado un par en sentido anti-

horario de momento $M = 15$ sen nt, donde M se expresa en metro-newton, t en segundos y $n = 1$ rad/s. Despreciando todo rozamiento entre los cojinetes y el eje, determinar la velocidad angular del disco al cabo de 1 s; 3 s; 5 s.

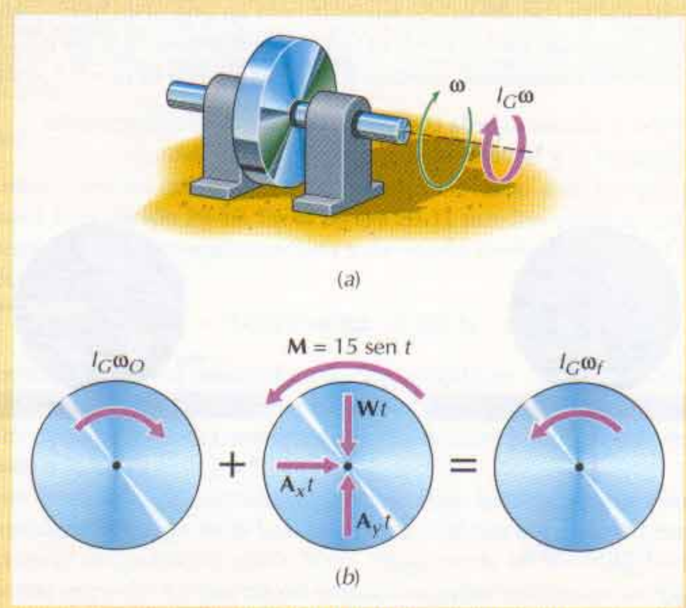


Figura 20-7

SOLUCIÓN

En la figura 20-7*b* se ilustra gráficamente el teorema del momento cinético. Las cantidades de movimiento inicial y final del centro de masa son nulas; la velocidad angular inicial del disco es

$$\omega_0 = 600 \text{ rpm}\left(\frac{2\pi \text{ rad/rev}}{60 \text{ s/min}}\right) = 62{,}83 \text{ rad/s}$$

y el momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro de masa es

$$I_G = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}\,\frac{100}{9{,}81}\,(0{,}225)^2 = 0{,}2580 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Entonces, la suma de momentos respecto al eje (que pasa también por el centro de masa) es

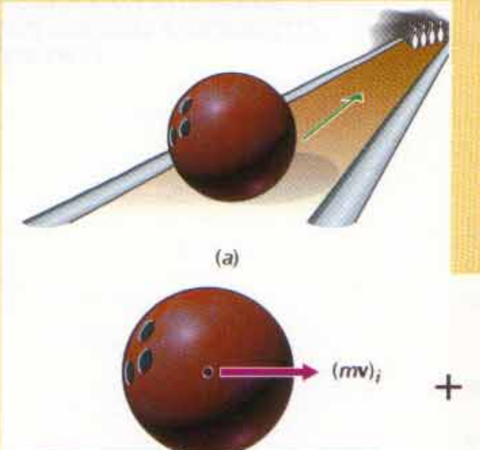
$$\circlearrowright + H_G: \qquad (0{,}2580)\,(62{,}83) + \int_0^\tau 15 \text{ sen } t\; dt = 0{,}2580\,\omega_f$$

o sea

$$\omega_f = 58{,}14(1 - \cos\tau) - 62{,}83 \text{ rad/s} \qquad \text{(antihorario)}$$

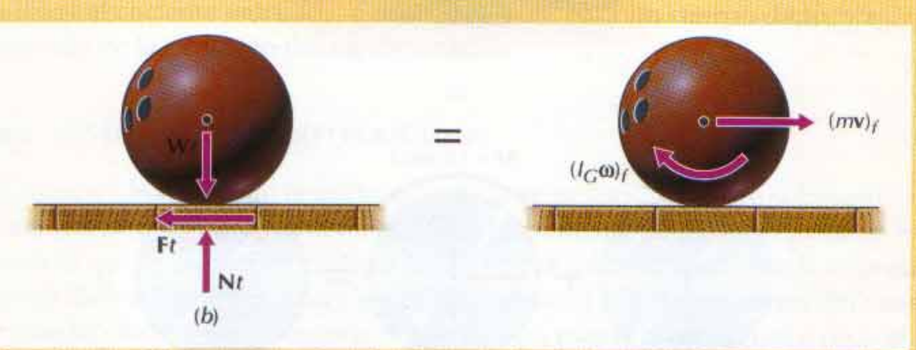
Por tanto

$$w_f(1 \text{ s}) = -\,36{,}10 \text{ rad/s}$$
$$= 36{,}10 \text{ rad/s} \qquad \text{(horario)} \qquad \text{Resp.}$$
$$w_f(3 \text{ s}) = 52{,}87 \text{ rad/s} \qquad \text{(antihorario)} \qquad \text{Resp.}$$
$$w_f(5 \text{ s}) = -\,36{,}10 \text{ rad/s}$$
$$= 36{,}10 \text{ rad/s} \qquad \text{(horario)} \qquad \text{Resp.}$$


(a)

En el juego de bolos, una bola puede asimilarse a una esfera uniforme de 7 kg y 300 mm de diámetro (fig. 20-8*a*). Se suelta la bola en una pista horizontal de madera con una velocidad inicial $v_0 = 6$ m/s y una velocidad angular inicial $\omega_0 = 0$. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre bola y pista es $\mu_k = 0{,}1$, determinar:

a. El tiempo t_f al cual la bola comienza a rodar sin deslizamiento.
b. La velocidad v_f y la velocidad angular ω_f en el instante t_f.



(b)

Figura 20-8

SOLUCIÓN

En la figura 20-8*b* se ilustra gráficamente la situación impulsiva. El momento de inercia de la esfera respecto a un eje que pase por su centro de masa es

$$I_G = \frac{2}{5}\,mR^2 = \frac{2}{5}(7)(0{,}15)^2 = 0{,}0630 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

La cantidad de movimiento inicial de la esfera se sustituye por un sistema equivalente constituido por un vector que pase por el centro de masa y un par; el vector será de dirección x y módulo $L_i = (7\text{ kg})(6\text{ m/s}) = 42\text{ kg}\cdot\text{m/s}$ y un "momento" respecto al centro de masa $(I_G\omega)_i = 0$. Análogamente, al movimiento final de la esfera se asocia un vector de dirección x y módulo $L_f = mv_f$ que pase por el centro de masa y un par de "momento" respecto al centro de masa $I_G\omega_f$. Entonces, con referencia a la figura, los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético dan

$$+\longrightarrow L_x: \qquad 42 - Ft = 7v_f \qquad (a)$$

$$+\uparrow L_y: \qquad 0 + Nt - (7)(9{,}81)t = 0 \qquad (b)$$

$$\curvearrowright + H_G: \qquad 0 + (0{,}150)\,Ft = (0{,}0630)\,\omega_f \qquad (c)$$

La ecuación *b* da $N = 68{,}67$ N para todo $0 < t < t_f$ (o incluso para todo $t > t_f$).[1] Como la bola se desliza entre $t = 0$ y $t = t_f$, la fuerza de rozamiento que se ejerce sobre la bola será

$$F = \mu_k N = 0{,}1(68{,}67) = 6{,}867 \text{ N}$$

Por último, la Cinemática relaciona las velocidades lineal y angular en el instante t_f (fig. 20-9)

$$v_f = 0{,}150\omega_f \qquad (d)$$

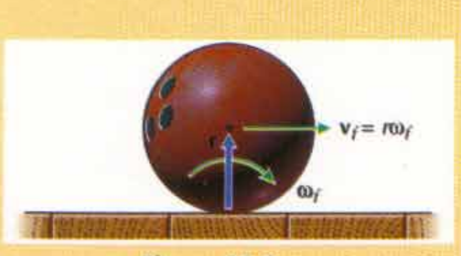


Figura 20-9

Entonces, las ecuaciones *a*, *c* y *d* dan

$$t_f = 1{,}747 \text{ s} \qquad v_f = 4{,}286 \text{ m/s} \longrightarrow \qquad \omega_f = 28{,}57 \text{ rad/s} \quad \text{(horario)} \qquad \text{Resp.}$$

[1] El mismo resultado se obtiene trivialmente mediante la segunda ley de Newton. Como no hay movimiento en la dirección y, $a_y = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ o sea $N - (7)(9{,}81) = 0$.

Una barra uniforme de 60 cm de longitud y que pesa 15 N pende de un pasador exento de rozamiento situado en *A* (fig. 20-10). Una bala de masa 22,7 g que lleva una celeridad inicial de 540 m/s incide sobre la barra y queda incrustada en ella. Determinar la velocidad angular de la barra inmediatamente después de que se incruste la bala.

A
45 cm
60 cm
540 m/s
B

Figura 20-10

SOLUCIÓN

Como la barra tiene un movimiento de rotación en torno a un eje que pasa por *A*, se utilizará la ecuación 20-10. En la figura 20-11 pueden verse los correspondientes diagramas de momento cinético y de sólido libre. La cantidad de movimiento inicial de la bala es

$$L_{ib} = 0{,}0227(540) = 12{,}258 \text{ N} \cdot \text{s}$$

y su momento respecto al punto *A* es $0{,}45L_{ib} = 5{,}516$ m · N · s. Inicialmente, la cantidad de movimiento y el momento cinético de la barra son nulos. Por tanto, el momento cinético total del sistema respecto *A* inmediatamente antes de que llegue la bala a la barra es $H_{Ai} = 5{,}516$ m · N · s.

Al sumar cantidades de movimiento y momentos cinéticos, así como los impulsos, la fuerza de interacción de la bala y la barra es interior y no será necesario representarla en el diagrama de sólido libre. Ninguna de las tres fuerzas restantes tiene momento respecto *A* y por ello el impulso angular total respecto *A* es nulo.

Inmediatamente después de que la bala se incruste en la barra, éstas giran conjuntamente en torno al pasador fijo *A*.El momento cinético final del sistema es $H_{Af} = (I_A\omega)_f$ donde

$$I_A = \frac{1}{3}\frac{15}{9{,}81}(0{,}60)^2 + 0{,}0228(0{,}45)^2$$
$$= 0{,}18810 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

es el momento de inercia, respecto al eje que pasa por *A*, del conjunto que forman la barra y la bala incrustada.

Por último, el teorema del momento cinético (ec. 20-10) da

$$\circlearrowleft + H_A\text{: } 5{,}516 + 0 = 0{,}18810\omega_f$$

o sea

$$\omega_f = 32{,}8 \text{ rad/s} \qquad \text{(antihorario)} \qquad \text{Resp.}$$

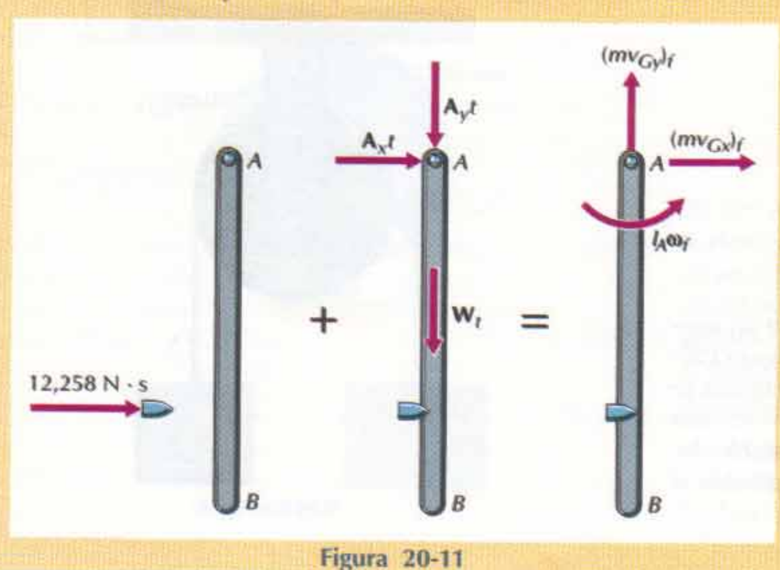


Figura 20-11

PROBLEMAS

20-1* Un volante consiste en un disco uniforme de peso 50 N, diámetro 375 mm y grosor 25 mm. Si el rozamiento en el cojinete reduce la velocidad angular del volante de 3600 rpm a cero en 3 min, determinar el momento medio de rozamiento que el cojinete ejerce sobre el volante.

20-2* El inducido de un motor eléctrico pasa al reposo desde una velocidad angular de 2400 rpm en 150 s. Si dicho inducido tiene una masa de 3 kg y un radio de giro de 100 mm, determinar el momento medio de rozamiento que ejercen sobre el inducido los cojinetes del motor.

20-3 El par de arranque de un motor eléctrico viene dado por $M_0 e^{-t}$, donde M_0 es una constante y los cojinetes ejercen un momento resistente de 0,009 m · N. Si el inducido pesa 25 N, tiene un radio de giro de 57,5 mm y el motor alcanza su celeridad de funcionamiento de 3000 rpm en 3 s, determinar el valor de M_0.

20-4* Al extremo de una cuerda arrollada sobre el exterior de un tambor hueco (fig. P20-4) se aplica una fuerza $P = 50$ N. El radio de giro del tambor de 20 kg vale 175 mm y el rozamiento en el eje es despreciable. Si se suelta el tambor partiendo del reposo, determinar la velocidad hacia abajo del punto A de la cuerda al cabo de 10 s.

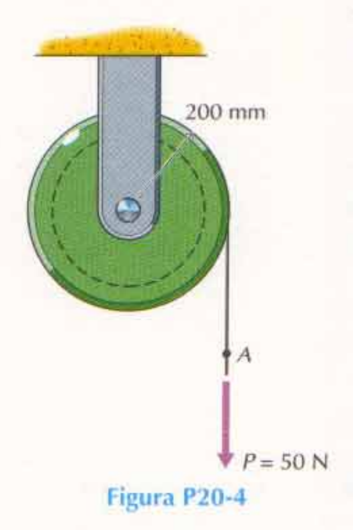
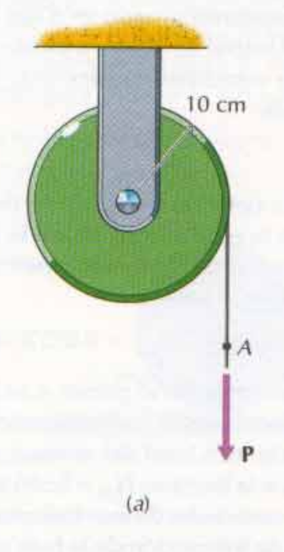
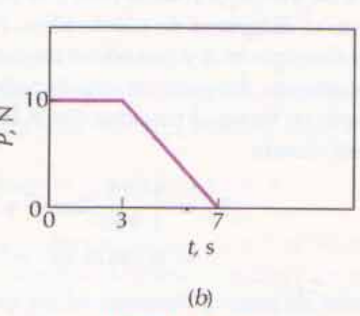


Figura P20-4

20-5 Una cuerda está arrollada sobre el exterior de un tambor uniforme que pesa 125 N, según se indica en la figura P20-5*a*. En el instante $t = 0$ el tambor está en reposo y entonces se aplica de pronto al extremo de la cuerda la fuerza representada en la figura 20-5*b*. Si el rozamiento en el eje es despreciable, determinar la velocidad hacia abajo del punto A de la cuerda al cabo de 7 s.



(*a*)



(*b*)

Figura P20-5

20-6* Un peso de 50 N pende de una cuerda que está arrollada sobre la parte externa de un tambor hueco (fig. P20-6). El tambor de 20 kg tiene un radio de giro de 175 mm y el roza-

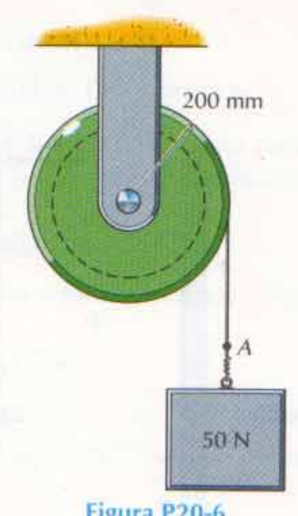


Figura P20-6

miento en su eje es despreciable. Si se suelta el tambor a partir del reposo, determinar la velocidad hacia abajo del punto A de la cuerda al cabo de 10 s.

20-7 La rueda uniforme de la figura P20-7 pesa 100 N y está girando a 3000 rpm cuando a la empuñadura del brazo de freno se le aplica una fuerza $P = 200(1 - e^{-0,05t})$ N. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre éste y la rueda vale 0,1, determinar el tiempo que tardará la rueda en pararse si:

a. Gira en sentido horario.
b. Gira en sentido antihorario.

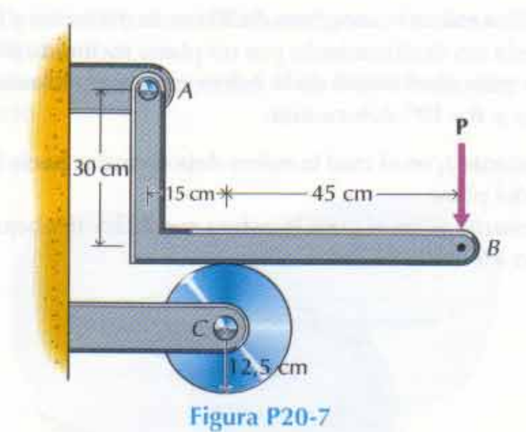


Figura P20-7

20-8* La rueda escalonada de la figura P20-8 tiene una masa de 20 kg, un radio de giro de 150 mm y una velocidad inicial de rotación de 3000 rpm en sentido antihorario. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre el brazo de freno y la rueda vale 0,2, determinar el tiempo que transcurre:

a. Hasta que se pare la rueda.
b. Hasta que su velocidad de rotación sea de 3000 rpm en sentido horario.

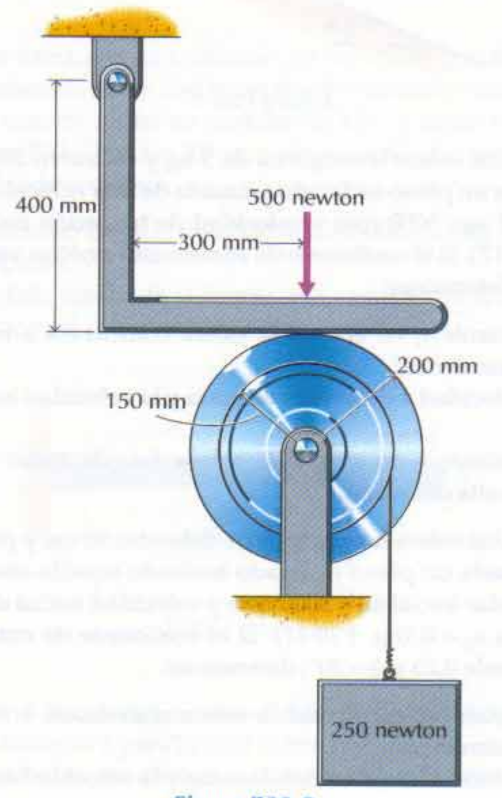


Figura P20-8

20-9 A la rueda uniforme A (20 cm de diámetro, 100 N de peso) se la eleva y da inicialmente una velocidad angular de 4500 rpm en sentido antihorario mientras la rueda uniforme B (20 cm de diámetro, 100 N de peso) permanece en reposo. Se suelta entonces la rueda A y se la deja girar en contacto con la rueda B. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre las ruedas vale 0,1, determinar:

a. El tiempo que transcurrirá hasta que las ruedas giren sin deslizamiento.
b. Las velocidades angulares finales de ambas ruedas.

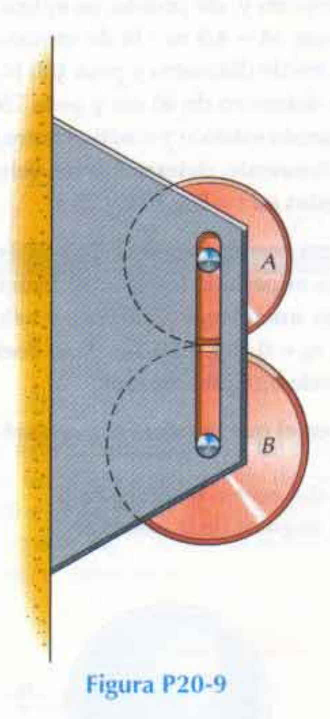


Figura P20-9

20-10* A la rueda uniforme A (200 mm de diámetro, 10 kg) se la eleva y da inicialmente una velocidad angular de 4500 rpm en sentido antihorario mientras la rueda uniforme B (400 mm de diámetro, 20 kg) permanece en reposo (fig. P20-9). Se suelta entonces la rueda A y se la deja girar en contacto con la rueda B. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre las ruedas vale 0,1, determinar:

a. El tiempo que transcurrirá hasta que las ruedas giren sin deslizamiento.
b. Las velocidades angulares finales de ambas ruedas.

20-11 Las dos ruedas uniformes A y B de la figura P20-9 están girando inicialmente juntas sin deslizamiento cuando, de pronto, se detiene la rueda B. La rueda A tiene un diámetro de 20 cm, pesa 100 N y lleva una velocidad angular de 4500 rpm en sentido antihorario; la rueda B tiene 30 cm de diámetro y pesa 225 N. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre las ruedas vale 0,2, determinar el tiempo que tardará en detenerse la rueda A.

20-12* Las dos ruedas uniformes A y B de la figura P20-9 están inicialmente en reposo y, de pronto, se aplica a la rueda A un momento constante $M = 2{,}5$ m · N de sentido antihorario. La rueda A tiene 200 mm de diámetro y una masa de 10 kg, mientras que la rueda B tiene un diámetro de 300 mm y una masa de 25 kg. Si los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre las ruedas valen, respectivamente, 0,2 y 0,1, determinar las velocidades angulares de ambas ruedas en $t = 5$ s, 15 s y 25 s.

20-13 Las dos ruedas uniformes A y B de la figura P20-9 están inicialmente en reposo y, de pronto, se aplica a la rueda A un momento constante $M = 4{,}5$ m · N de sentido antihorario. La rueda A tiene 25 cm de diámetro y pesa 100 N, mientras que la rueda B tiene un diámetro de 40 cm y pesa 150 N. Si los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre las ruedas valen 0,2 y 0,1, respectivamente, determinar las velocidades angulares de ambas ruedas en $t = 5$ s, 15 s y 25 s.

20-14* Una esfera homogénea de 5 kg y 300 mm de diámetro se baja hasta una superficie horizontal teniendo aquélla una velocidad angular inicial $\omega_0 = 3000$ rpm y velocidad de traslación inicial nula $v_0 = 0$ (fig. P20-14). Si el coeficiente de rozamiento cinético vale 0,15, determinar:

a. El instante t_f en el que la esfera comenzará a girar sin deslizamiento.
b. La velocidad del centro de masa en t_f.
c. La velocidad angular de la esfera en t_f.

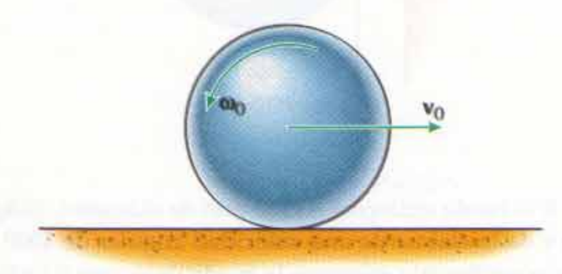


Figura P20-14

20-15 Una esfera homogénea de diámetro 35 cm y peso 80 N se baja hasta una superficie horizontal teniendo aquélla una velocidad angular inicial $\omega_0 = 3000$ rpm y una velocidad de traslación $v_0 = 6$ m/s (fig. P20-14). Si el coeficiente de rozamiento cinético vale 0,15, determinar:

a. El instante t_f en el que la esfera comenzará a girar sin deslizamiento.
b. La velocidad del centro de masa en t_f.
c. La velocidad angular de la esfera en t_f.

20-16* Una esfera homogénea de 5 kg y diámetro 200 mm se baja hasta una superficie horizontal teniendo aquélla una velocidad angular inicial $\omega_0 = 3000$ rpm (fig. P20-14). Si el coeficiente de rozamiento cinético vale 0,15, determinar la velocidad inicial v_0 para la cual las velocidades angular y lineal se anularían ambas cuando la esfera dejara de deslizarse.

20-17 Una esfera homogénea de 30 cm de diámetro y 80 N de peso rueda sin deslizamiento por un plano inclinado (fig. P20-17). Si la velocidad inicial de la esfera es de 6 m/s hacia arriba del plano y $\theta = 10°$, determinar:

a. El instante t_1 en el cual la esfera deja de rodar hacia la parte alta del plano.
b. El instante t_2 en el cual la esfera rueda hacia abajo por el plano a 9 m/s.

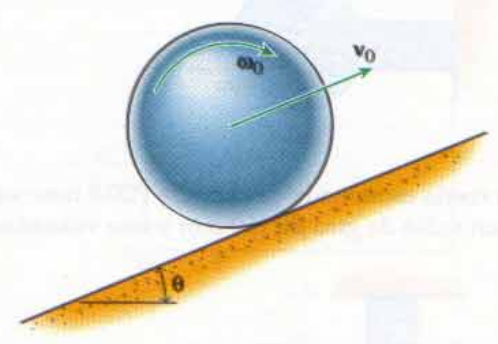


Figura P20-17

20-18 Una esfera homogénea de 5 kg y diámetro 200 mm se baja hasta un plano inclinado animada de una velocidad angular inicial $\omega_0 = 3000$ rpm y velocidad de traslación nula $v_0 = 0$ (fig. P20-17). Si el coeficiente de rozamiento cinético vale 0,25 y $\theta = 20°$, determinar:

a. El instante t_1 en el cual la esfera comenzará a rodar sin deslizamiento.
b. La velocidad $\mathbf{v}$ del centro de masa y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ en t_1.
c. El instante t_2 en el cual la esfera deja de rodar hacia la parte alta del plano.

20-19 Una esfera homogénea de diámetro 35 cm y peso 80 N se baja hasta un plano inclinado teniendo aquélla una velocidad angular inicial $\omega_0 = 3000$ rpm y velocidad inicial de traslación nula $v_0 = 0$ (fig. P20-17). Si el coeficiente de rozamiento cinético vale 0,25 y $\theta = 20°$, determinar:

a. El instante t_f en el cual la esfera comenzará a rodar sin deslizamiento.
b. La velocidad $\mathbf{v}$ del centro de masa y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ en t_f.

20-20* Una esfera homogénea de 5 kg y diámetro 200 mm se baja hasta un plano inclinado teniendo aquélla una velocidad angular inicial $\omega_0 = 3000$ rpm (fig. P20-17). Si el coeficiente de rozamiento cinético vale 0,20 y $\theta = 15°$, determinar la menor velocidad inicial v_0 que hará que la esfera deje de rodar y de deslizarse al mismo tiempo.

20-21 La barra esbelta uniforme *AB* ($W = 15$ N, $\ell = 60$ cm) está descansando sobre una superficie horizontal exenta de rozamiento cuando recibe un impulso de 10 N · s según se indica en la figura P20-21. Si $b = 45$ cm, determinar:

a. La velocidad angular de la barra inmediatamente después del impacto.
b. La velocidad del extremo *A* inmediatamente después del impacto.

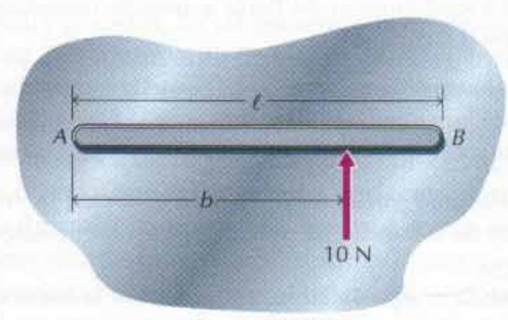


Figura P20-21

20-22* La barra esbelta uniforme *AB* ($m = 3$ kg, $\ell = 800$ mm) está descansando sobre una superficie horizontal exenta de rozamiento cuando recibe un impulso de 5 N · s según se indica en la figura P20-22. Si $b = 300$ mm y la duración del impacto es $\Delta t = 0{,}002$ s, determinar:

a. La velocidad angular de la barra inmediatamente después del impacto.
b. El módulo medio de la fuerza que ejerce sobre la barra el pasador en *A* que carece de rozamientos.

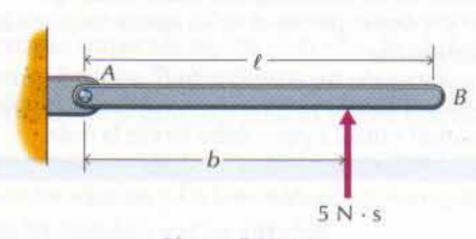


Figura P20-22

20-23 En el caso de la barra esbelta del problema 20-21, determinar la distancia *b* para la cual el extremo *A* sería centro instantáneo de rotación (velocidad de *A* nula inmediatamente después del impacto).

20-24* En el caso de la barra esbelta del problema 20-22, determinar la distancia *b* para la cual sería nula la fuerza media que sobre la barra ejercería el pasador en *A* exento de rozamientos.

20-25* Una barra esbelta uniforme *AB* de 1,2 m de longitud y 15 N de peso gira en un plano vertical alrededor de un pasador exento de rozamientos situado en su centro, según se indica en la figura P20-25. Cuando la barra está horizontal, cae sobre la barra un pedacito de masilla ($W = 2$ N). Si la rotación inicial de la barra es de sentido antihorario a 120 rpm y la masilla parte del reposo en $h = 1{,}5$ m, determinar:

a. La velocidad de rotación del conjunto barra-masilla inmediatamente después del impacto.
b. La fuerza media de contacto entre barra y masilla para una duración del impacto $\Delta t = 0{,}005$ s.
c. El módulo medio de la fuerza que sobre la barra ejerce el pasador exento de rozamientos si la duración del impacto es $\Delta t = 0{,}005$ s.
d. La energía del sistema total perdida en el choque.

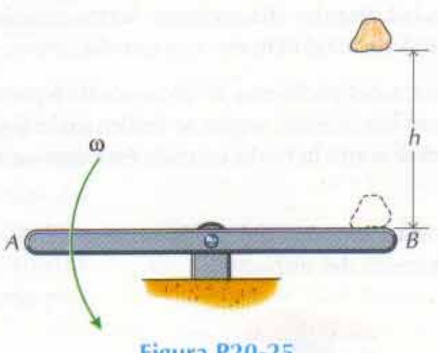


Figura P20-25

20-26* Una barra esbelta uniforme *AB* de 3 kg y 800 mm de longitud pende de un plano vertical por un pivote exento de rozamientos y recibe el impacto de una bala de 0,03 kg que queda incrustada en ella (fig. P20-26). Si la velocidad inicial de la bala es $v_0 = 350$ m/s, determinar:

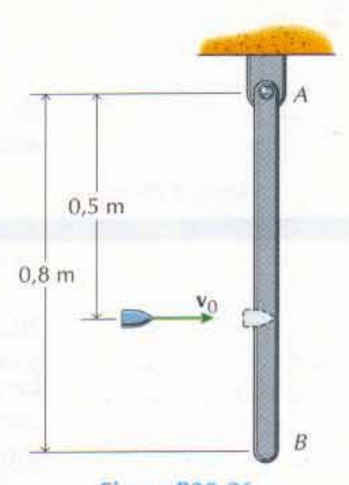


Figura P20-26

a. La velocidad de rotación del conjunto barra-bala inmediatamente después del impacto.
b. La fuerza media de contacto entre barra y bala para una duración del impacto $\Delta t = 0{,}001$ s.
c. El módulo medio de la fuerza que sobre la barra ejerce el pasador exento de rozamientos, situado en A, para una duración del impacto $\Delta t = 0{,}001$ s.
d. La energía del sistema total perdida en el choque.
e. El máximo ángulo que girará la barra después del choque.

20-27 En el caso del sistema de barra y masilla del problema 20-25, la altura h desde la que se suelta la masilla se ajusta de manera que la velocidad angular de la barra sea nula inmediatamente después del impacto. Determinar:

a. La altura ajustada h.
b. La fuerza media de contacto entre barra y masilla para una duración del impacto $\Delta t = 0{,}005$ s.
c. El módulo medio de la fuerza que sobre la barra ejerce el pasador exento de rozamientos para una duración del impacto $\Delta t = 0{,}005$ s.
d. La velocidad angular del conjunto barra-masilla cuando la barra esté vertical (el extremo con masilla debajo del pivote).

20-28* La barra del problema 20-26 se suelta a partir del reposo cuando está horizontal, según se indica en la figura P20-28. Si la bala incide sobre la barra cuando ésta está vertical, determinar:

a. La velocidad angular del conjunto barra-bala inmediatamente después del impacto.

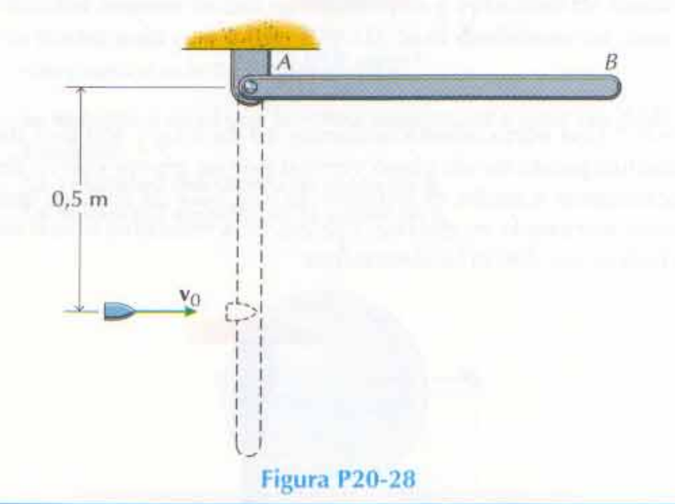


Figura P20-28

b. El módulo medio de la fuerza que sobre la barra ejerce el pasador exento de rozamientos situado en A, para una duración del impacto $\Delta t = 0{,}001$ s.
c. La energía del sistema total perdida en el impacto.
d. El máximo ángulo que girará la barra después del choque.

20-29 En el caso del sistema barra-masilla del problema 20-25, se ajusta la altura h desde la que se suelta la masilla de manera que la velocidad angular de la barra sea nula cuando esté vertical (la masilla encima del pivote). Determinar:

a. La altura ajustada h.
b. La fuerza media de contacto entre barra y masilla para una duración del impacto $\Delta t = 0{,}005$ s.
c. El módulo medio de la fuerza que sobre la barra ejerce el pasador exento de rozamientos para una duración del impacto $\Delta t = 0{,}005$ s.
d. La velocidad angular de barra y masilla inmediatamente después del choque.

20-30 La barra del problema 20-26 se suelta a partir del reposo cuando está horizontal, según se indica en la figura P20-28. Si la bala incide sobre la barra cuando ésta está vertical, determinar:

a. La velocidad inicial de la bala para la cual la velocidad angular de la barra sería nula inmediatamente después del impacto.
b. El módulo medio de la fuerza que sobre la barra ejerce el pasador exento de rozamientos situado en A para una duración del impacto $\Delta t = 0{,}001$ s.

20-31* Determinar la situación del centro de percusión de una barra esbelta que gira en torno a un pasador exento de rozamientos si éste está situado:

a. En un extremo de la barra.
b. A una distancia $\ell/4$ de un extremo de la barra.
c. En el punto medio de la barra.

20-32 La barra del problema 20-26 se suelta a partir del reposo cuando está horizontal, según se indica en la figura P20-28. La bala incide sobre la barra cuando ésta está vertical de manera que su velocidad angular sea nula inmediatamente después del impacto y sobre el pivote A no se ejerza ninguna fuerza impulsiva. Determinar:

a. La distancia bajo el pivote a la cual debe incidir la bala.
b. La velocidad inicial v_0 que debe llevar la bala.

20.5 CHOQUE DE CUERPOS RÍGIDOS

En el apartado 19.4 se estudió el choque de dos cuerpos. Cuando éstos podían considerarse puntos materiales, sólo eran aplicables los casos de choque central directo y choque central oblicuo, los cuales se desarrollaron entonces. Ahora vamos a desarrollar los casos adicionales de choque excéntrico.

Vimos que los fenómenos de choque eran complicados, incluso en el caso relativamente sencillo del choque de dos partículas. Sin embargo, es una suerte que a menudo puedan obviarse los detalles del choque; la ecuación que nos da el teorema de la cantidad de movimiento se puede utilizar para obtener una relación sencilla entre las velocidades de los cuerpos antes y después del choque. Aun cuando este método sólo constituya una aproximación de un suceso muy complejo y deba aplicarse con cuidado, el método permite la solución de problemas de choque que de otra manera serían irresolubles.

20.5.1 Fuerzas impulsivas y movimiento impulsivo

Aun cuando los sucesos de choque tienen lugar en un intervalo de tiempo relativamente corto, se observa que las velocidades y las velocidades angulares de los cuerpos pueden variar de manera importante. Las variaciones de cantidad de movimiento y de momento cinético requieren, pues, impulsos que no tiendan a cero en los cortos tiempos de choque. Las fuerzas caracterizadas por módulos muy grandes, de tal manera que originen una variación importante de la cantidad de movimiento (impulso grande), incluso en tiempos muy cortos, se denominan *fuerzas impulsivas*. Los movimientos que resultan de fuerzas impulsivas se denominan *movimientos impulsivos*. Las fuerzas que se generan cuando un cuerpo choca con otro constituyen un ejemplo de fuerzas impulsivas.

Las fuerzas que originan una variación despreciable de cantidad de movimiento (impulso pequeño) en tiempos cortos se denominan *fuerzas no impulsivas*. Ejemplos de fuerzas no impulsivas son el peso de un cuerpo, las fuerzas de rozamiento y las fuerzas elásticas que ejercen los resortes. Los módulos de las fuerzas no impulsivas son siempre pequeños frente a los de las fuerzas impulsivas. Cuando se aplica el teorema de la cantidad de movimiento durante un intervalo de tiempo corto, el impulso de las fuerzas no impulsivas suele poderse despreciar frente al de las fuerzas impulsivas.

Corrientemente, no se sabe de antemano si las fuerzas de reacción desconocidas son impulsivas o no. Por lo general, la fuerza de reacción de un apoyo, que lo que hace es impedir el movimiento en una dirección, es tan impulsiva como las fuerzas que intentan originar movimiento en dicha dirección.

La decisión final de si puede prescindirse o no del impulso de una fuerza debe basarse en la precisión que se exige al resultado y del efecto estimado que sobre la ecuación tiene dicho término.

20.5.2 Hipótesis para los problemas de choque

Por su propia naturaleza, los sucesos de choque tienen lugar en intervalos de tiempo muy breves. Basándonos en observaciones de muchos sucesos de choque, supondremos que durante el breve intervalo de choque $\Delta t = t_f - t_i$:

1. Las posiciones de los cuerpos en colisión no varían apreciablemente.
2. Las velocidades y/o las velocidades angulares de uno o ambos cuerpos en colisión pueden variar mucho.
3. Se pueden despeciar las fuerzas y momentos no impulsivos.
4. Las fuerzas de rozamiento (fuerzas tangentes al plano de impacto) pueden despreciarse.[1]

[1] A menudo, este último punto *no* constituye una buena suposición. Para tales problemas, recomendamos al lector consulte el libro de Raymond M. Brach, *Mechanical Impact Dynamics: Rigid Body Collisions* (New York: Wiley, 1991).

20.5.3 Choque excéntrico de cuerpos rígidos

El análisis de los problemas de choque de puntos materiales realizado en el apartado 19.4 ilustraba el caso del choque central para el que la línea de impacto coincidía con la recta que une los centros de masa. Por tanto, las fuerzas de contacto en el choque pasaban por los centros de masa de los cuerpos (fig. 20-12). Estos problemas se resolvían echando mano de la conservación de la cantidad de movimiento junto con el coeficiente de restitución, e, que compara la velocidad relativa de separación de los puntos de contacto (después del choque) con su velocidad relativa de aproximación (antes del choque).

El problema de choque de cuerpos rígidos es muy parecido al de choque de puntos materiales, pero se complica ligeramente por el hecho de que la línea de impacto no suele pasar por los centros de masa de los cuerpos (fig. 20-13). Como se indicó en el apartado 19.4, de un tal choque se dice que es un *choque excéntrico.*

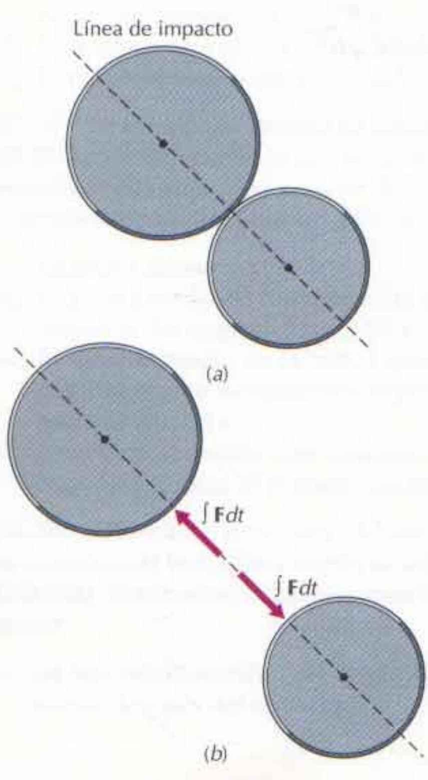


Figura 20-12

Surge una nueva complicación si definimos el coeficiente de restitución diciendo que es el cociente entre el impulso de restitución y el impulso de deformación, como se hizo en el apartado 19.4. Un análisis semejante al realizado en el apartado 19.4 nos daría de nuevo el coeficiente de restitución como razón de la velocidad relativa de separación de los puntos de contacto (después del choque) a la velocidad relativa de aproximación (antes del choque). Ahora bien, la velocidad del cuerpo en el punto de impacto suele ser diferente de la velocidad de su centro de masa. Por tanto, cuando se trate de un choque excéntrico, las ecuaciones de la velocidad relativa se deberán utilizar para relacionar las velocidades de los puntos de contacto en la ecuación del coeficiente de restitución y las velocidades de los centros de masa en las ecuaciones de los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético.

Consideremos el choque de los cuerpos rígidos representados en la figura 20-13. Los puntos A y B son los centros de masa de los cuerpos y los puntos C y D son los puntos de contacto. Tomaremos las coordenadas t y n, la primera contenida en el plano de contacto y la segunda normal a él, según se indica. Definiremos el coeficiente de restitución como la razón del impulso de restitución al impulso de deformación. Un análisis semejante al del apartado 19.4 da para el coeficiente de restitución

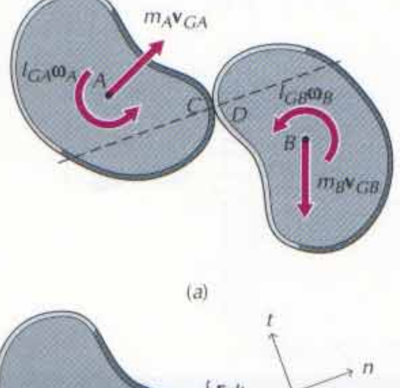
$$e = -\frac{(v_{Df})_n - (v_{Cf})_n}{(v_{Di})_n - (v_{Ci})_n} \tag{20-11}$$

donde $(v_{Ci})_n$ y $(v_{Di})_n$ son las componentes iniciales de las velocidades de los puntos C y D (antes del choque) y $(v_{Cf})_n$ y $(v_{Df})_n$ son las finales de dichos puntos (después del choque). Las componentes de las velocidades de los puntos C y D están relacionadas con las velocidades de los centros de masa A y B mediante las ecuaciones de la velocidad relativa

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{r}_{C/A} \tag{20-12}$$

y

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}_{D/B} \tag{20-13}$$



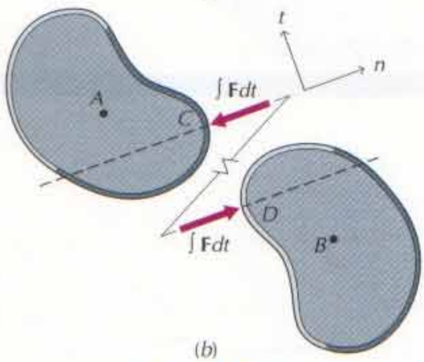


Figura 20-13

El resultado de combinar las ecuaciones 20-11, 20-12 y 20-13 es una ecuación escalar que relaciona las velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ y las velocidades angulares ω_A y ω_B después del choque. Se pueden obtener otras cuatro ecuaciones escalares

(dos ecuaciones vectoriales) al aplicar a cada cuerpo por separado el teorema de la cantidad de movimiento. Por último, se puede aplicar el teorema del momento cinético respecto al centro de masa de cada cuerpo, que nos dará dos ecuaciones escalares más, lo que representa un total de siete ecuaciones. De este sistema de ecuaciones se pueden despejar las siete incógnitas $(v_{Cf})_n$, $(v_{Cf})_t$, $(v_{Df})_n$, $(v_{Df})_t$, ω_{Af}, ω_{Bf} y el módulo F de la fuerza impulsiva de contacto que se ejercen los cuerpos. Según se indica en la figura 20-13, la fuerza **F** es normal al plano de contacto.

Si uno o ambos cuerpos en colisión está obligado a girar en torno a un punto o puntos fijos, en dicho punto (o puntos) se ejercerá una reacción impulsiva. El impulso de estas reacciones debe también incluirse en las ecuaciones que traducen los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético.

PROBLEMA EJEMPLO 20.4

Una barra uniforme de 1,5 kg y longitud 800 mm descansa sobre una superficie horizontal exenta de rozamientos cuando sobre ella incide un disco de 0,5 kg según se indica en la figura 20-14. Si el choque se produce a 200 mm del extremo de la barra y el coeficiente de restitución del choque vale 0,4, determinar:

a. La velocidad del disco después del choque.
b. La velocidad del centro de masa de la barra después del choque.
c. La velocidad angular de la barra después del choque.
d. La posición de un punto de la barra que se halle en reposo instantáneo durante el choque.

Figura 20-14

SOLUCIÓN

a. En la figura 20-15 pueden verse los diagramas cinéticos de la barra y el disco, en donde el momento de inercia de la barra respecto a un eje que pase por su centro de masa es

$$I_G = \frac{1}{12}(1,5)(0,8)^2 = 0,0800 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

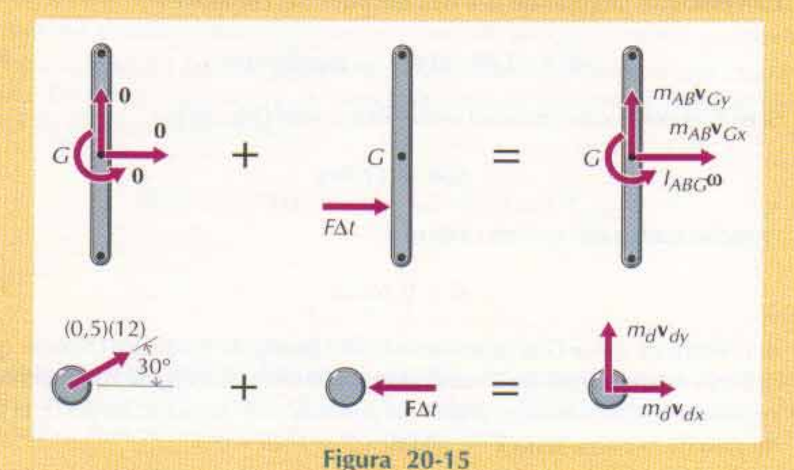


Figura 20-15

Como se desprecia el rozamiento entre disco y barra, no habrá componente según y del impulso ni sobre la barra ni sobre el disco. Por tanto, el teorema de la cantidad de movimiento aplicado a la barra y el disco, por separado, da

$$\text{barra:} \qquad [0] + 0 = [1{,}5v_{Gy}]$$
$$\text{disco:} \qquad [(0{,}5)(12 \text{ sen } 30°)] + 0 = [0{,}5v_{dy}]$$

o sea

$$v_{Gy} = 0 \qquad \text{y} \qquad v_{dy} = 6 \text{ m/s}$$

Para el sistema constituido por la barra y el disco, no hay ni impulso en la dirección x ni momento del impulso respecto al centro de masa de la barra. Por tanto, el teorema de la cantidad de movimiento aplicado al sistema da (atendiendo a la componente x)

$$[(0{,}5)(12 \cos 30°)] + 0 = [0{,}5v_{dx} + 1{,}5v_{Gx}] \qquad (a)$$

y el teorema del momento cinético aplicado al sistema que constituyen la barra y el disco da

$$[(0{,}2)\ (0{,}5)(12 \cos 30°) + 0] + 0 = [(0{,}2)(0{,}5)v_{dx} + 0{,}08\,\omega] \qquad (b)$$

Por último, el coeficiente de restitución relaciona las componentes x de las velocidades de los puntos de contacto antes y después del choque:

$$e = -\frac{(v_{Gx} + 0{,}2\,\omega) - v_{dx}}{0 - 12 \cos 30°} = 0{,}4 \qquad (c)$$

Resolviendo el sistema constituido por las ecuaciones a, b y c, se tiene $v_{dx} = 1{,}203$ m/s, $v_{Gx} = 3{,}06$ m/s y $\omega = 11{,}49$ rad/s. Combinando ahora las componentes x e y de la velocidad del disco antes y después del choque, se tiene

$$\mathbf{v}_d = 6{,}12 \text{ m/s} \measuredangle 78{,}7° \qquad \text{Resp.}$$

b. Combinando las componentes x e y de la velocidad del centro de masa de la barra después del choque, se tiene

$$\mathbf{v}_G = 3{,}06 \text{ m/s} \longrightarrow \qquad \text{Resp.}$$

c. La velocidad angular de la barra después del choque es

$$\boldsymbol{\omega} = 11{,}49 \text{ rad/s} \qquad \text{(antihorario)} \qquad \text{Resp.}$$

d. Si es C el centro instantáneo de rotación, será (fig. 20-16)

$$3{,}06 = 11{,}49d$$

y dicho centro instantáneo estará a

$$d = 0{,}266 \text{ m} \qquad \text{Resp.}$$

del centro de masa G al lado opuesto del punto de contacto. (Nótese que si la barra estuviera fija en C mediante un pasador exento de rozamientos, el punto de contacto sería el centro de percusión de la barra. Es decir, el radio de giro de la barra sería $k = \sqrt{0{,}08/1{,}5}$ y $0{,}2d = k^2$.)

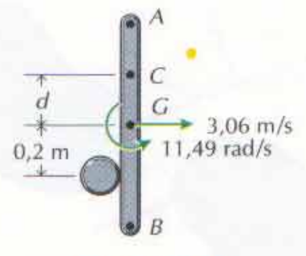


Figura 20-16

PROBLEMA EJEMPLO 20.5

Una barra uniforme que pesa 125 N y tiene una longitud de 90 cm está unida a un gozne exento de rozamientos situado en A (fig. 20-17). La barra parte del reposo en la posición vertical representada, cae sobre el tope C y rebota hacia arriba. Si el coeficiente de restitución en el choque vale 0,6, determinar:

a. El máximo ángulo $\theta_{máx}$ que formará la barra con la horizontal después del choque.
b. El módulo medio de la reacción del apoyo en A correspondiente a una duración del impacto igual a 0,01 s.
c. La energía del sistema total perdida en el choque.

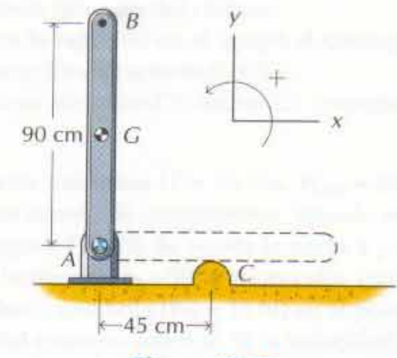


Figura 20-17

SOLUCIÓN

a. **Teorema de las fuerzas vivas.** Desde el instante t_0 (cuando la barra está vertical) hasta el instante t_1 (inmediatamente antes de que choque con el tope C), la única fuerza que trabaja es la de la gravedad. Por tanto, se podrá utilizar el teorema de las fuerzas vivas para determinar el movimiento de la barra en el instante t_1. La energía cinética inicial de la barra es nula y como el punto A es un eje de rotación fijo, puede escribirse que la energía cinética de la barra en t_1 es $T = \frac{1}{2}I_A\omega_1^2$ donde $I_A = \frac{1}{3}m\ell^2 = 3{,}440 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Entonces, el teorema de las fuerzas vivas da

$$0 + (125)(0{,}45) = \frac{1}{2}(3{,}440)\omega_1^2 + 0$$

de donde $\omega_1 = 5{,}719$ (horario) y la velocidad del centro de masa en t_1 será $v_1 = 0{,}45\omega_1 = 2{,}573 \text{ m/s}\downarrow$.

Choque. El coeficiente de restitución se utiliza para determinar el cambio de movimiento en el choque

$$e = 0{,}6 = -\frac{v_{G2} - 0}{(-2{,}573) - 0}$$

donde la velocidad del tope es nula antes y después del choque. Por tanto, $v_{G2} = 1{,}5440 \text{ m/s}\uparrow$ y la velocidad angular después del choque es

$$\omega_2 = \frac{v_{G2}}{0{,}45} = 3{,}431 \text{ rad/s} \qquad \text{(antihorario)}$$

Teorema de las fuerzas vivas. Desde el instante t_2 (inmediatamente después del choque) hasta el instante t_3 (cuando la barra alcanza su máximo ángulo) la única fuerza que trabaja sobre la barra lo hace contra la gravedad. En el ángulo máximo, la energía cinética de la barra es nula y el teorema de las fuerzas vivas da

$$\frac{1}{2}(3{,}440)(3{,}431)^2 + 0 = (125)(0{,}45 \text{ sen } \theta_{máx})$$

de donde

$$\theta_{máx} = 21{,}1° \qquad \text{Resp.}$$

b. **Teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético.** Haciendo referencia al diagrama cinético de la figura 20-18, el teorema de la cantidad de movimiento da, para la componente x,

$$0 + A_x\,(0{,}01) = 0$$

de donde $A_x = 0$. Utilizando el mismo diagrama (en el cual $I_G = \frac{1}{12}m\ell^2 = 0{,}8600\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, el teorema del momento cinético da

$$(0{,}8600)(-5{,}719) + (0{,}45)\,A_y(0{,}01) = (0{,}8600)(3{,}431)$$

de donde $A_y = 1749$ N. Por tanto, el módulo medio de la reacción en el apoyo A será

$$A = 1749\ \text{N} \qquad \text{Resp.}$$

c. Como, en los instantes t_0 y t_1, es nula la energía cinética, en dichos instantes la energía mecánica del sistema se reduce a su energía potencial

$$E_0 = (125)(0{,}45) = 56{,}3\ \text{J}$$
$$E_3 = (125)(0{,}45\ \text{sen}\ 21{,}1°) = 20{,}2\ \text{J}$$

La energía perdida será, pues,

$$\frac{56{,}3 - 20{,}2}{56{,}3}(100) = 64{,}1‰ \qquad \text{Resp.}$$

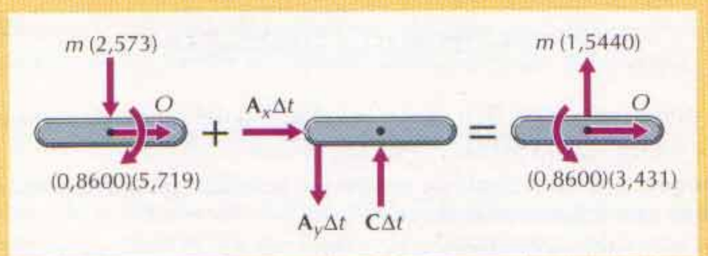


Figura 20-18

PROBLEMAS

20-33* Una barra esbelta uniforme (ℓ = 525 mm, W = 50 N) descansa sobre una superficie horizontal exenta de rozamientos y recibe el impacto de un pequeño disco (W_d = 10 N), según se indica en la figura P20-33. Si b = 75 mm, e = 0,6 y la velocidad inicial del disco es v_0 = 4,5 m / s según un ángulo θ = 60°, determinar:

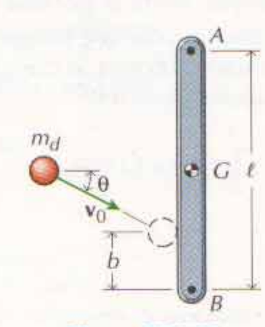


Figura P20-33

a. La velocidad del disco después del choque.
b. La velocidad del centro de masa de la barra después del choque.
c. La velocidad angular de la barra después del choque.
d. La situación del centro instantáneo de rotación de la barra durante el choque.

20-34* Una barra esbelta uniforme ($\ell = 900$ mm, $m_{AB} = 5$ kg) descansa sobre una superficie horizontal exenta de rozamientos y recibe el impacto de un pequeño disco ($m_d = 0{,}5$ kg), según se indica en la figura P20-33. Si $b = 250$ mm, $e = 0{,}5$ y la velocidad inicial del disco es $v_0 = 10$ m/s según un ángulo $\theta = 40°$, determinar:

a. La velocidad del disco después del choque.
b. La velocidad del centro de masa de la barra después del choque.
c. La velocidad angular de la barra después del choque.
d. La situación del centro instantáneo de rotación de la barra durante el choque.

20-35 En el caso del disco y la barra del problema 20-33, determinar el coeficiente de restitución e para el cual el disco no tendría, después del choque, componente de velocidad según la línea de impacto. (Supóngase que los demás parámetros son los mismos.)

20-36 En el caso del disco y la barra del problema 20-34, determinar la masa m_d del disco para la cual el disco no tendría, después del choque, componente de velocidad según la línea de impacto. (Supóngase que los demás parámetros son los mismos.)

20-37 Una barra esbelta uniforme ($\ell = 90$ cm, $W_{AB} = 60$ N) pende inmóvil de un gozne exento de rozamiento situado en A, según indica la figura P20-37. Una bola ($W_b = 10$ N) incide sobre la barra a una distancia $d = 10$ cm de su extremo inferior. Si $e = 0{,}5$ y la velocidad inicial de la bola es $v_0 = 90$ cm/s según un ángulo $\theta = 40°$ respecto a la horizontal, determinar:

a. La velocidad de la bola después del choque.
b. La velocidad angular de la barra después del choque.
c. El módulo medio de la reacción del apoyo A correspondiente a una duración del impacto de 0,005 s.
d. El máximo ángulo que describirá la barra AB después del choque.

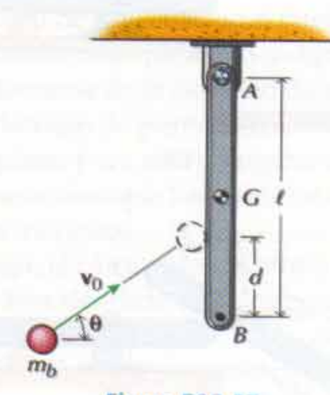


Figura P20-37

20-38* Una barra esbelta uniforme ($\ell = 750$ mm, $m_{AB} = 10$ kg) pende inmóvil de un gozne exento de rozamiento situado en A, según indica la figura P20-37. Una bola ($m_b = 2$ kg) incide sobre la barra a una distancia $d = 400$ mm de su extremo inferior. El coeficiente de restitución es $e = 0{,}8$ y la velocidad inicial de la bola forma un ángulo $\theta = 60°$ con la horizontal. Si la velocidad angular de la barra después del choque es de 2,5 rad/s (antihorario), determinar:

a. La velocidad inicial v_0 de la bola.
b. La velocidad de la bola después del choque.
c. El módulo medio de la reacción en el apoyo A correspondiente a una duración del impacto de 0,001 s.
d. El máximo ángulo que describirá la barra AB después del choque.

20-39 Una barra esbelta uniforme ($\ell = 75$ cm, $W_{AB} = 50$ N) gira en torno a un gozne exento de rozamientos, situado en A, según se indica en la figura P20-39. Se suelta la barra a partir del reposo en posición horizontal $\phi_0 = 90°$ y contra ella, cuando está vertical ($\phi_0 = 0°$), choca una bola ($W_b = 15$ N) en el punto a la distancia $d = 20$ cm del extremo inferior. Si la velocidad inicial de la bola es $v_0 = 6$ m/s según el ángulo $\theta = 30°$ respecto a la horizontal y la velocidad angular de la barra es nula después del choque, determinar:

a. El coeficiente de restitución e del choque.
b. La velocidad de la bola después del choque.
c. El módulo medio de la reacción del apoyo en A para una duración del impacto de 0,003 s.

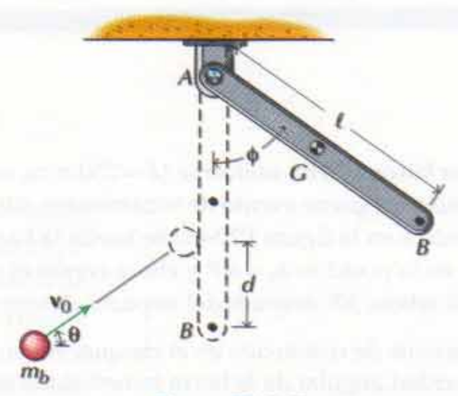


Figura P20-39

20-40* Una barra esbelta uniforme ($\ell = 600$ mm, $m_{AB} = 5$ kg) gira en torno a un gozne exento de rozamientos, situado en A, según se indica en la figura P20-39. Se suelta la barra a partir del reposo en la posición $\phi_0 = 60°$ y contra ella, cuando está vertical ($\phi_0 = 0°$), choca una bola ($m_b = 0{,}8$ kg) en el punto a la distancia $d = 100$ mm del extremo inferior. El coeficiente de restitución es $e = 0{,}7$ y la velocidad inicial de la bola forma un ángulo $\theta = 50°$ con la horizontal. Si, después del impacto, el ángulo máximo que describe la barra es de 30°, determinar:

a. La velocidad inicial v_0 de la bola.
b. La velocidad de la bola después del choque.
c. El módulo medio de la reacción del apoyo en A para una duración del impacto de 0,008 s.

20-41 Una barra esbelta uniforme ($\ell = 60$ cm, $W_{AB} = 25$ N) gira en torno a un gozne exento de rozamientos, situado en A, según se indica en la figura P20-41. Se suelta la barra a partir del reposo en la posición $\phi_0 = 90°$ y choca contra el tope C ($d = 20$ cm). Si el coeficiente de restitución es $e = 0{,}7$, determinar:

a. La velocidad angular de la barra inmediatamente después de chocar con el tope.
b. El máximo ángulo descrito por la barra en el rebote.
c. El módulo medio de la reacción del apoyo en A para una duración del impacto de 0,005 s.
d. La energía del sistema total perdida en el choque.

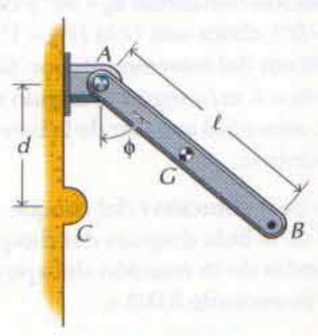


Figura P20-41

20-42* Una barra esbelta uniforme ($\ell = 750$ mm, $m_{AB} = 8$ kg) gira en torno a un gozne exento de rozamientos, situado en A, según se indica en la figura P20-41. Se suelta la barra a partir del reposo en la posición $\phi_0 = 60°$ y choca contra el tope C ($d = 600$ mm). Si rebota 30° después del impacto, determinar:

a. El coeficiente de restitución en el choque.
b. La velocidad angular de la barra inmediatamente después de chocar con el tope.
c. El módulo medio de la reacción del apoyo en A para una duración del impacto de 0,008 s.

20-43 Una barra esbelta uniforme ($\ell = 75$ cm, $W_{AB} = 20$ N) se suelta a partir del reposo formando un ángulo de 70° con la horizontal y choca contra una superficie horizontal dura, según se indica en la figura P20-43. Si la altura inicial de la barra es $h = 150$ cm y el coeficiente de restitución es $e = 0{,}7$, determinar:

a. La velocidad angular de la barra después del impacto.
b. La velocidad de su centro de masa inmediatamente después del impacto.
c. Si chocará su extremo B con la superficie a consecuencia de la rotación que adquiere la barra inmediatamente después del impacto.

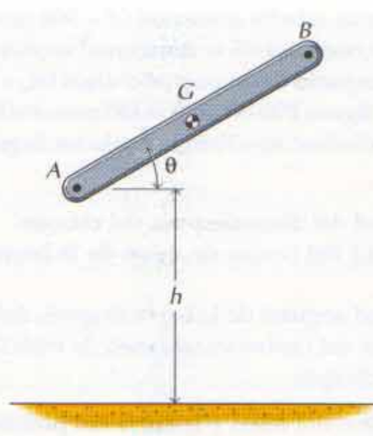


Figura P20-43

20-44* Una barra esbelta uniforme ($\ell = 800$ mm, $m_{AB} = 2$ kg) se suelta a partir del reposo desde una altura inicial $h = 2$ m y choca contra una superficie horizontal dura, según se indica en la figura P20-43. Si es $e = 0{,}7$ el coeficiente de restitución y el extremo B justo se separa de la superficie en la rotación que adquiere la barra inmediatamente después del impacto, determinar:

a. El ángulo θ bajo el cual se soltó la barra.
b. La velocidad angular de la barra después del impacto.
c. La velocidad de su centro de masa inmediatamente después del impacto.

20-45 La barra AB de la figura P20-45a gira en torno a un pasador exento de rozamientos, situado en A; la barra CD gira en

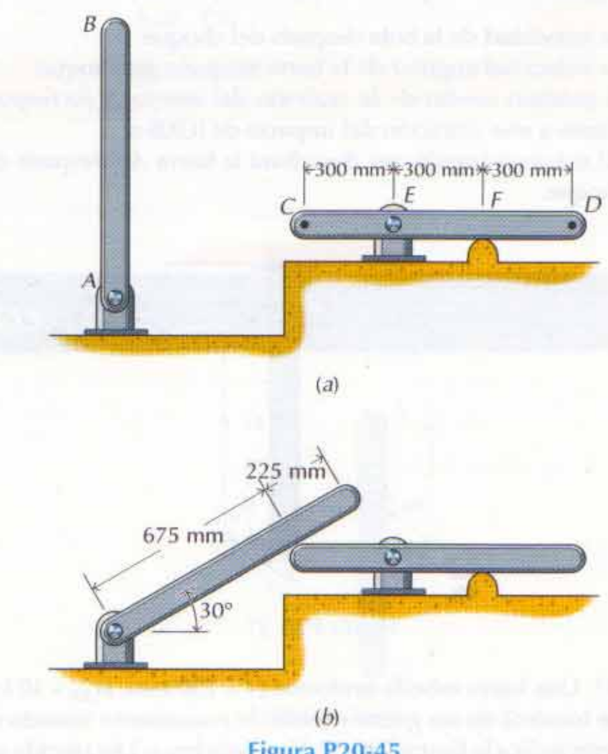


Figura P20-45

torno a un pasador exento de rozamientos situado en E y descansa sobre un apoyo liso situado en F. AB y CD son barras esbeltas uniformes de 900 mm de longitud y 25 N de peso. Se hallan inicialmente en reposo y una leve perturbación hace caer hacia la derecha la barra AB y chocar contra la CD, según se indica en la figura P20-45*b*. Si es $e = 0{,}6$ el coeficiente de restitución, determinar:

a. Las velocidades angulares de las barras inmediatamente después del impacto.
b. El máximo ángulo de rebote de la barra AB después del impacto.
c. El módulo medio de la reacción del apoyo en E para una duración del impacto de 0,005 s.

20-46* La barra esbelta uniforme CD de la figura P20-46 gira en torno a un pasador exento de rozamientos situado en E y descansa sobre un apoyo liso F. La barra tiene una longitud de 800 mm, una masa de 4 kg y se halla inicialmente en reposo. La barra esbelta uniforme AB tiene una longitud de 500 mm y una masa de 3 kg. Se suelta la barra AB a partir del reposo siendo $h = 2{,}5$ m y choca contra la barra CD según se indica. Si el coeficiente de restitución es $e = 0{,}6$, determinar:

a. Las velocidades angulares de las barras inmediatamente después del impacto.
b. El módulo medio de la reacción del apoyo en E para una duración del impacto de 0,003 s.

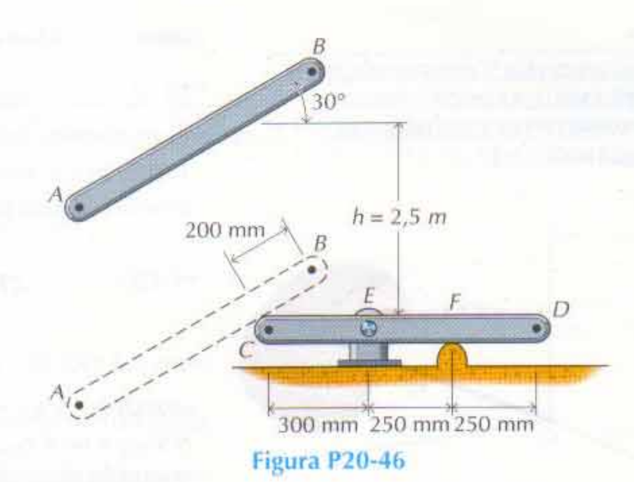


Figura P20-46

20-47 Repetir el problema 20-45 para el caso en que la barra CD sólo esté descansando sobre el pasador E en vez de estar unida a él. Determinar la velocidad del centro de masa de la barra CD inmediatamente después del impacto.

20-48 Repetir el problema 20-46 para el caso en que la barra CD sólo esté descansando sobre el pasador E en vez de estar unida a él. Determinar la velocidad del centro de masa de la barra CD inmediatamente después del impacto.

20.6 IMPULSO ANGULAR Y MOMENTO CINÉTICO DE UN CUERPO RÍGIDO EN MOVIMIENTO TRIDIMENSIONAL

La forma general de las ecuaciones que traducen los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético que han sido establecidas en este capítulo (ecs. 20-2, 20-3 y 20-4) son igualmente aplicables a un sistema arbitrario de puntos materiales como a un sistema de éstos que constituya un cuerpo rígido. La forma general de las ecuaciones también es igualmente aplicable a un movimiento bidimensional que a uno tridimensional. En realidad, no sólo la ecuación 20-2 del teorema de la cantidad de movimiento es exactamente igual para un sistema arbitrario de puntos materiales en interacción, un cuerpo rígido en movimiento plano y un cuerpo rígido animado de un movimiento tridimensional cualquiera, sino que los términos de la ecuación se calculan de la misma manera en los tres casos.

Sin embargo, el cálculo de los términos del momento cinético en las ecuaciones 20-3 y 20-4 depende de si los puntos se mueven independientemente o si constituyen un cuerpo rígido. En el caso del movimiento plano de un cuerpo rígido simétrico, el momento cinético era simplemente (ec. 20-6)

$$H_G\mathbf{k} = I_G\omega\mathbf{k}$$

En cambio, para el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido, el momento cinético tiene componentes adicionales que no figuran en el caso de movimiento plano.

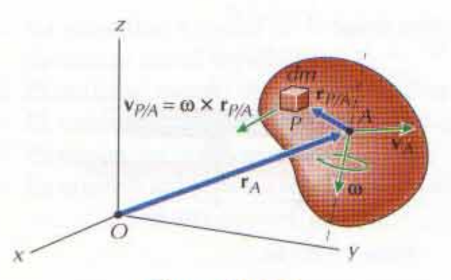


Figura 20-19

20.6.1 Momento cinético

El momento cinético de un punto material respecto a un punto del espacio es el momento respecto a este último de la cantidad de movimiento del punto material. Sea A un punto cualquiera de un cuerpo rígido (fig. 20-19). El momento cinético de un punto material P de masa dm respecto al punto A viene dado por

$$d\mathbf{H}_A = \mathbf{r}_{P/A} \times \mathbf{v}_P\, dm = \mathbf{r}_{P/A} \times (\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{P/A})\, dm$$
$$= \mathbf{r}_{P/A} \times [\mathbf{v}_A + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A})]\, dm \qquad (20\text{-}14)$$

donde $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{P/A}$ son las velocidades absolutas de los puntos A y P; $\mathbf{r}_{P/A}$ y $\mathbf{v}_{P/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A}$ son el vector de posición y la velocidad de P respecto al punto A, y $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo rígido. Integrando la ecuación 20-14 para todos los puntos materiales del cuerpo rígido tendremos el momento cinético de este cuerpo respecto al punto A en la forma

$$\mathbf{H}_A = \int \mathbf{r}_{P/A} \times [\mathbf{v}_A + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A})]\, dm$$
$$= \left(\int \mathbf{r}_{P/A}\, dm\right) \times \mathbf{v}_A + \int \mathbf{r}_{P/A} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A})\, dm \qquad (20\text{-}15)$$

donde $\mathbf{v}_A$ es independiente de dm y se ha sacado de la integral del primer término. Entonces, en virtud de la definición de centro de masa, la primera integral se puede escribir $\int \mathbf{r}_{P/A}\, dm = m\mathbf{r}_{G/A}$. Por tanto,

$$\mathbf{H}_A = \mathbf{r}_{G/A} \times (m\mathbf{v}_A) + \int \mathbf{r}_{P/A} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A})\, dm \qquad (20\text{-}16)$$

Eligiendo de determinadas maneras el punto A, se puede simplificar aún más la ecuación 20-16. Por ejemplo, si el punto A es un punto fijo alrededor del cual gira el cuerpo, será $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ y la ecuación 20-16 quedará en la forma

$$\mathbf{H}_A = \int \mathbf{r}_{P/A} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A})\, dm \qquad (20\text{-}17)$$

Análogamente, si el punto A fuese el centro de masa G, sería $\mathbf{r}_{G/A} = \mathbf{r}_{G/G} = \mathbf{0}$ y la ecuación 20-16 se convertiría en

$$\mathbf{H}_G = \int \mathbf{r}_{P/G} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/G})\, dm \qquad (20\text{-}18)$$

Incluso si A fuese un punto arbitrario, la ecuación 20-16 podría escribirse en una forma algo más conveniente. Utilizando en la ecuación 20-16 la sustitución $\mathbf{r}_{P/A} = \mathbf{r}_{P/G} + \mathbf{r}_{G/A}$, tendríamos

$$\mathbf{H}_A = \mathbf{r}_{G/A} \times (m\mathbf{v}_A) + \int (\mathbf{r}_{P/G} + \mathbf{r}_{G/A}) \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{P/G} + \mathbf{r}_{G/A})]\, dm$$

Ahora bien, $\mathbf{r}_{G/A}$ y $\boldsymbol{\omega}$ son independientes de dm y se pueden sacar de la integral. Por tanto,

$$\mathbf{H}_A = \mathbf{r}_{G/A} \times (m\mathbf{v}_A) + \int \mathbf{r}_{P/G} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/G})\, dm + \left(\int \mathbf{r}_{P/G}\, dm\right) \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{G/A}) + \mathbf{r}_{G/A} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \int \mathbf{r}_{P/G}\, dm\right) + \mathbf{r}_{G/A} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{G/A}) \int dm \quad (20\text{-}19)$$

Pero la primera integral de la ecuación 20-19 no es sino $\mathbf{H}_G$ (ec. 20-18); las integrales segunda y tercera son nulas ya que $\int \mathbf{r}_{P/G}\, dm = m\mathbf{r}_{G/G} = \mathbf{0}$ en virtud de la definición de centro de masa y el último término es $\mathbf{r}_{G/A} \times m\mathbf{v}_{G/A}$. Finalmente, combinando los términos último y primero y echando mano de la ecuación para la velocidad relativa $\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{G/A}$ tenemos

$$\mathbf{H}_A = \mathbf{r}_{G/A} \times (m\mathbf{v}_G) + \mathbf{H}_G \quad (20\text{-}20)$$

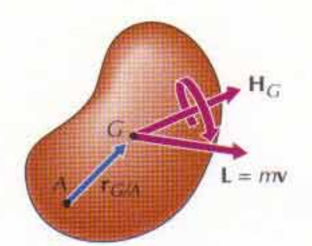


Figura 20-20

Es decir, las propiedades del momento cinético de un cuerpo rígido pueden representarse mediante el sistema "fuerza-par" equivalente indicado en el diagrama cinético de la figura 20-20. Aun cuando el vector momento cinético resultante $\mathbf{H}_G$ es un vector libre, por conveniencia se representa aplicado al centro de masa G. El vector cantidad de movimiento resultante $\mathbf{L} = m\mathbf{v}_G$ se considera aplicado al centro de masa G.

Las ecuaciones 20-17 y 20-18 tienen la misma estructura y se pueden desarrollar simultáneamente escribiendo $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$. Para la ecuación 20-17, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_A$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{P/A}$ y las posiciones x, y y z se miden respecto a ejes de coordenadas centrados en el punto fijo A. Para la ecuación 20-18 es $\mathbf{H} = \mathbf{H}_G$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{P/A}$ y las posiciones x, y y z se miden respecto a ejes de coordenadas centrados en el centro de masa G.

Desarrollando el doble producto vectorial de las ecuaciones 20-17 y 20-18 tenemos

$$\mathbf{H} = \left(\omega_x\int (y^2+z^2)\, dm - \omega_y\int xy\, dm - \omega_z\int xz\, dm\right)\mathbf{i} + \left(-\omega_x\int xy\, dm + \omega_y\int (x^2+z^2)\, dm - \omega_z\int yz\, dm\right)\mathbf{j} + \left(-\omega_x\int xz\, dm + \omega_y\int yz\, dm - \omega_z\int (x^2+y^2)\, dm\right)\mathbf{k} \quad (20\text{-}21)$$

donde las componentes de la velocidad angular son también independientes de dm y se han sacado de las integrales. Las integrales de la ecuación 20-21 representan los momentos de inercia y productos de inercia del cuerpo respecto a los ejes xyz:

$$I_x = \int (y^2+z^2)\, dm \qquad I_{xy} = \int xy\, dm = I_{yx}$$
$$I_y = \int (x^2+z^2)\, dm \qquad I_{yz} = \int yz\, dm = I_{zy} \quad (20\text{-}22)$$
$$I_z = \int (x^2+y^2)\, dm \qquad I_{xz} = \int xz\, dm = I_{zx}$$

El cálculo de los momentos y productos de inercia se ha expuesto en el tomo de *Estática*. En el Apéndice A de este tomo se ha repetido gran parte de esa materia.

Aplicando en las ecuaciones 20-17 y 20-18 los momentos y productos de inercia de las ecuaciones 20-22 tenemos el momento cinético del cuerpo respecto a un punto fijo A o respecto a su centro de masa G:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = &\ (I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z)\,\mathbf{i} \\ &+ (-I_{yx}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z)\,\mathbf{j} \\ &+ (-I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y - I_z\omega_z)\,\mathbf{k} \end{aligned} \qquad \textbf{(20-23)}$$

donde los momentos y productos de inercia son relativos a ejes que pasan por el punto fijo A en el caso de $\mathbf{H}_A$ o relativos a ejes que pasan por el centro de masa G en el caso de $\mathbf{H}_G$. La ecuación 20-23 es válida para una posición particular del cuerpo. Como la orientación de los ejes de coordenadas es fija, los momentos y productos de inercia variarán, en general, cuando el cuerpo gire respecto a los ejes xyz.

La ecuación 20-23 parece un tanto complicada, pero puede simplificarse considerablemente para orientaciones particulares de los ejes de coordenadas. El sistema de ejes ideal lo constituyen los ejes principales de inercia $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$. Si los ejes de coordenadas coinciden con los ejes principales de inercia, todos los productos de inercia serán nulos $I_{\hat{x}\hat{y}} = I_{\hat{y}\hat{x}} = I_{\hat{y}\hat{z}} = I_{\hat{z}\hat{y}} = I_{\hat{x}\hat{z}} = I_{\hat{z}\hat{x}} = 0$. Entonces, la ecuación 20-23 se convierte (sólo para ese instante, en la mayoría de los casos) en

$$\mathbf{H} = (I_{\hat{x}}\omega_{\hat{x}})\,\mathbf{i} + (I_{\hat{y}}\omega_{\hat{y}})\,\mathbf{j} + (I_{\hat{z}}\omega_{\hat{z}})\,\mathbf{k} \qquad \textbf{(20-24)}$$

donde $I_{\hat{x}}$, $I_{\hat{y}}$ e $I_{\hat{z}}$ son los momentos principales de inercia. Aun cuando la utilización de los ejes principales simplifica la expresión del momento cinético, no siempre resulta conveniente, por razones geométricas, utilizar dichos ejes para calcular **H**.

Por último, debemos tener presente que los vectores momento cinético **H** y velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ tendrán direcciones diferentes a menos que $\boldsymbol{\omega}$ esté dirigido según un eje principal de inercia. Por ejemplo, en el caso del movimiento plano de un cuerpo rígido que sea simétrico respecto al plano xy, el eje z es una dirección principal, I_z es un momento principal de inercia, $\boldsymbol{\omega} = \omega_z\mathbf{k}$ y la ecuación 20-24 nos da

$$\mathbf{H} = (I_z\omega_z)\,\mathbf{k} = I_z(\omega_z\mathbf{k}) = I_z\boldsymbol{\omega} \qquad \textbf{(20-25)}$$

Por tanto, los vectores **H** y $\boldsymbol{\omega}$ son colineales. En realidad, si los tres momentos principales de inercia fuesen iguales, $I_{\hat{x}} = I_{\hat{y}} = I_{\hat{z}} = \hat{I}$, la ecuación 20-24 daría

$$\mathbf{H} = \hat{I}(\omega_{\hat{x}}\mathbf{i} + \omega_{\hat{y}}\mathbf{j} + \omega_{\hat{z}}\mathbf{k}) = \hat{I}\boldsymbol{\omega} \qquad \textbf{(20-26)}$$

y los vectores **H** y $\boldsymbol{\omega}$ también serían colineales. Ahora bien, si son iguales los tres momentos principales de inercia, todo eje será eje principal de inercia. Por tanto, la ecuación 20-26 sólo es un caso particular de la 20-25 ya que cualquiera que sea la dirección de $\boldsymbol{\omega}$, coincidirá con una dirección principal.

20.6.2 Teorema del momento cinético

El teorema del momento cinético para un sistema de puntos materiales (ec. 20-4)

$$(\mathbf{H}_O)_i + \int_{t_i}^{t_f} \Sigma \mathbf{M}_{\ell/O}\, dt = (\mathbf{H}_O)_f \qquad (20\text{-}27a)$$

$$(\mathbf{H}_G)_i + \int_{t_i}^{t_f} \Sigma \mathbf{M}_{\ell/G}\, dt = (\mathbf{H}_G)_f \qquad (20\text{-}27b)$$

es aplicable a cualquier sistema de puntos materiales, tanto si consiste en un sistema de puntos en interacción que se muevan independientemente (donde **H** se calcula sumando las cantidades $\mathbf{r}_\ell \times m\mathbf{v}_\ell$ para todos los puntos) como si dichos puntos constituyen un cuerpo rígido. Si obligamos a que el punto respecto al cual se calculan los momentos de las fuerzas y el momento cinético sea el centro de masa *G* o un punto fijo *O* en torno al cual gire el cuerpo rígido, el momento cinético **H** podrá calcularse utilizando la ecuación 20-23. Si el cuerpo rígido está girando en torno a un punto fijo *O*, se podrá utilizar la ecuación 20-27*a*, con los momentos de inercia de la ecuación 20-23 calculados respecto a ejes de coordenadas centrados en el punto fijo *O*. En otro caso, deberá utilizarse la ecuación 20-27*b*, con los momentos de inercia de la ecuación 20-23 calculados respecto a ejes de coordenadas centrados en el centro de masa *G*.

Las ecuaciones que traducen el teorema del momento cinético (ec. 20-27) son especialmente útiles cuando se conoce el momento resultante del sistema de fuerzas exteriores respecto a un eje concreto. Por ejemplo, si las fuerzas exteriores que se ejercen sobre el cuerpo tienen momento nulo respecto a un eje determinado, el momento cinético respecto a dicho eje será constante. Corrientemente, cuando sobre el cuerpo se ejercen fuerzas impulsivas, sólo habrá que considerar sus momentos.

Cuando un cuerpo rígido gira en torno a un punto fijo *O* que no es el centro de masa, en el análisis habrá que considerar el impulso de la reacción si se toma el centro de masa *G* como referencia (ec. 20-27*b*). En tal caso, suele ser más conveniente tomar como referencia el punto fijo *O* ya que la reacción en *O* no tendrá momento respecto a *O* y no intervendrá en la ecuación 20-27*a*.

Tal como sucedía en la aplicación del teorema del momento cinético a un cuerpo rígido en movimiento plano, el cuerpo sólo está obligado a moverse rígidamente en los instantes inicial y final para poder utilizar la ecuación 20-23 en el cálculo del momento cinético. Entre los instantes inicial y final, las distintas partes del cuerpo se pueden mover unas respecto a otras.

20.6.3 Representación gráfica de los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético

La cantidad de movimiento y el momento cinético (impulso e impulso angular) son análogos a una fuerza y un par. Los teoremas correspondientes expresados en la forma

$$m(\mathbf{v}_G)_i + \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{R}\, dt = m(\mathbf{v}_G)_f$$

$$(\mathbf{H}_G)_i + \int_{t_i}^{t_f} \Sigma \mathbf{M}_{\ell/G}\, dt = (\mathbf{H}_G)_f$$

pueden representarse mediante los diagramas cinéticos de la figura 20-21, en los que la cantidad de movimiento y el momento cinético se han representado

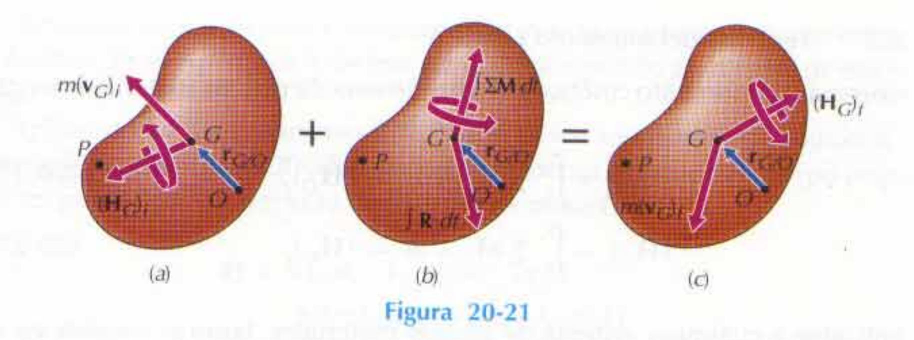


Figura 20-21

por un sistema equivalente "fuerza–par" $\mathbf{L} = m\mathbf{v}_G$ y $\mathbf{H}_G$ aplicado al centro de masa. Es decir, la suma del equivalente "fuerza-par" de la cantidad de movimiento o del momento cinético en el instante t_i (fig. 20-21*a*) más el equivalente fuerza-par del impulso o impulso angular (fig. 20-21*b*) es igual al equivalente "fuerza-par" de la cantidad de movimiento o del momento cinético en el instante t_f (fig. 20-21*c*).

La representación gráfica de la figura 20-21 se puede utilizar también para escribir el teorema del momento cinético respecto a un punto fijo arbitrario P o respecto a un punto fijo O en torno al cual gire el cuerpo. El primer enunciado se verifica de manera inmediata comparando los momentos respecto a P del equivalente "fuerza-par" de cada parte de la figura con la suma de $\mathbf{r}_{G/P} \times$ (ec. 20-2) más la ecuación 20-27*b*. El segundo enunciado se verifica de manera análoga sumando $\mathbf{r}_{G/O} \times$ (ec. 20-2) con la ecuación 20-27*b* y utilizando los teoremas de Steiner para momentos y productos de inercia (problema 20-79).

20.6.4 Sistemas de cuerpos rígidos

Ya se ha señalado que para utilizar la ecuación 20-27 basta que el cuerpo se comporte rígidamente en el instante inicial t_i y en el final t_f con lo que el momento cinético $\mathbf{H}$ en dichos instantes podrá calcularse mediante la ecuación 20-23. Entre los instantes inicial y final, las partes del cuerpo se pueden mover unas respecto a otras. Si en el instante inicial y/o el final hubiera movimiento relativo entre partes del cuerpo, habría que escribir una ecuación correspondiente al teorema del momento cinético para cada parte que se comportara como rígida y luego sumar dichas ecuaciones. Si los momentos de las cantidades de movimiento y los momentos de las fuerzas se tomaran todos relativos al mismo punto en cada ecuación, los momentos de las fuerzas de unión que

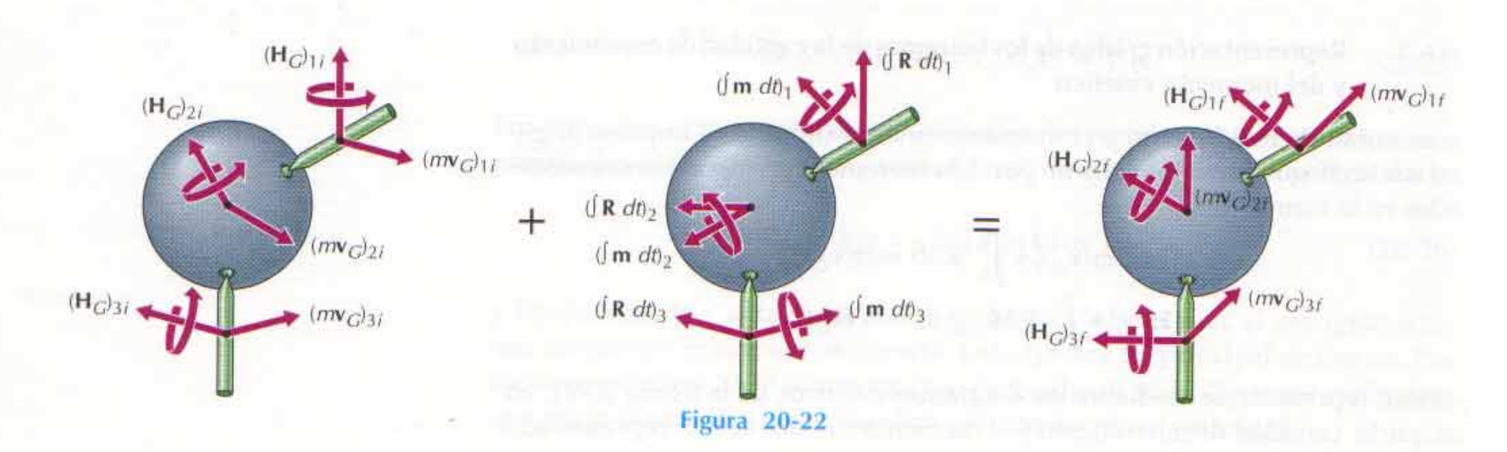


Figura 20-22

mantienen unidas las distintas partes se anularían dos a dos y no sería necesario calcularlos. Podemos lograr esto fácilmente utilizando la representación gráfica de la figura 20-22. En las partes primera y última de la figura, la cantidad de movimiento y el momento cinético de cada cuerpo rígido se han sustituido por un sistema "fuerza-par" equivalente en su centro de masa. En la parte central de la figura, las fuerzas de unión son fuerzas interiores y no es necesario representarlas.

PROBLEMA EJEMPLO 20.6

Una rueda homogénea de diámetro 800 mm, grosor 50 mm y masa 40 kg está unida rígidamente a un eje OG de longitud 1200 mm, diámetro 50 mm y masa 10 kg, según se indica en la figura 20-23. El eje pivota alrededor del punto fijo O y la rueda gira sin deslizamiento por un piso horizontal. Si el centro G de la rueda lleva una celeridad de 2 m/s durante su rotación, determinar para el instante representado:

a. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del sistema rueda-eje.
b. El momento cinético $\mathbf{H}_O$ respecto a O del sistema rueda-eje.
c. El ángulo que forman $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{H}_O$.

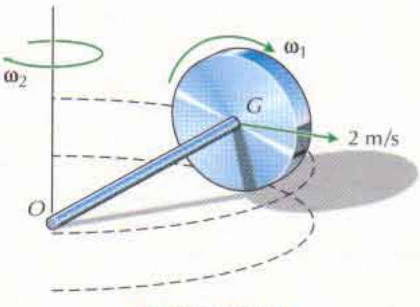


Figura 20-23

SOLUCIÓN

a. Se toma un sistema de coordenadas que tenga su eje x dirigido según OG, su eje y en el plano vertical que contiene OG y el eje z en el plano horizontal (fig. 20-24a). Éstos son ejes principales para el sistema rueda-eje. Al girar la rueda en torno al eje OG con la celeridad angular ω_1, gira también con dicho eje en torno a un eje vertical con celeridad angular ω_2. La velocidad angular total del sistema será por tanto

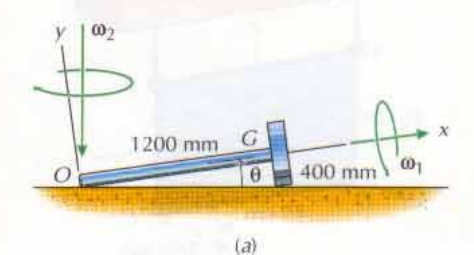
$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{i} - \omega_2(\operatorname{sen}\theta\, \mathbf{i} + \cos\theta\, \mathbf{j})$$

donde $\theta = \tan^{-1}(400/1200) = 18{,}43°$. Cuando la rueda gire un ángulo ϕ, el eje girará un ángulo γ y las longitudes de los arcos $(1{,}2/\cos\theta)\gamma$ y $(0{,}4)\phi$ serán iguales (fig. 20-24b). Por tanto, $(1{,}2/\cos\theta)\omega_2 = (0{,}4)\omega_1$ de donde $\omega_1 = 3{,}162\ \omega_2$. Pero como O está fijo,

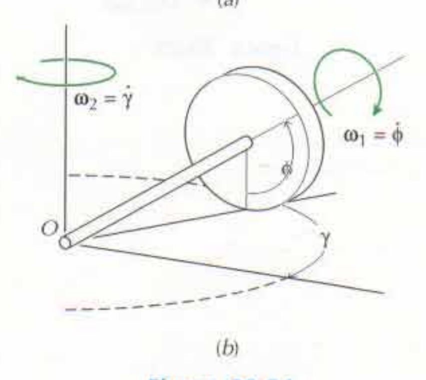
$$\mathbf{v}_G = 2{,}0\mathbf{k} = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{G/O} = \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{G/O}$$
$$= [\,(3{,}162 - \operatorname{sen}\theta)\ \omega_2\mathbf{i} - (\cos\theta)\ \omega_2\mathbf{j}] \times (1{,}2\mathbf{i})$$

Por tanto, $\omega_2 = 1{,}7568$ rad/s, $\omega_1 = 5{,}5556$ rad/s y

$$\boldsymbol{\omega} = 5{,}00\mathbf{i} - 1{,}667\mathbf{j} \text{ rad/s} \qquad \text{Resp.}$$



(a)



(b)

Figura 20-24

b. Ahora bien, como los ejes xyz son principales, el momento cinético del sistema respecto a O será

$$\mathbf{H}_O = (I_x\omega_x)\,\mathbf{i} + (I_y\omega_y)\,\mathbf{j} + (I_z\omega_z)\,\mathbf{k}$$

donde

$$I_x = \frac{1}{2}(10)(0{,}025)^2 + \frac{1}{2}(40)(0{,}400)^2$$
$$= 3{,}203 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

e

$$I_y = I_z = \frac{1}{4}(10)(0{,}025)^2 + \frac{1}{3}(10)(1{,}200)^2$$
$$+ \frac{1}{4}(40)(0{,}400)^2 + \frac{1}{12}(40)(0{,}050)^2 + (40)(1{,}225)^2$$
$$= 66{,}43 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Por tanto,

$$\mathbf{H}_O = 16{,}03\mathbf{i} - 110{,}7\mathbf{j} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$ Resp.

c. El ángulo que forman $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{H}_O$ viene dado por

$$\cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_O}{\omega H_O}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{264{,}6}{(5{,}270)(111{,}88)}\right)$$
$$= 63{,}33°$$ Resp.

PROBLEMA EJEMPLO 20.7

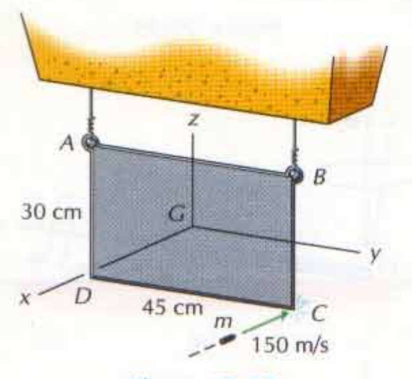


Figura 20-25

Un cartel uniforme que pesa 10 N pende de dos alambres, según se indica en la figura 20-25. El grosor del cartel es despreciable frente a sus dimensiones transversales. Una bala que pesa 0,25 N y se mueve a 150 m/s en el sentido negativo de la dirección x incide sobre el cartel en su punta C quedando incrustada. Determinar la velocidad $\mathbf{v}_G$ del centro de masa del cartel y su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ después del impacto.

SOLUCIÓN

Se escribirán por separado las ecuaciones correspondientes a los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético de la bala y del cartel y luego se sumarán. Al sumarlas, los impulsos lineal y angular de las fuerzas de interacción entre bala y cartel se anularán. En la figura 20-26 pueden verse los diagramas cinéticos combinados en los que se ha omitido el impulso de la fuerza de interacción entre la bala y el cartel.

Cantidad de movimiento: Inicialmente, el cartel está en reposo y no tiene cantidad de movimiento $(\mathbf{L}_c)_i = \mathbf{0}$. Tras el impacto, la cantidad de movimiento del cartel es $(\mathbf{L}_c)_f = M\mathbf{v}_G$ donde $M = 10/9{,}81$ kg es la masa del cartel y $\mathbf{v}_G$ es la velocidad de su centro de masa inmediatamente después del impacto. Las cantidades de movimiento inicial y final de la bala son:

$$(\mathbf{L}_b)_i = -150m\mathbf{i} = -3{,}823\mathbf{i} \text{ N} \cdot \text{s}$$
$$(\mathbf{L}_b)_f = m\,[\mathbf{v}_G + (\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}) \times (0{,}225\mathbf{j} - 0{,}15\mathbf{k})]$$
$$= m\,[\mathbf{v}_G - (0{,}15\omega_y + 0{,}225\omega_z)\,\mathbf{i} + 0{,}1\,(5)\,\omega_x\mathbf{j} + 0{,}225\omega_x\mathbf{k}]$$

donde $m = 0{,}25/9{,}81$ kg es la masa de la bala, $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$ es la velocidad angular del cartel inmediatamente después del impacto y se ha sustituido la ve-

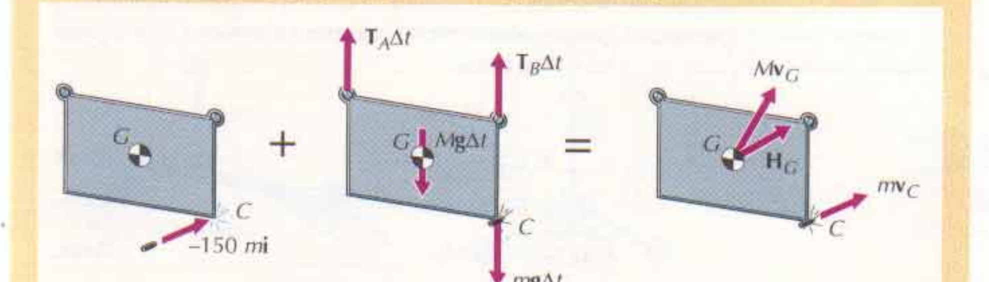


Figura 20-26

locidad de la bala usando la ecuación de la velocidad relativa $\mathbf{v} = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{C/G}$. Entonces, las componentes x, y y z que se obtienen del teorema de la cantidad de movimiento son

$$-150\text{ m} = (m+M)\,v_{Gx} - m(0{,}15\omega_y + 0{,}225\omega_z) \qquad (a)$$

$$0 = (m+M)\,v_{Gy} + 0{,}15\omega_x \qquad (b)$$

$$(T_A + T_B - 10{,}25)\,\Delta t = (m+M)\,v_{Gz} + 0{,}225\omega_x \qquad (c)$$

Momento cinético respecto a G: Inicialmente, el cartel está en reposo y no tiene momento cinético $(\mathbf{H}_{Gc})_i = \mathbf{0}$. Como los ejes x, y y z son ejes principales, el momento cinético del cartel después del impacto será $(\mathbf{H}_{Gc})_f = I_x\omega_x\mathbf{i} + I_y\omega_y\mathbf{j} + I_z\omega_z\mathbf{k}$ donde

$$I_x = \frac{1}{12}\left(\frac{10}{9{,}81}\right)(0{,}45^2 + 0{,}30^2) = 0{,}02485\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_y = \frac{1}{12}\left(\frac{10}{9{,}81}\right)(0{,}30^2) = 0{,}007645\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_z = \frac{1}{12}\left(\frac{10}{9{,}81}\right)(0{,}45^2) = 0{,}017202\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

El momento cinético de la bala respecto a G antes del impacto es el momento de su cantidad de movimiento

$$(\mathbf{H}_{Gb})_i = (0{,}225\mathbf{j} - 0{,}15\mathbf{k}) \times m(-150\mathbf{i})$$
$$= 0{,}5734\mathbf{j} + 0{,}8601\mathbf{k}\text{ m}\cdot\text{N}\cdot\text{s}$$

Análogamente,

$$(\mathbf{H}_{Gb})_f = (0{,}225\mathbf{j} - 0{,}15\mathbf{k}) \times m\,[\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times (0{,}225\mathbf{j} - 0{,}15\mathbf{k})]$$

Entonces, el teorema del momento cinético da

$$(T_B - T_A - 0{,}25)\,(0{,}225)\,\Delta t = I_x\omega_x + 0{,}225mv_{Gz} + 0{,}15mv_{Gy} + (0{,}225^2 + 0{,}15^2)\,m\omega_x \qquad (d)$$

$$0{,}5734 = I_y\omega_y - 0{,}15mv_{Gx} + 0{,}15m(0{,}15\omega_y + 0{,}225\omega_z) \qquad (e)$$

$$0{,}8601 = I_z\omega_z - 0{,}225mv_{Gx} + 0{,}225m(0{,}15\omega_y + 0{,}225\omega_z) \qquad (f)$$

El sistema de ecuaciones de a a f se resuelve sometido a las siguientes restricciones: los alambres son inextensibles (ni A ni B pueden tener componente de la velocidad según el sentido negativo de las z después del impacto); las tensiones T_A y T_B no pueden ser negativas (los alambres no pueden resistir fuerzas compresivas) y si A o B tuviera una componente de la velocidad en el sentido posi-

tivo de las z inmediatamente después del impacto, la correspondiente tensión T_A o T_B sería nula. Suponiendo que los alambres se mantienen tensos (T_A y T_B son ambas positivas) y que $v_{Gz} = \omega_x = 0$ se tiene

$$v_{Gx} = -3{,}39 \text{ m/s} \qquad \text{Resp.}$$

$$v_{Gy} = v_{Gz} = \omega_x = 0 \qquad \text{Resp.}$$

$$\omega_y = 64{,}0 \text{ rad/s} \qquad \text{Resp.}$$

$$\omega_z = 42{,}5 \text{ rad/s} \qquad \text{Resp.}$$

Por último, aplicando esta solución en las ecuaciones c y d se tiene $T_A = 5{,}00$ N y $T_B = 5{,}25$ N, lo que comprueba que ambos alambres están tensos. Además, se comprueba fácilmente que $\mathbf{v}_A = 16\mathbf{i}$ m/s y $\mathbf{v}_B = -3\mathbf{i}$ m/s, por lo que ni A ni B tienen velocidad con componente z.

PROBLEMAS

20-49 a 20-59 Determinar, para cada uno de los objetos representados, el momento cinético $\mathbf{H}_O$ (donde O es el origen de coordenadas) y el ángulo que forman los vectores velocidad angular y momento cinético en el instante representado. Despréciense las masas de los árboles sobre los que estén montadas las esferas, placas, etc.

20-49* La varilla doblada de la figura P20-49 que pesa 3,33 N/m.

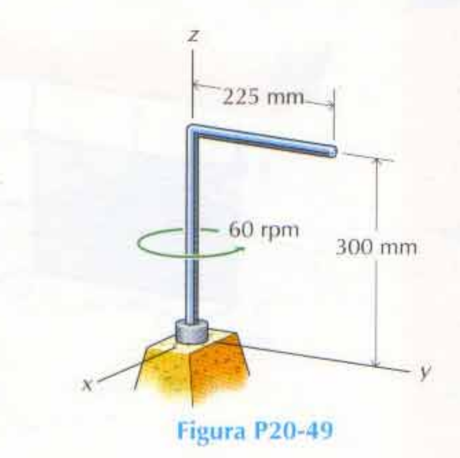


Figura P20-49

20-50* La varilla con ramas de la figura P20-50 que tiene una masa de 0,25 kg/m.

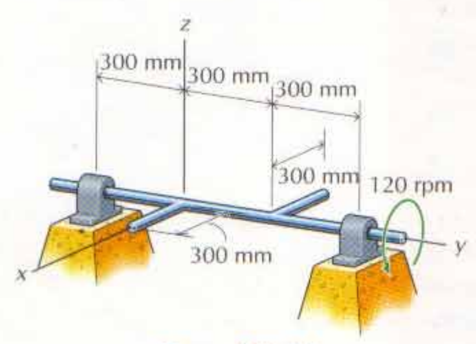


Figura P20-51

20-51 El disco delgado de la figura P20-51 que tiene un radio de 250 mm, pesa 10 N y está montado sobre un eje situado a 175 mm del centro.

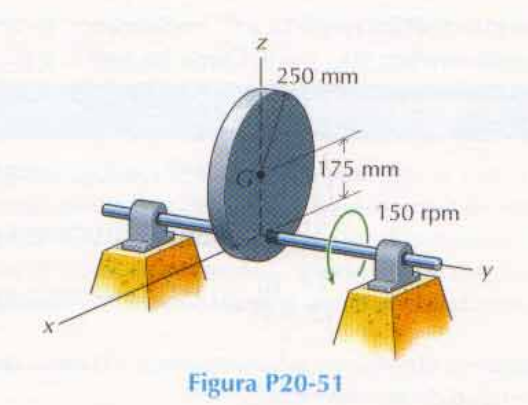


Figura P20-51

20-52 La placa rectangular delgada de la figura P20-52 que tiene 300 mm de altura, 800 mm de longitud y una masa de 5 kg.

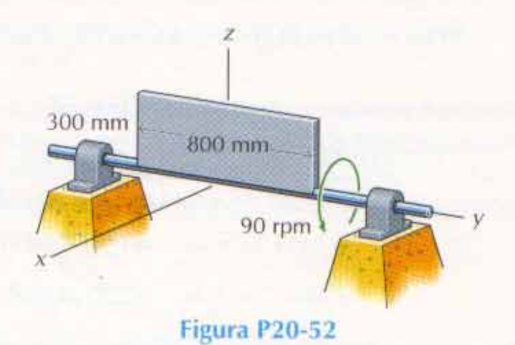


Figura P20-52

20-53 Las tres esferas iguales de la figura P20-53 que cada una pesa 10 N y tiene un diámetro de 10 cm. Sus centros están a 25 cm del eje del árbol y están situadas simétricamente en torno a él.

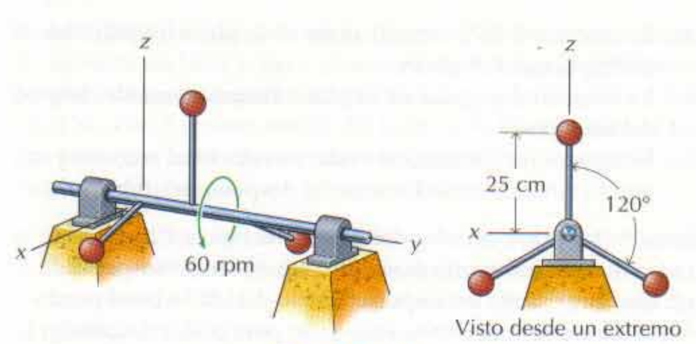


Figura P20-53

20-54* El cilindro *AB* de 1,5 kg de la figura P20-54 que tiene un diámetro de 50 mm y una generatriz de 200 mm. Está montado sobre un disco delgado de 400 mm de radio y masa 0,5 kg. La separación entre el eje del cilindro y el del árbol es de 300 mm.

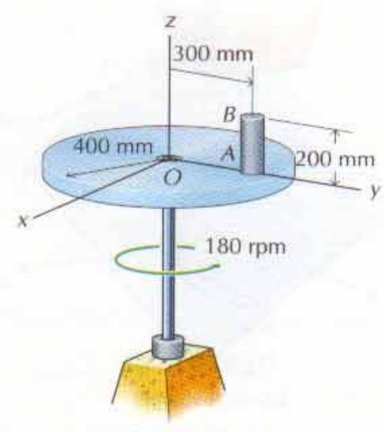


Figura P20-54

20-55 La varilla doblada de la figura P20-55 que tiene un diámetro de 12,5 mm, pesa 3,33 N/m y su longitud es de 450 mm.

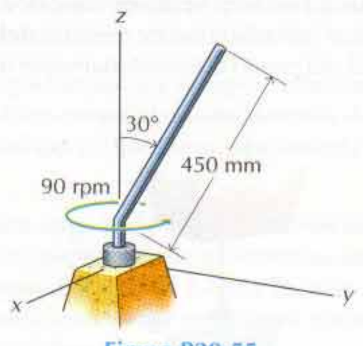


Figura P20-55

20-56* La barra de 100 mm de longitud representada en la figura P20-56 que tiene 20 mm de diámetro, una masa de 3 kg y está montada formando un ángulo de 30° con el eje del árbol.

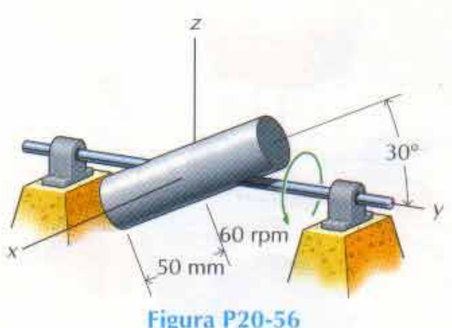


Figura P20-56

20-57 La placa circular delgada de la figura P20-57 que tiene un radio de 225 mm y pesa 7,5 N. El plano de la placa forma un ángulo de 60° con el eje del árbol.

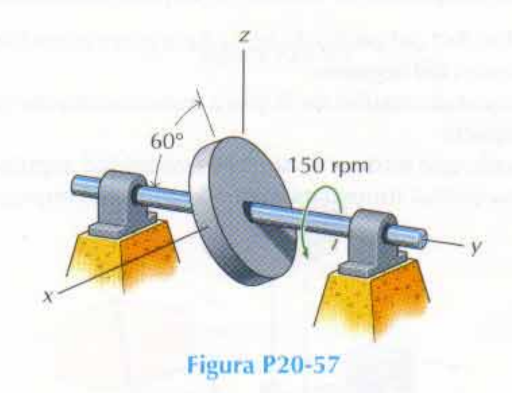


Figura P20-57

20-58* La placa rectangular delgada (300 mm por 800 mm) de la figura P20-58 que tiene una masa de 5 kg y gira en torno a un árbol coincidente con una diagonal.

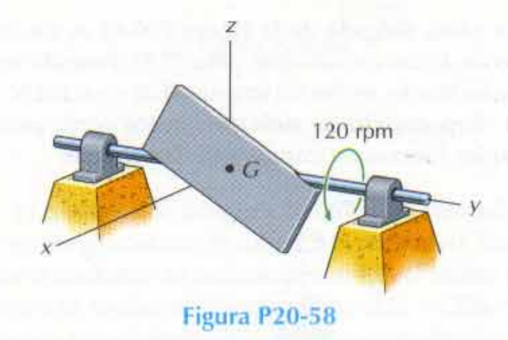


Figura P20-58

20-59 El cilindro de revolución de 30 cm de generatriz, representado en la figura P20-59, que tiene un diámetro de 15 cm, pesa 20 N y gira en torno a un árbol dirigido a lo largo de su "diagonal" según se indica.

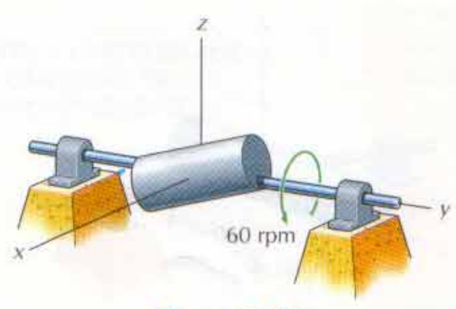


Figura P20-59

20-60* La placa rectangular delgada de la figura P20-60 tiene 300 mm de altura, 800 mm de anchura y una masa de 5 kg. Estando en equilibrio sobre un borde, recibe un impulso $\mathbf{F}\Delta t = -10\mathbf{i}$ N · s en su vértice *C*. Suponiendo Δt suficientemente corto para poder despreciar las fuerzas no impulsivas, determinar:

a. La velocidad del centro de masa de la placa inmediatamente después del impacto.
b. La velocidad angular de la placa inmediatamente después del impacto.
c. El ángulo que forman los vectores velocidad angular y momento cinético inmediatamente después del impacto.

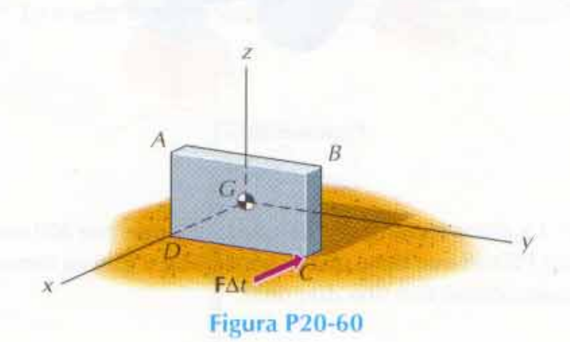


Figura P20-60

20-61 La placa delgada de la figura P20-61 es un triángulo equilátero de 45 cm de lado que pesa 25 N. Estando en equilibrio sobre un borde, recibe un impulso $\mathbf{F}\Delta t = -0{,}75\mathbf{i}$ N · s en su vértice *A*. Suponiendo Δt suficientemente corto para poder despreciar las fuerzas no impulsivas, determinar:

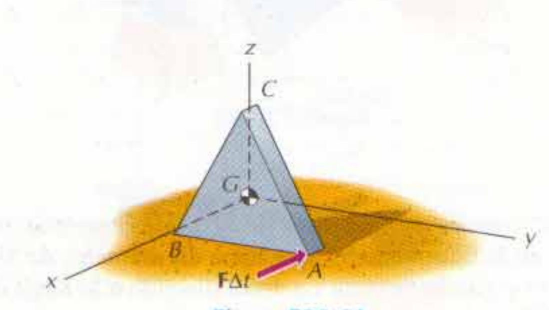


Figura P20-61

a. La velocidad del centro de masa de la placa inmediatamente después del impacto.
b. La velocidad angular de la placa inmediatamente después del impacto.
c. El ángulo que forman los vectores velocidad angular y momento cinético inmediatamente después del impacto.

20-62* La placa circular delgada de la figura P20-62 tiene un radio de 300 mm y una masa de 2 kg. Estando suspendida de un alambre, recibe un impulso $\mathbf{F}\Delta t = -1{,}4\mathbf{i}$ N · s en el punto *A*. Suponiendo Δt suficientemente corto para poder despreciar las fuerzas no impulsivas, determinar:

a. El ángulo que forman los vectores velocidad angular y momento cinético inmediatamente después del impacto.
b. La velocidad del punto *A* inmediatamente después del impacto.

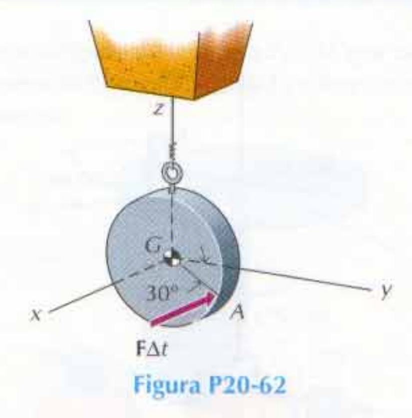


Figura P20-62

20-63 La placa cuadrada delgada de la figura P20-63 tiene 15 cm de lado y pesa 10 N. Estando suspendida de un alambre unido al punto medio del lado *AB*, recibe un impulso $\mathbf{F}\Delta t = -0{,}25\mathbf{i}$ N · s en su vértice *C*. Suponiendo Δt suficientemente corto para poder despreciar las fuerzas no impulsivas, determinar:

a. El ángulo que forman los vectores velocidad angular y momento cinético inmediatamente después del impacto.
b. La velocidad del punto *C* inmediatamente después del impacto.

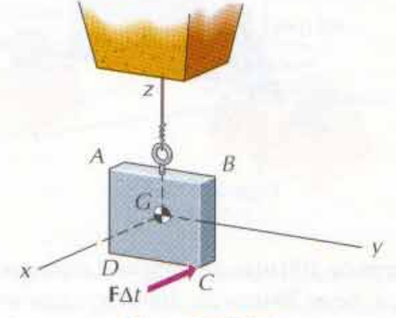


Figura P20-63

20-64* La placa delgada de la figura P20-64 es un cuadrado de 200 mm de lado y tiene una masa de 1,5 kg. Estando suspendida de un hilo unido al vértice *A*, recibe un impulso $\mathbf{F}\Delta t = -2{,}5\mathbf{i}$ N · s en *E* (punto medio del lado *AD*). Suponiendo Δt suficientemente corto para poder despreciar las fuerzas no impulsivas, determinar:

a. El ángulo que forman los vectores velocidad angular y momento cinético inmediatamente después del impacto.
b. La velocidad del vértice *C* inmediatamente después del impacto.

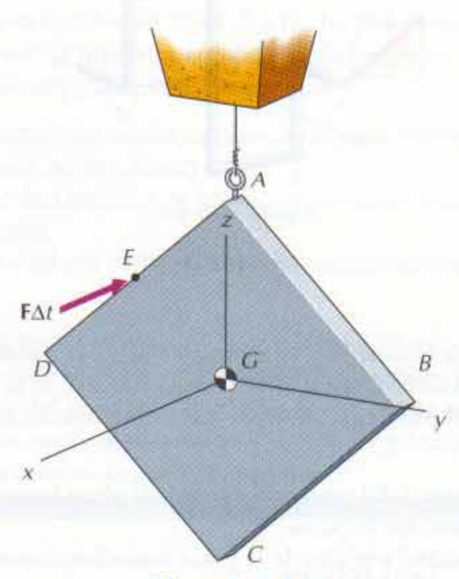


Figura P20-64

20-65 La placa delgada de la figura P20-65 es un rectángulo de 225 mm de altura y 450 mm de anchura que pesa 12,5 N. Estando suspendida de un alambre unido al vértice *A*, recibe un impulso $\mathbf{F}\Delta t = -0{,}5\mathbf{i}$ N · s en el vértice *D*. Suponiendo Δt suficientemente corto para poder despreciar las fuerzas no impulsivas, determinar:

a. El ángulo que forman los vectores velocidad angular y momento cinético inmediatamente después del impacto.
b. La velocidad del vértice *D* inmediatamente después del impacto.

20-66* La placa delgada de la figura P20-66 tiene una masa de 1,2 kg. Estando suspendida de un alambre unido a su borde, recibe un impulso $\mathbf{F}\Delta t = 0{,}5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 0{,}8\mathbf{k}$ N · s en su vértice *C*. Suponiendo Δt suficientemente corto para poder despreciar las fuerzas no impulsivas, determinar:

a. El ángulo que forman los vectores velocidad angular y momento cinético inmediatamente después del impacto.
b. La velocidad del vértice *C* inmediatamente después del impacto.

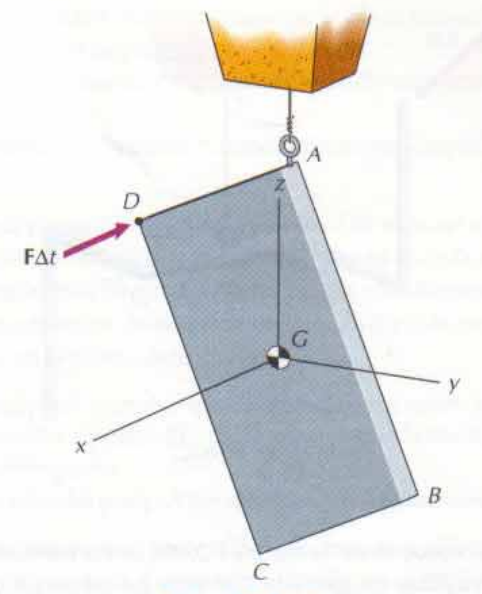


Figura P20-65

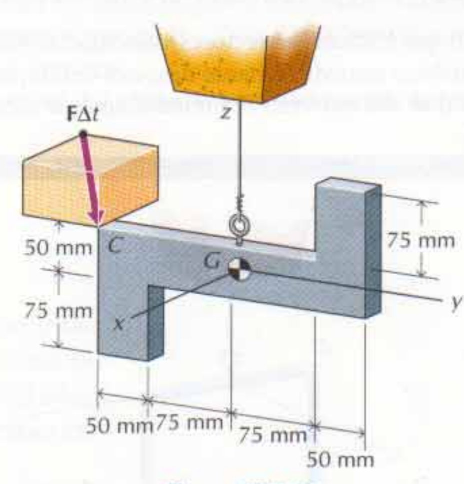


Figura P20-66

20-67 El conjunto de la figura P20-67 se ha formado uniendo cinco varillas iguales (de 30 cm y 2,5 N cada una). Estando suspendido el conjunto de un alambre unido al punto medio del segmento *CD*, recibe un impulso $\mathbf{F}\Delta t = 0{,}5\mathbf{j} - 0{,}25\mathbf{k}$ N · s en *A*. Suponiendo Δt suficientemente corto para poder despreciar las fuerzas no impulsivas, determinar:

a. El ángulo que forman los vectores velocidad angular y momento cinético inmediatamente después del impacto.
b. La velocidad del extremo *A* inmediatamente después del impacto.

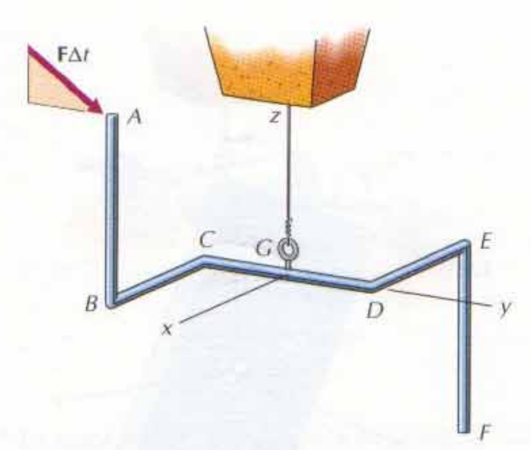


Figura P20-67

20-68* El conjunto de la figura P20-68 se ha formado uniendo cinco varillas iguales (de 300 mm de longitud y 0,25 kg cada una). Estando suspendido el conjunto de un alambre unido al punto medio del segmento *CD*, recibe un impulso $\mathbf{F}\Delta t = 0{,}5\mathbf{j} - 0{,}25\mathbf{k}$ N · s en *A*. Suponiendo Δt suficientemente corto para poder despreciar las fuerzas no impulsivas, determinar:

a. El ángulo que forman los vectores velocidad angular y momento cinético inmediatamente después del impacto.
b. La velocidad del extremo *A* inmediatamente después del impacto.

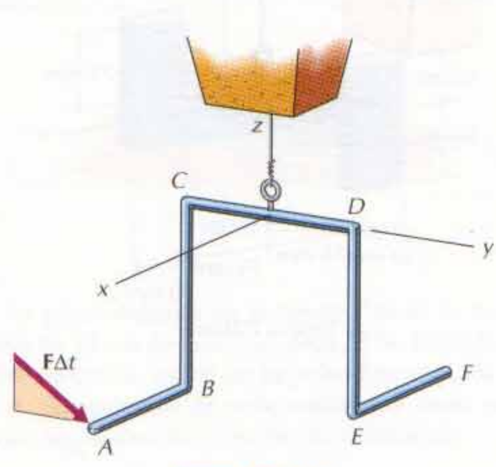


Figura P20-68

20-69 El conjunto de la figura P20-69 se ha formado uniendo seis varillas iguales (375 mm de longitud y 3 N cada una) a otra varilla (*DK*: 750 mm de longitud y 6 N). Estando suspendido el conjunto de un alambre unido al codo *K*, recibe un impulso $\mathbf{F}\Delta t = 0{,}75\mathbf{j} - 0{,}5\mathbf{k}$ N · s en *A*. Suponiendo Δt suficientemente corto para poder despreciar las fuerzas no impulsivas, determinar:

a. El ángulo que forman los vectores velocidad angular y momento cinético inmediatamente después del impacto.
b. La velocidad del extremo *A* inmediatamente después del impacto.

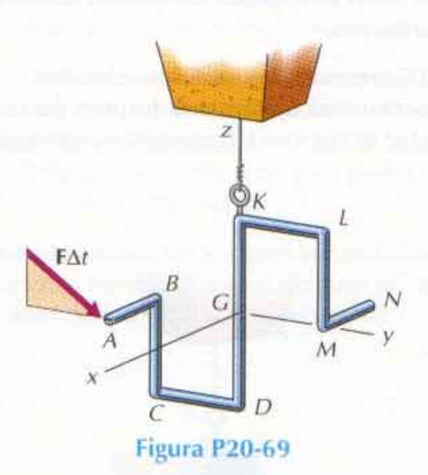


Figura P20-69

20-70* Una bala de 50 g se mueve a 150 m/s en el sentido negativo de la dirección *x* e incide en el vértice *C* de la placa rectangular del problema 20-60. Si queda incrustada en la placa, determinar:

a. La velocidad del centro de masa de la placa inmediatamente después del impacto.
b. La velocidad angular de la placa inmediatamente después del impacto.
c. La velocidad del vértice *C* inmediatamente después del impacto.

20-71 Una bala que pesa 0,4 N se mueve a 180 m/s en el sentido negativo de la dirección *x* e incide en el vértice *A* de la placa triangular del problema 20-61. Si queda incrustada en la placa, determinar:

a. La velocidad del centro de masa de la placa inmediatamente después del impacto.
b. La velocidad angular de la placa inmediatamente después del impacto.
c. La velocidad del vértice *A* inmediatamente después del impacto.

20-72* Una bala de 30 g se mueve a 180 m/s en el sentido negativo de la dirección *x* e incide en el punto *A* de la placa circular del problema 20-62. Si queda incrustada en la placa, determinar:

a. El módulo del impulso que la bala ejerce sobre la placa.
b. El momento cinético $\mathbf{H}_G$ de la placa inmediatamente después del impacto.
c. La velocidad del punto *A* inmediatamente después del impacto.

20-73 Una bala que pesa 0,25 N se mueve a 240 m/s en el sentido negativo de la dirección x e incide en el vértice C de la placa cuadrada del problema 20-63. Si queda incrustada en la placa, determinar:

a. El módulo del impulso que la bala ejerce sobre la placa.
b. El momento cinético $\mathbf{H}_G$ de la placa inmediatamente después del impacto.
c. La velocidad del vértice C inmediatamente después del impacto.

20-74* Una flecha de 125 g se mueve a 100 m/s en el sentido negativo de la dirección x e incide en el vértice A de la placa rectangular del problema 20-60. (La flecha puede considerarse que es una varilla uniforme de 800 mm de longitud). Si la punta queda clavada en la placa, determinar:

a. La velocidad del centro de masa de la placa inmediatamente después del impacto.
b. La velocidad angular de la placa inmediatamente después del impacto.
c. La velocidad del vértice C inmediatamente después del impacto.

20-75 Una flecha que pesa 1 N se mueve a 90 m/s en el sentido negativo de la dirección x e incide en el vértice A de la placa triangular del problema 20-61. (La flecha puede considerarse que es una varilla uniforme de 80 cm de longitud.) Si la punta queda clavada en la placa, determinar:

a. La velocidad del centro de masa de la placa inmediatamente después del impacto.
b. La velocidad angular de la placa inmediatamente después del impacto.
c. La velocidad del vértice A inmediatamente después del impacto.

20-76* Una flecha de 100 g se mueve a 150 m/s en el sentido negativo de la dirección x e incide en el punto A de la placa circular del problema 20-62. (La flecha puede considerarse que es una varilla uniforme de 800 mm de longitud.) Si la punta queda clavada en la placa, determinar:

a. El módulo del impulso que la flecha ejerce sobre la placa.
b. El momento cinético $\mathbf{H}_G$ de la placa inmediatamente después del impacto.
c. La velocidad del punto A inmediatamente después del impacto.

20-77 Una flecha que pesa 1,25 N se mueve a 120 m/s en el sentido negativo de la dirección x e incide en el vértice C de la placa cuadrada del problema 20-63. (La flecha puede considerarse que es una varilla uniforme de 80 cm de longitud.) Si la punta queda clavada en la placa, determinar:

a. El módulo del impulso que la flecha ejerce sobre la placa.
b. El momento cinético $\mathbf{H}_G$ de la placa inmediatamente después del impacto.
c. La velocidad del vértice C inmediatamente después del impacto.

RESUMEN

Los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético dan integrales de las ecuaciones del movimiento respecto al tiempo. Son especialmente útiles para resolver problemas en los que hay que relacionar las velocidades de un cuerpo en dos instantes diferentes, pudiéndose expresar las fuerzas en función del tiempo.

La cantidad de movimiento de un sistema de puntos materiales, rígido o no, es el producto de su masa por la velocidad de su centro de masa $\mathbf{L} = m\mathbf{v}_G$. Por tanto, el teorema de la cantidad de movimiento expresado por la ecuación 20-2

$$m(\mathbf{v}_G)_i + \sum_\ell \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{R}_\ell \, dt = m(\mathbf{v}_G)_f \qquad \textbf{(20-2)}$$

puede aplicarse tanto a un sistema de puntos materiales independientes en interacción, como a un cuerpo rígido.

El momento cinético de un punto material se puede calcular respecto a un punto cualquiera, fijo o móvil. En el caso de un sistema arbitrario de puntos materiales en interacción, los puntos se mueven independientemente y la expresión del teorema del momento cinético respecto a un punto fijo O suele ser la más útil. En cambio, en el caso de un cuerpo rígido las velocidades de sus puntos están relacionadas mediante la velocidad angular y la expresión del

teorema del momento cinético respecto al centro de masa suele ser ahora la más útil.

En el caso de movimiento plano, $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ y el momento cinético de un cuerpo rígido es

$$\mathbf{H}_G = -\omega I_{Gxz}\mathbf{i} - \omega I_{Gyz}\mathbf{j} + \omega I_{Gz}\mathbf{k} \quad (20\text{-}5)$$

Si los productos de inercia I_{Gxz} e I_{Gyz} no son nulos, el momento cinético tendrá también componentes x e y, incluso si el movimiento es plano. Esto significa que serán necesarias componentes de los momentos en las direcciones x y/o y que mantengan el movimiento en el plano xy si es variable el módulo de la velocidad angular.

Cuando chocan cuerpos rígidos, el coeficiente de restitución relaciona las velocidades relativas de los puntos de contacto antes y después del choque. Como los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético entrañan las velocidades de los centros de masa de los cuerpos rígidos, habrá que relacionar las velocidades de los puntos de contacto con las de los mencionados centros de masa utilizando las ecuaciones de las velocidades relativas.

PROBLEMAS DE REPASO

20-78* Cada una de las cuatro ruedas del carretón representado en la figura P20-78 es un disco uniforme de 500 mm de diámetro y masa 5 kg. Si el carretón y su carga agregan 30 kg a la masa total, determinar la celeridad que alcanzará el carretón 10 s después de partir del reposo.

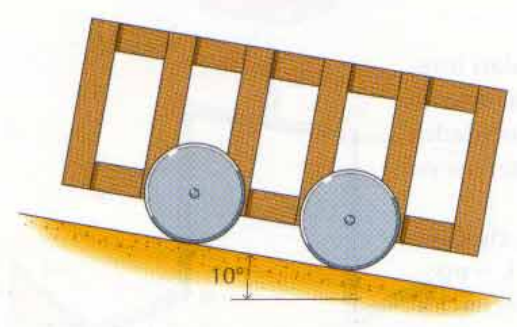


Figura P20-78

20-79* Cuando un disco LP cae sobre un plato que gira (fig. P20-79), se desliza un corto tiempo antes de alcanzar su celeridad final de $33\frac{1}{3}$ rpm. El disco tiene un diámetro de 30 cm y una masa de 56,7 g. Si el coeficiente de rozamiento entre disco y plato es $\mu_k = 0{,}2$, determinar el tiempo durante el cual se deslizará el disco. (Supóngase que la fuerza de contacto entre plato y disco se distribuye uniformemente sobre la superficie del disco.)

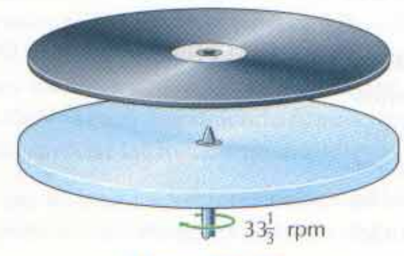


Figura P20-79

20-80 Una barra esbelta uniforme AB de 1,5 kg pende verticalmente de un pivote con rozamiento, según se indica en la figura P20-80. Una flecha de 125 g que se mueve a 100 m/s incide sobre un punto de la barra situado 500 mm bajo el pivote. La flecha puede considerarse que es una varilla uniforme de 800 mm de longitud. Si la punta queda clavada en la barra, determinar:

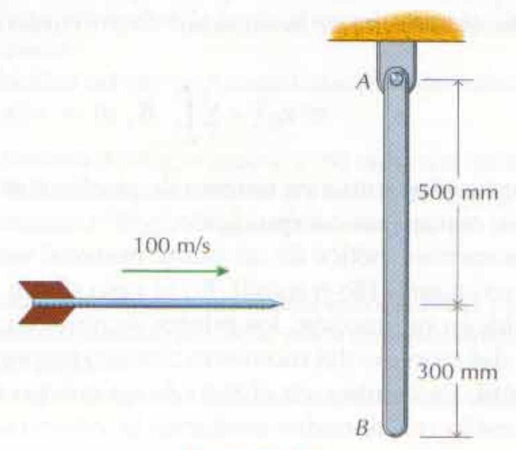


Figura P20-80

a. La velocidad angular ω del sistema inmediatamente después del impacto.
b. El momento medio que la barra AB ejerce sobre la flecha si la duración del impacto es $\Delta t = 0{,}01$ s.

20-81* Una caja cuadrada se desliza por un piso exento de rozamiento y choca contra un obstáculo A según se indica en la figura P20-81. Si la caja gira en torno a A después del impacto, determinar:

a. La mínima celeridad v_0 para la cual la caja volcará del todo.
b. La velocidad $\mathbf{v}_G$ y la velocidad angular ω de la caja inmediatamente después del impacto.

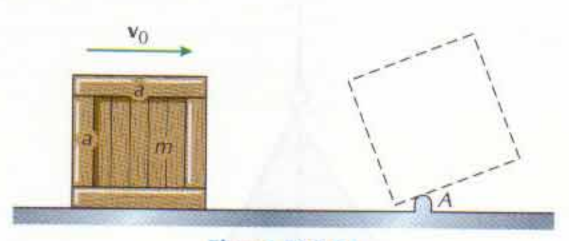


Figura P20-81

20-82* Determinar la altura h a la cual el taco de la figura P20-82 debe golpear a la bola de billar para que ésta ruede sin deslizamiento y sin ayuda del rozamiento. (Supóngase que el taco sólo ejerce fuerza horizontal sobre la bola.)

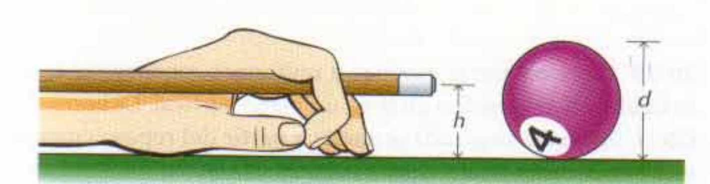


Figura P20-82

20-83 El tractor de tracción trasera representado en la figura P20-83 tiene unas ruedas motrices de 1,5 m de diámetro. Las dos ruedas giran conjuntamente y tienen un peso combinado de 5 kN y un radio de giro centroidal respecto al eje $k_G = 0{,}45$ m. El resto del tractor pesa 10 kN y su centro de masa se halla 0,45 m por encima del eje trasero. Si el tractor pasa de 0 a 3 km/h en 3 s, determinar:

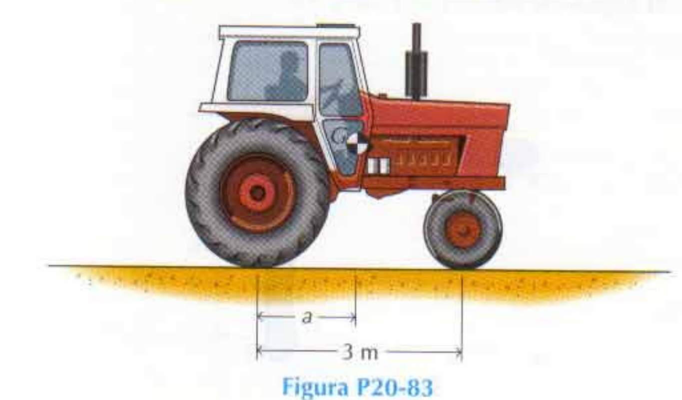


Figura P20-83

a. La fuerza media de rozamiento que el suelo ejerce sobre los neumáticos de las ruedas motrices.
b. El momento medio aplicado al eje de las ruedas traseras.
c. La mínima distancia a que debe haber entre el eje trasero y el centro de gravedad del tractor para que éste no vuelque.

20-84 La placa delgada de la figura P20-84 es un hexágono regular de 300 mm de lado y masa 2 kg. Estando en equilibrio sobre el borde, incide sobre su vértice B una bala de 60 g que se mueve a 250 m/s en el sentido negativo de la dirección x. Si queda incrustada en la placa, determinar:

a. La velocidad $\mathbf{v}_G$ del centro de masa de la placa inmediatamente después del impacto.
b. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la placa inmediatamente después del impacto.
c. La velocidad del vértice B inmediatamente después del impacto.

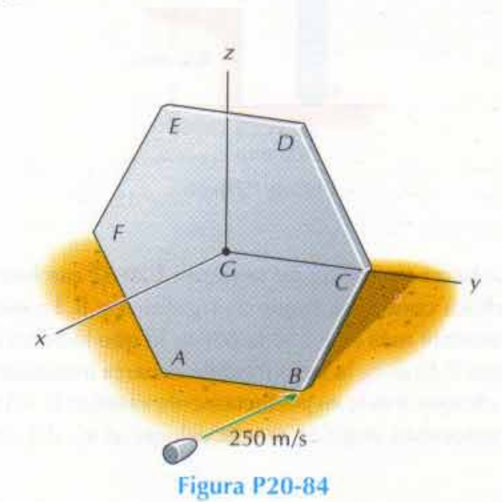


Figura P20-84

20-85* La esfera A de la figura P20-85 está rodando sin deslizamiento por una superficie horizontal cuando choca frontalmente con otra esfera igual B que está en reposo. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre las esferas y el plano horizontal es $\mu_k = 0{,}4$ y el choque es perfectamente elástico ($e = 1$), determinar:



Figura P20-85

a. Las velocidades lineales y angulares de las esferas inmediatamente después del choque.
b. Las velocidades de las esferas cuando rueden sin deslizamiento después del choque.

20-86* Una barra esbelta de 2 m y 5 kg se halla inicialmente en equilibrio sobre un extremo, según se indica en la figura P20-86. Al perturbarla, cae primeramente contra el escalón *C* de canto vivo y luego gira en torno a *C*. Determinar:

a. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la barra y la velocidad $\mathbf{v}_G$ de su centro de masa inmediatamente después del impacto con *C*.
b. La velocidad angular de la barra cuando *B* choque con la superficie horizontal.

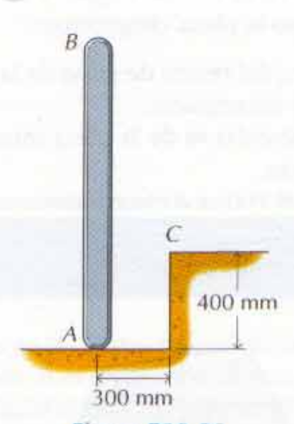


Figura P20-86

20-87 La barra uniforme de la figura P20-87 cae horizontalmente y choca contra las esquinas rígidas *A* y *B*. La esquina *A* está ligeramente más baja que la *B*, por lo que la barra chocará primero con *B*. Si es v_0 la velocidad de la barra inmediatamente antes del choque y éste es perfectamente elástico ($e = 1$), determinar la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la velocidad $\mathbf{v}_G$ del centro de masa:

a. Inmediatamente después de chocar con la esquina *B*.
b. Inmediatamente después de chocar con la esquina *A*.

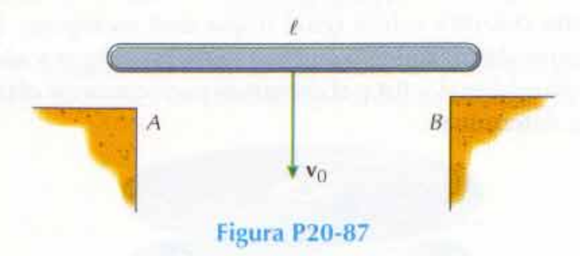


Figura P20-87

20-88* La placa delgada de la figura P20-88 es un triángulo equilátero de 300 mm de lado y masa 2 kg. Estando en reposo y suspendida de un alambre, incide en el vértice *B* una flecha de 125 g que se mueve a 100 m/s en el sentido negativo de la dirección *x*. (La flecha puede considerarse que es una varilla uniforme de 800 mm de longitud.) Si la punta queda clavada en la placa, determinar:

a. La velocidad del centro de masa de la placa inmediatamente después del impacto.
b. La velocidad angular de la placa inmediatamente después del impacto.
c. El momento medio que la placa ejerce sobre la flecha si la duración del impacto es $\Delta t = 0{,}02$ s.

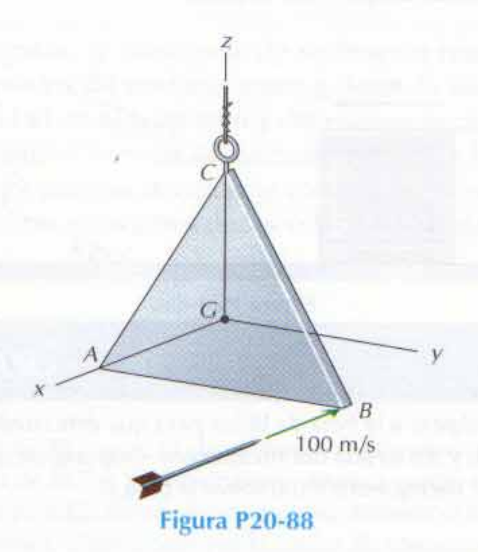


Figura P20-88

20-89 Las dos barras esbeltas y uniformes representadas en la figura P20-89 pueden girar en un plano vertical. La barra *AB* (25 N, 0,6 m de longitud) se suelta a partir del reposo cuando está horizontal y choca contra la barra *CD* (40 N, 0,6 m de longitud) que está vertical. Si el coeficiente de restitución es $e = 0{,}8$, determinar:

a. Las velocidades angulares de las barras inmediatamente después del choque.
b. El máximo ángulo que describirá *CD* después del choque.
c. El ángulo de rebote de la barra *AB*.



Figura P20-89

20-90* Una esfera uniforme de 8 kg y 400 mm de diámetro rueda sin deslizamiento por una superficie horizontal y choca con un escalón de 100 mm de altura, según se indica en la figura P20-90. El choque con el escalón es perfectamente plástico y la esfera rueda en torno al borde del escalón después del choque. Determinar:

a. La velocidad angular ω y la velocidad $\mathbf{v}_G$ del centro de masa de la esfera inmediatamente después del choque, si la celeridad inicial de la esfera era $v_0 = 2{,}5$ m/s.
b. La energía cinética perdida en el choque.
c. La mínima celeridad inicial v_0 para la cual la esfera seguirá rodando por el nivel superior.

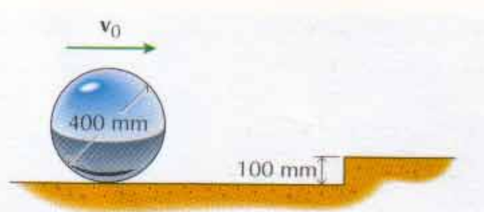
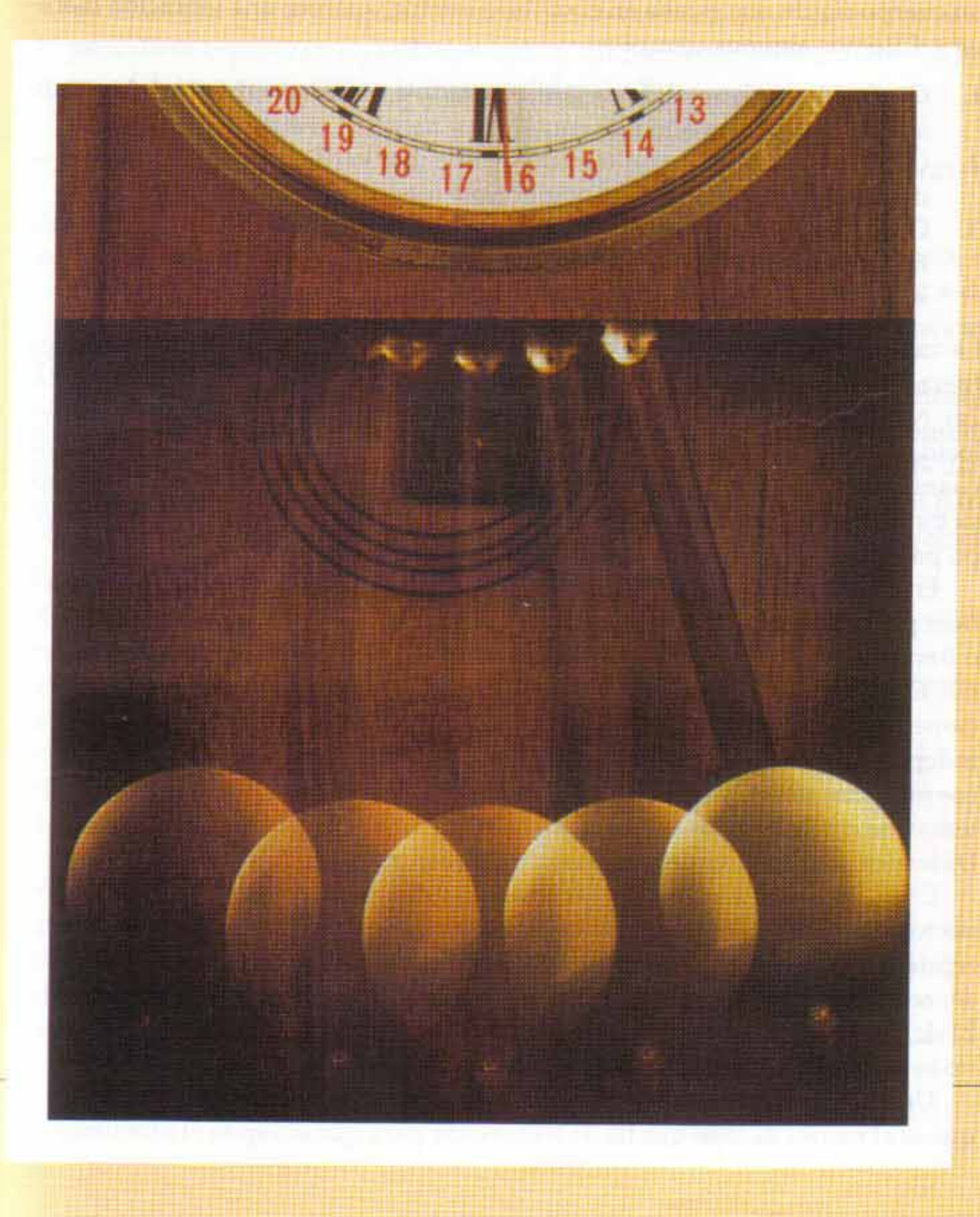


Figura P20-90

21 VIBRACIONES MECÁNICAS



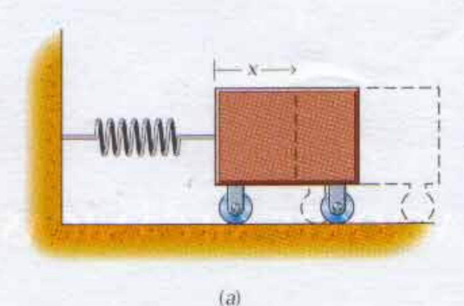
El movimiento vibratorio del péndulo se utiliza para regular un reloj.

21.1 INTRODUCCIÓN

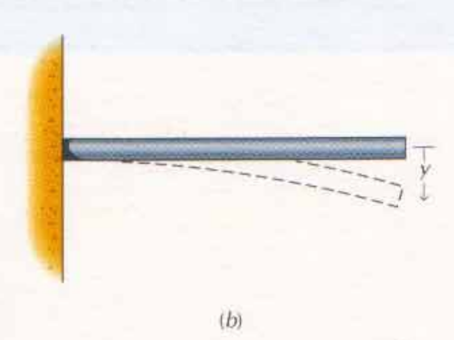
Una vibración mecánica es la oscilación repetida de un punto material o de un cuerpo rígido en torno a una posición de equilibrio. En muchos dispositivos conviene que haya movimientos vibratorios y se generan deliberadamente; por ejemplo, el péndulo utilizado para regular un reloj, una cuerda pulsada de una guitarra o de un piano, el vibrador que se utiliza para dar una forma compacta al hormigón, etc. En tales problemas, el ingeniero tiene por misión crear y regular las vibraciones. En cambio, en la maquinaria rotatoria y en las estructuras, la mayoría de las vibraciones son nocivas. Si no se equilibran bien las piezas de una máquina rotatoria, vibrarán. Las vibraciones pueden resultar molestas para el operario de la máquina y dañar a ésta y a su apoyo. Las vibraciones que se producen en las estructuras a causa de terremotos o de la circulación de vehículos próximos pueden dañar a aquélla e incluso destruirla. En tales casos, la misión del ingeniero es eliminar las vibraciones (o, al menos, reducir todo lo posible su efecto) mediante un proyecto adecuado.

Cuando, aplicando una fuerza adicional, se desplaza un punto material o un cuerpo rígido que estaba en equilibrio estable, aparece una vibración mecánica. Citemos algunos ejemplos:

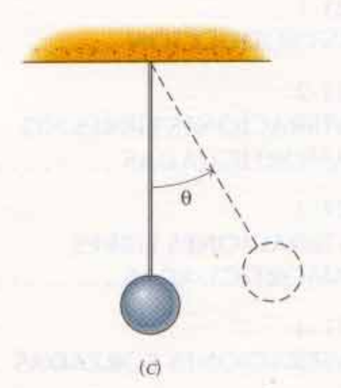
1. Oscilación horizontal de un cuerpo unido a un resorte (fig. 21-1*a*) cuando se aparta de su posición de equilibrio y luego se suelta.
2. Oscilación vertical de un trampolín o de una varilla (fig. 21-1*b*) cuando se desplaza de su posición de equilibrio y luego se suelta.
3. Oscilación circular de la lenteja de un péndulo suspendida por un hilo inextensible de peso despreciable (fig. 21-1*c*) cuando se desplaza de su posición de equilibrio y luego se suelta.



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Figura 21-1

La característica común de estos ejemplos es que sobre el cuerpo se ejercen fuerzas recuperadoras que le hacen volver a su posición de equilibrio (fig. 21-2*a*). No obstante, cuando el cuerpo alcanza su posición de equilibrio tiene velocidad no nula y sobrepasa dicha posición (fig. 21-2*b*). El proceso se repite cuando la fuerza recuperadora vuelve a actuar para volver el cuerpo a su posición de equilibrio (fig. 21-2*c*). El movimiento se repite una y otra vez y el cuerpo pasa en uno y otro sentido por su posición de equilibrio.

En muchos casos, la posición o el movimiento del cuerpo se pueden especificar por completo con una coordenada (p.e., x en la fig. 21-1*a*; y en la fig. 21-1*b* o θ en la fig. 21-1*c*). Se dice entonces que estos cuerpos tienen un *grado de libertad*. En otros casos, el cuerpo puede vibrar independientemente en dos direcciones (fig. 21-3*a*), o pueden conectarse dos cuerpos pero pueden vibrar independientemente en una sola dirección (fig. 21-3*b*). Como se necesitan dos coordenadas para especificar del todo la posición o el movimiento de tales sistemas, se dice que éstos tienen dos grados de libertad. En este primer curso de Dinámica sólo trataremos sistemas de un solo grado de libertad.

En la figura 21-4 podemos ver gráficas del desplazamiento (x o y o θ) respecto a la posición de equilibrio en función del tiempo. Las oscilaciones que se repiten uniformemente, como son las representadas en las figuras 21-4*a* y 21-4*b*, reciben el nombre de *periódicas;* las que no se repiten uniformemente (fig. 21-4*c*) se denominan *aperiódicas* o *aleatorias*. En este primer curso de Dinámica no se tratarán las vibraciones aleatorias.

Una característica importante de una oscilación periódica es su *periodo* τ, que es el menor tiempo que ha de transcurrir para que se repita el movimiento.

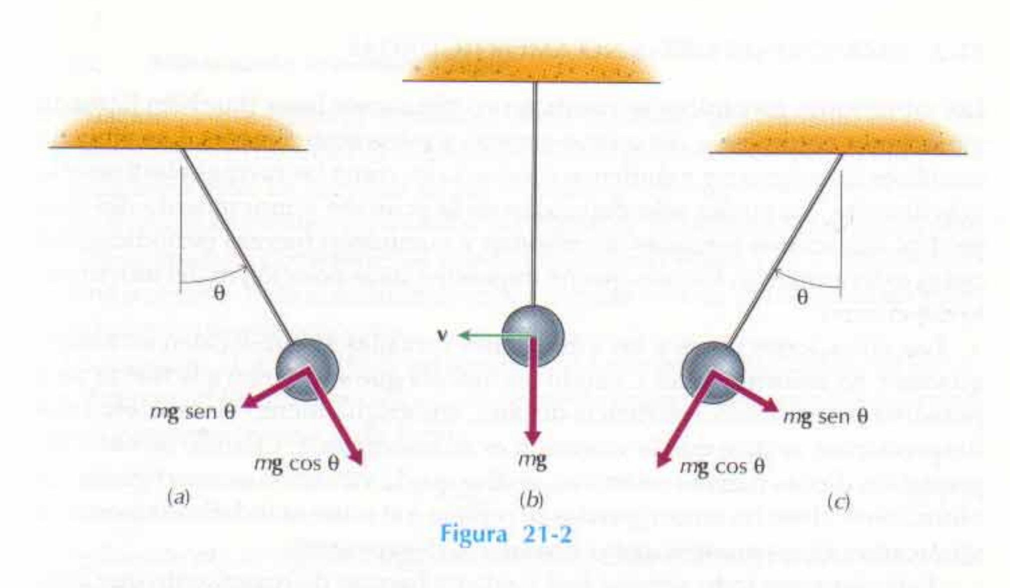
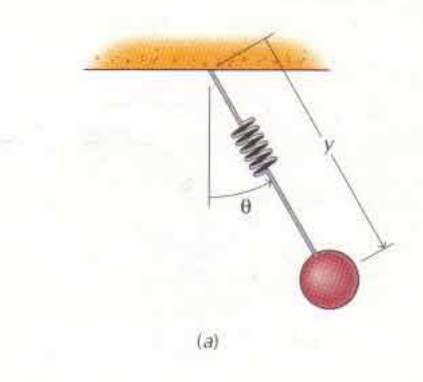


Figura 21-2



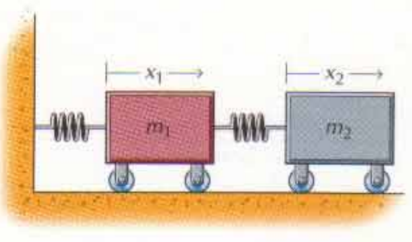


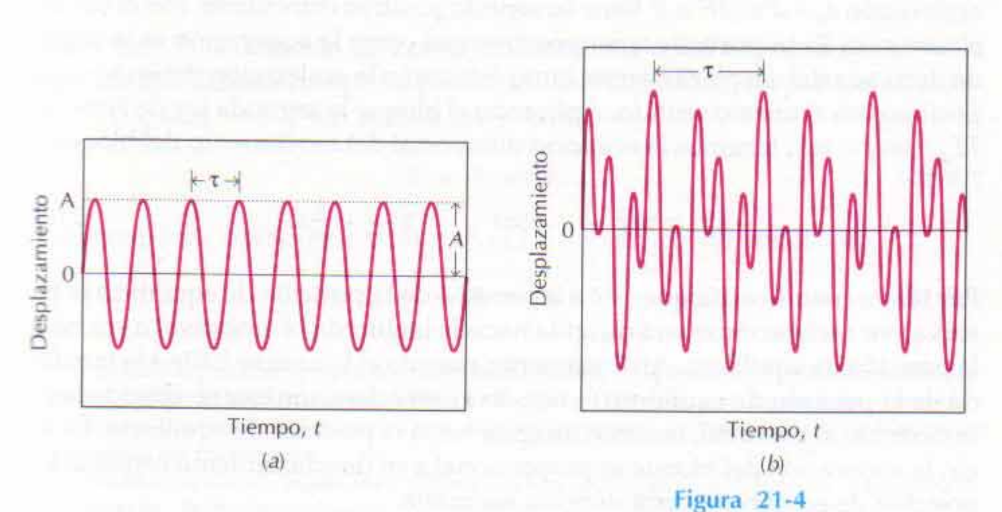
Figura 21-3

Al movimiento que se completa durante un periodo se le da el nombre de *ciclo*. El periodo se expresa en *segundos por ciclo* o, simplemente, en segundos. La *frecuencia* f de una oscilación es la inversa del periodo

$$f = \frac{1}{\tau} \tag{21-1}$$

o sea, es el número de ciclos por unidad de tiempo. La unidad de frecuencia, el *ciclo por segundo (cps)*, recibe también el nombre de *hertz (Hz)*. La *amplitud A* de una oscilación es el desplazamiento máximo que sufre el cuerpo respecto a su posición de equilibrio.

Por último, veremos que el estudio de las vibraciones será, simplemente, una aplicación de los principios desarrollados anteriormente. En los capítulos precedentes, la aceleración se solía obtener sólo para una posición particular del cuerpo y en un instante particular. Ahora, se obtendrá la aceleración para una posición arbitraria del cuerpo y luego se integrará para obtener la velocidad y la posición en todos los instantes futuros.



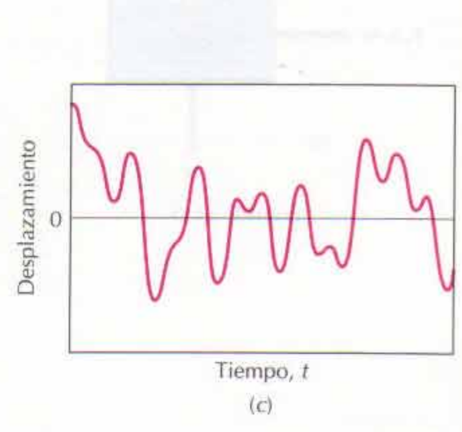


Figura 21-4

21.2 VIBRACIONES LIBRES NO AMORTIGUADAS

Las vibraciones mecánicas se clasifican en *vibraciones libres* (también llamadas vibraciones naturales o *vibraciones propias*) y *vibraciones forzadas*. Las vibraciones libres las originan y mantienen fuerzas tales como las fuerzas elásticas o las gravitatorias, las cuales sólo dependen de la posición y movimiento del cuerpo. Las vibraciones forzadas las originan y mantienen fuerzas periódicas aplicadas exteriormente, fuerzas que no dependen de la posición ni del movimiento del cuerpo.

Las vibraciones libres y las vibraciones forzadas se subdividen en amortiguadas y no amortiguadas. Cuando las fuerzas que se oponen a la fuerza recuperadora (rozamiento, resistencia del aire, amortiguamiento viscoso, etc.) sean despreciables, se dice que la vibración es *no amortiguada*. Cuando no sean despreciables dichas fuerzas resistivas, se dice que la vibración es *amortiguada*. Las vibraciones libres no amortiguadas se repiten a sí mismas indefinidamente; las vibraciones libres amortiguadas llegarían a desaparecer.

Está claro que todo sistema real contiene fuerzas de rozamiento que llegarían a detener las vibraciones libres. Sin embargo, en muchos sistemas la pérdida de energía debida a la resistencia del aire, el rozamiento interno de los resortes u otras fuerzas resistivas es tan pequeña que el análisis basado en un amortiguamiento despreciable da, a menudo, resultados técnicamente satisfactorios. En particular, la frecuencia y el periodo de oscilación que se obtienen para un sistema animado de vibraciones libres tienen un valor muy próximo al que se obtiene para un sistema vibrante que tenga un amortiguamiento pequeño.

21.2.1 Vibración libre no amortiguada de un punto material

Consideremos un bloque de masa m que se deslice por una superficie horizontal exenta de rozamientos, como la representada en la figura 21-5*a*. Desplazando el bloque una distancia x_0 y soltándolo con una velocidad inicial $\dot{x}_0 = v_0$ se induce una vibración.

En la figura 21-5*b* se ha representado el diagrama de sólido libre del bloque, en el cual este último se ha desplazado una distancia arbitraria en el sentido positivo de la abscisa. La fuerza recuperadora elástica que ejerce el resorte, $F_s = k\,x$, está siempre dirigida hacia la posición de equilibrio, mientras que la aceleración $a_x = d^2x/dt^2 = \ddot{x}$ tiene su sentido positivo coincidente con el del *desplazamiento*. Es importante tener presente que como la aceleración es la segunda derivada del desplazamiento, tanto éste como la aceleración deben tomarse positivos en el mismo sentido. Aplicando al bloque la segunda ley de Newton, $\Sigma F_x = ma_x = m\ddot{x}$, tenemos la ecuación diferencial del movimiento del bloque

$$-kx = m\ddot{x} \qquad \text{o sea} \qquad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \tag{21-2}$$

Por tanto, cuando el bloque esté a la derecha de la posición de equilibrio (x positiva), su aceleración estará dirigida hacia la izquierda ($\ddot{x}$ negativa) o sea hacia la posición de equilibrio. Análogamente, cuando el bloque se halle a la izquierda de la posición de equilibrio (x negativa), su acleración estará dirigida hacia la derecha ($\ddot{x}$ positiva), también dirigida hacia la posición de equilibrio. Es decir, la aceleración del bloque es proporcional a su desplazamiento respecto a la posición de equilibrio y está dirigida hacia ella.

(a)

mg

$F_s = kx$

(b)

N

Figura 21-5

21.2.2 Movimiento armónico simple

La ecuación 21-2 describe el *movimiento armónico simple:* movimiento en el cual la aceleración es proporcional al desplazamiento respecto a un punto fijo y está dirigida hacia éste. La mayoría de las vibraciones que aparecen en las aplicaciones técnicas se pueden representar mediante un movimiento armónico simple. Otras muchas vibraciones se pueden aproximar mucho a un movimiento armónico simple. Para el análisis de esos sistemas será de gran ayuda un buen conocimiento de este concepto.

La ecuación 21-2 constituye un tipo conocido de ecuación diferencial (ecuación diferencial lineal, homogénea, de segundo orden y con coeficientes constantes) y suele escribirse en la forma

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad \textbf{(21-3)}$$

El coeficiente $\omega_n = \sqrt{k/m}$, cuya unidad de medida es el rad/s, está relacionado con la frecuencia de oscilación y se denomina *frecuencia circular natural* y también *pulsación propia*.[1] La integral general de la ecuación 21-3 es [2]

$$x(t) = B \cos \omega_n t + C \text{ sen } \omega_n t \qquad \textbf{(21-4)}$$

donde B y C son constantes de integración que hay que determinar a partir de las condiciones iniciales del problema ($x = x_0$ y $\dot{x} = v_0$ cuando $t = 0$).

La solución (ec. 21-4) puede también escribirse en la forma

$$x(t) = A \cos (\omega_n t - \phi_c) \qquad \textbf{(21-5a)}$$

o bien en la forma

$$x(t) = A \text{ sen } (\omega_n t - \phi_s) \qquad \textbf{(21-5b)}$$

Para comprobar que la ecuación 21-5*a* es igual a la 21-4, desarrollemos la ecuación 21-5*a* y tenemos

$$x(t) = A (\cos \omega_n t \cos \phi_c + \text{ sen } \omega_n t \text{ sen } \phi_s) \qquad \textbf{(21-6)}$$

Igualando ahora la ecuación 21-4 a la 21-6, tenemos

$$(B - A \cos \phi_c) \cos \omega_n t + (C - A \text{ sen } \phi_c) \text{ sen } \omega_n t = 0 \qquad \textbf{(21-7)}$$

Ahora bien, si la ecuación 21-4 es verdaderamente igual a la ecuación 21-5*a*, la ecuación 21-7 deberá cumplirse para todos los valores de t. En particular, cuando $t = 0$, $\cos \omega_n t = 1$ y $\text{sen } \omega_n t = 0$ con lo cual

$$B = A \cos \phi_c \qquad \textbf{(21-8a)}$$

Análogamente, cuando $t = \pi/2\omega_n$, $\cos \omega_n t = 0$ y $\text{sen } \omega_n t = 1$ con lo que

$$C = A \text{ sen } \phi_c \qquad \textbf{(21-8b)}$$

[1] Aun cuando la pulsación propia ω_n a menudo es igual a $\sqrt{k/m}$ como en el ejemplo que nos ocupa, no siempre es así. De manera más general, ω_n^2 es el cociente entre la *constante recuperadora eficaz* (coeficiente del término en x) y la *masa eficaz* (coeficiente del término en $\ddot{x}$) de la ecuación diferencial del movimiento.

[2] Por sustitución directa, puede comprobarse que la solución (ec. 21-4) satisface a la ecuación diferencial (ec. 21-3) para cualesquiera valores de las constantes B y C.

Por tanto, las ecuaciones 21-4 y 21-5*a* será iguales si

$$A = \sqrt{B^2 + C^2} \qquad \text{y} \qquad \tan \phi_c = \frac{B}{C} \tag{21-9}$$

(La igualdad de las ecuaciones 21-4 y 21-5*b* se comprueba de igual manera.) Como $\cos(\omega_n t - \phi_c)$ oscila entre –1 y +1, la amplitud de la oscilación será $A = \sqrt{B^2 + C^2}$. El *ángulo de fase* ϕ_c (o ϕ_s) es la cantidad en que debe desplazarse la solución para lograr una simple función seno (o coseno).

La velocidad y la aceleración del bloque se obtienen derivando respecto al tiempo la ecuación 21-4 o la 21-5. Por ejemplo, la velocidad del bloque es

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega_n B \text{ sen } \omega_n t + \omega_n C \cos \omega_n t \tag{21-10a}$$

$$= -\omega_n A \text{ sen } (\omega_n t - \phi_c) \tag{21-10b}$$

$$= \omega_n A \text{ sen } (\omega_n t - \phi_s) \tag{21-10c}$$

y la aceleración del bloque es

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega_n^2 B \cos \omega_n t - \omega_n^2 C \text{ sen } \omega_n t \tag{21-11a}$$

$$= -\omega_n^2 A \cos (\omega_n t - \phi_c) \tag{21-11b}$$

$$= -\omega_n^2 A \text{ sen } (\omega_n t - \phi_s) \tag{21-11c}$$

Como la curva coseno (ec. 21-5*a*) y la curva seno (ec. 21-5*b*) se repiten cada vez que el argumento aumenta 2π radianes, el periodo de oscilación vendrá dado por $\omega_n \tau_n = 2\pi$ o sea

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \tag{21-12}$$

donde la pulsación propia ω_n se obtiene de la ecuación diferencial del movimiento. La frecuencia propia de oscilación, expresada en *hertz* (ciclos por segundo) será

$$f_n = \frac{1}{\tau_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} \tag{21-13}$$

y la frecuencia propia f_n está relacionada con la pulsación propia ω_n a través de la expresión $\omega_n = 2\pi f_n$. Es decir, una frecuencia propia de $f_n = 1$ Hz equivale a una pulsación propia de $\omega_n = 2\pi$ rad/s.

Debemos señalar que los resultados obtenidos en este apartado no se limitan a la vibración de un punto material sobre una superficie horizontal. Pueden utilizarse para analizar el movimiento vibratorio de un punto material siempre que las ecuaciones del movimiento se reduzcan a la forma (ec. 21-3)

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

que caracteriza al movimiento armónico simple.

En cambio, si las ecuaciones del movimiento no se reducen a la forma de la ecuación 21-3, el movimiento puede ser también oscilatorio pero no será armónico simple. En tal caso habrá que obtener nuevas expresiones del periodo, frecuencia, etc., resolviendo la ecuación diferencial del movimiento.

21.2.3 Desplazamiento de la posición de equilibrio

El movimiento armónico simple también tiene lugar cuando el bloque pende del resorte (fig. 21-6*a*) en vez de deslizarse por una superficie exenta de rozamiento, midiendo entonces la coordenada y a partir de la posición de equilibrio del sistema. Para ver que ello es así, dibujemos los diagramas de sólido libre del bloque en su posición de equilibrio (fig. 21-6*b*) y en una posición desplazada arbitraria (fig. 21-6*c*). En la posición de equilibrio (antes de desplazar y soltar el bloque), la suma de fuerzas que se ejercen sobre el bloque debe ser nula

$$mg - k\delta_{eq} = 0$$

donde δ_{eq} es la deformación estática del resorte (elongación del resorte en la posición de equilibrio estático $y = 0$). Por tanto, la deformación estática del resorte es $\delta_{eq} = mg/k$.

Cuando se desplaza el bloque hacia abajo (sentido positivo de y) una cierta cantidad y, el resorte quedará alargado una cantidad total $y + \delta_{eq}$ y la fuerza que se ejerce sobre el bloque será $k(y + \delta_{eq}) = k(y + mg/k)$ y estará dirigida hacia arriba. Escribiendo entonces la segunda ley de Newton tenemos

$$mg - k(y + mg/k) = m\ddot{y}$$

o sea

$$m\ddot{y} + ky = 0 \qquad \textbf{(21-14)}$$

que vuelve a ser la ecuación del movimiento armónico simple cuya integral general es

$$y = B\cos\omega_n t + C\,\text{sen}\,\omega_n t \qquad \textbf{(21-15)}$$

La pulsación ω_n, la frecuencia propia f_n, el periodo de vibración τ_n y las demás características vibratorias del bloque se obtienen entonces igual que se hizo en el apartado 21.2.2.

Si se midiera la posición del bloque a partir de la posición en la cual no esté alargado el resorte ($\hat{y} = 0$ cuando el resorte no esté alargado) en vez de a partir de la posición de equilibrio, la fuerza del resorte sería $k\hat{y}$ y la ecuación 21-14 quedaría en la forma

$$m\ddot{\hat{y}} + k\hat{y} = mg \qquad \textbf{(21-16)}$$

Ahora bien, la solución de la ecuación 21-16 no es sino una constante más la ecuación 21-4

$$\begin{aligned}\hat{y}(t) &= \frac{mg}{k} + B\cos\omega_n t + C\,\text{sen}\,\omega_n t \\ &= \delta_{eq} + B\cos\omega_n t + C\,\text{sen}\,\omega_n t\end{aligned}$$

donde $\hat{y}(t) = y(t) + \delta_{eq}$. Es decir, la oscilación consiste en un movimiento armónico simple en torno a la posición de equilibrio $\hat{y} = \delta_{eq}$.

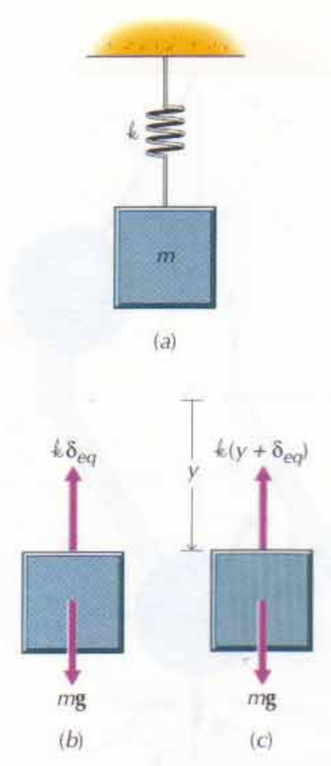


Figura 21-6

21.2.4 Movimiento armónico simple aproximado

Si las ecuaciones del movimiento no se reducen a la forma de la ecuación 21-3,

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

el movimiento no será armónico simple. Sin embargo, existen muchos movimientos que se aproximan bastante bien mediante la ecuación 21-3 mientras la amplitud del movimiento sea pequeña. Tales movimientos pueden aproximarse a movimientos armónicos simples y los resultados del apartado 21.2.2 son aplicables directamente.

Por ejemplo, consideremos la oscilación del péndulo simple representado en la figura 21-7*a*. El péndulo consiste en un punto material de masa m que oscila sujeto al extremo de un hilo inextensible, de masa despreciable y longitud ℓ. Se suelta el péndulo a partir de un ángulo inicial θ_0 y una celeridad inicial $\dot{\theta}_0 = \omega_0$. Como el hilo es inextensible, el punto recorrerá una trayectoria circular con una aceleración

$$\mathbf{a} = \ell\ddot{\theta}\mathbf{e}_t + \ell\dot{\theta}^2\mathbf{e}_n$$

donde el sentido de la normal se toma hacia el punto de suspensión y el sentido de la coordenada tangencial es el de las θ crecientes (fig. 21-7*b*). La componente tangencial de la segunda ley de Newton, $\sum F_t = ma_t$, nos da entonces la ecuación diferencial del movimiento

$$-mg \text{ sen } \theta = m\ell\ddot{\theta}$$

o sea

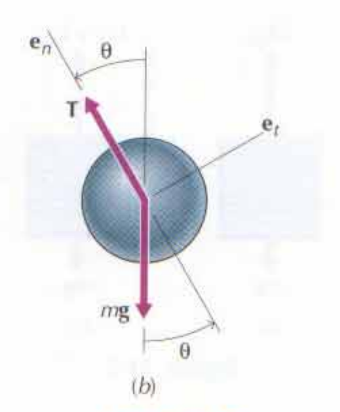
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \text{ sen } \theta \tag{21-17}$$

Mientras el ángulo θ sea pequeño, sen $\theta \cong \theta$ (expresando θ en radianes) y la ecuación 21-17 queda en la forma

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\theta \tag{21-18}$$



(*a*)



(*b*)

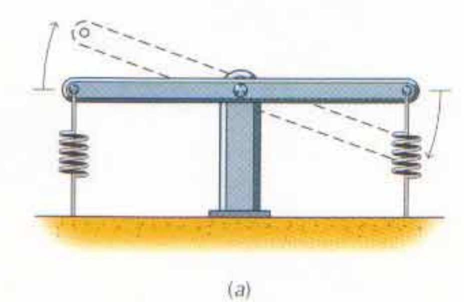
Figura 21-7

Por tanto, el péndulo sigue un movimiento armónico simple cuya pulsación propia es $\omega_n = \sqrt{g/\ell}$ y cuyo periodo es $\tau_n = 2\pi/\omega_n = 2\pi\sqrt{\ell/g}$. Si el ángulo θ no se mantuviera pequeño, el movimiento resultante seguiría siendo oscilatorio, pero no sería armónico simple. En tal caso, la solución se obtendría integrando la ecuación diferencial del movimiento (ec. 21-17).[1]

21.2.5 Vibración libre no amortiguada de un cuerpo rígido

Un cuerpo rígido que oscile en torno a un eje fijo (fig. 21-8*a*) y una rueda que oscile sobre una superficie plana (fig. 21-8*b*) constituyen sistemas vibrantes de un solo grado de libertad. El análisis de estos sistemas de cuerpos rígidos es igual, en esencia, al de un punto material. Primero, se dibuja el diagrama de sólido libre correspondiente a una posición arbitraria del cuerpo rígido. Después, se escriben las ecuaciones del movimiento. Por último, se utilizan los principios de la Cinemática para reducir las ecuaciones del movimiento a una sola ecuación diferencial que contenga una sola variable que describa la posición y movimiento del cuerpo rígido. Si la ecuación diferencial resultante pudiera escribirse en la forma de la ecuación 21-3

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$


(*a*)

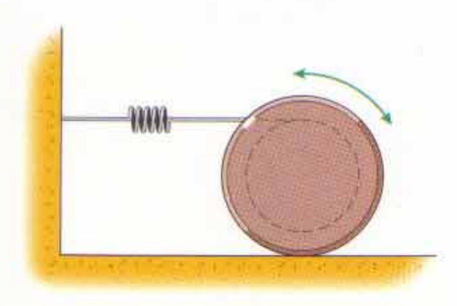

(*b*)

Figura 21-8

[1] Si el ángulo θ no se mantuviera pequeño, se podría hallar la solución de la ecuación 21-17 pero no se podría escribir atendiendo a funciones simples tales como polinomios o funciones trigonométricas. Para $\theta_{máx} = 5°$ la diferencia entre las soluciones exacta y aproximada es sólo de un 0,05%, aproximadamente, para el valor del periodo; para $\theta_{máx} = 10°$, un 0,19%; $\theta_{máx} = 20°$, un 0,76% y $\theta_{máx} = 40°$, 3,15%.

el movimiento del cuerpo rígido sería un movimiento armónico simple y serían aplicables todos los resultados del apartado 21.2.2. Si la ecuación del movimiento no se pudiera escribir en la forma de la ecuación 21-3, el movimiento resultante podría aún ser oscilatorio, pero no sería armónico simple. En tal caso, la solución podría obtenerse resolviendo la ecuación diferencial.

PROBLEMA EJEMPLO 21.1

El péndulo de la figura 21-9*a* consiste en una barra uniforme de 2 kg y 0,8 m de longitud suspendida de un pasador exento de rozamientos situado en uno de sus extremos. Determinar la frecuencia y el periodo propios de la oscilación resultante. (Supóngase oscilaciones de pequeña amplitud.)

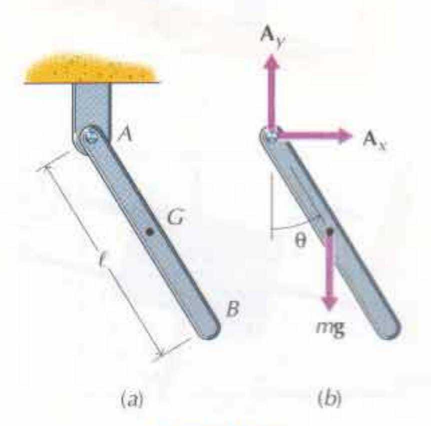


Figura 21-9

SOLUCIÓN

En la figura 21-9*b* puede verse el diagrama de sólido libre del péndulo. Como el movimiento es de rotación en torno a un eje fijo, se podrá escribir la segunda ley de Newton en la forma $\Sigma M_A = I_A\,\alpha = I_A\,\ddot{\theta}$ lo cual da

$$-\frac{\ell}{2}(mg \text{ sen } \theta) = \left(\frac{1}{3}m\ell^2\right)\ddot{\theta}$$

Pero si la amplitud de las oscilaciones es pequeña, también lo será el ángulo θ y se podrá tomar sen $\theta \cong \theta$ (en radianes) con lo que la ecuación diferencial del movimiento del péndulo será

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2\ell}\theta = 0$$

Por tanto, la pulsación propia, la frecuencia propia y el periodo propio de la oscilación son

$$\omega_n = \sqrt{(3)(9{,}81)/(2)(0{,}8)} = 4{,}289 \text{ rad/s} \qquad \text{Resp.}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = 0{,}683 \text{ rad/s} \qquad \text{Resp.}$$

$$\tau_n = \frac{1}{f_n} = 1{,}465 \text{ s} \qquad \text{Resp.}$$

(Pueden compararse estos resultados con los correspondientes a un péndulo simple en el cual toda la masa estuviera concentrada en el extremo de una varilla o hilo sin masa. En el apartado 21.2.4 se vio que la pulsación propia del péndulo simple es $\omega_n = \sqrt{g/\ell} = \sqrt{(9{,}81)/(0{,}8)} = 3{,}502$ rad/s. Por tanto, la frecuencia y el periodo propios del péndulo simple serían $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = 0{,}557$ Hz y $\tau_n = \frac{1}{f_n} = 1{,}794$ s, respectivamente.)

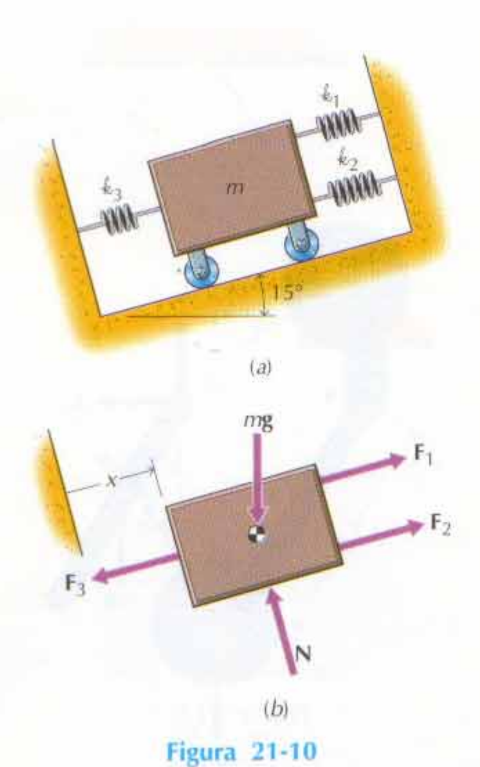


Figura 21-10

PROBLEMA EJEMPLO 21.2

Un carrito que pesa 50 N está unido a tres resortes y rueda sobre un plano inclinado, según se indica en la figura 21-10*a*. Las constantes de los resortes son $k_1 = k_2 = 83$ N/m y $k_3 = 250$ N/m. Si se desplaza el carrito hacia arriba del plano inclinado una distancia de 75 mm a partir de su posición de equilibrio y se suelta con una velocidad inicial de 375 mm/s hacia la parte superior del plano cuando $t = 0$, determinar

a. El periodo τ_n, la frecuencia f_n y la pulsación ω_n de la vibración resultante.
b. La posición del carrito en función del tiempo.
c. La amplitud A de la vibración resultante.

SOLUCIÓN

a. En la figura 21-10*b* puede verse el diagrama de sólido libre del carrito, en el cual la coordenada x mide la posición del mismo a lo largo del plano inclinado, siendo $x = 0$ para la posición de equilibrio. En esta posición (antes de haber perturbado al carrito), las fuerzas de los resortes son proporcionales a sus deformaciones $F_1 = k_1\delta_{eq1}$, $F_2 = k_2\delta_{eq2}$ y $F_3 = k_3\delta_{eq3}$ con lo que el equilibrio da

$$k_1\delta_{eq1} + k_2\delta_{eq2} - k_3\delta_{eq3} - mg \text{ sen } 15° = 0 \qquad \textbf{(a)}$$

Como no se sabe cuánto se han alargado o comprimido los resortes antes de unirlos al carrito, no es posible determinar los valores de las deformaciones estáticas δ_{eq1}, δ_{eq2} y δ_{eq3}. No obstante, la ecuación *a* da una relación entre las deformaciones estáticas y el peso del carrito.

Cuando el carrito se encuentre en una posición x arbitraria (positiva) estará reducido el alargamiento de los resortes 1 y 2 ($F_1 = k_1[\delta_{eq1} - x]$ y $F_2 = k_2[\delta_{eq2} - x]$) y se habrá aumentado el alargamiento del resorte 3 ($F_3 = k_3[\delta_{eq3} + x]$). Por tanto, la segunda ley de Newton $\Sigma F_x = m\ddot{x}$ da

$$k_1(\delta_{eq1} - x) + k_2(\delta_{eq2} - x) - k_3(\delta_{eq3} + x) - mg \text{ sen } 15° = m\ddot{x}$$

o sea

$$(k_1\delta_{eq1} + k_2\delta_{eq2} - k_3\delta_{eq3} - mg \text{ sen } 15°) - (k_1 + k_2 + k_3)x = m\ddot{x}$$

Ahora bien, la cantidad entre paréntesis primera es nula en virtud de la ecuación *a*, por lo que la ecuación diferencial del movimiento se reduce a

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2 + k_3)x = 0$$

o sea

$$\ddot{x} + 81{,}62x = 0$$

Luego, la pulsación propia, la frecuencia propia y el periodo son

$$\omega_n = \sqrt{81{,}62} = 9{,}034 \text{ rad/s} \qquad \text{Resp.}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = 1{,}438 \text{ Hz} \qquad \text{Resp.}$$

$$\tau_n = \frac{1}{f_n} = 0{,}695 \text{ s} \qquad \text{Resp.}$$

b. El desplazamiento y la velocidad del carrito se pueden escribir en la forma

$$x(t) = B \cos 9{,}034t + C \text{ sen } 9{,}034t$$
$$\dot{x}(t) = -9{,}034B \text{ sen } 9{,}034t + 9{,}034C \cos 9{,}034t$$

Pero en $t = 0$, $x = B = 75$ mm y $\dot{x} = 9{,}034C = 375$ mm/s. Por tanto, $B = 75$ mm y $C = 41{,}5$ mm y será

$$x(t) = 75 \cos 9{,}034t + 41{,}5 \text{ sen } 9{,}034t \text{ mm} \qquad \text{Resp.}$$

En la figura 21-10*c* se ha representado esta solución.

De otra manera, la posición y la velocidad del carrito se pueden escribir en la forma

$$x(t) = A \cos (9{,}034t - \phi_c)$$
$$\dot{x}(t) = 9{,}034A \text{ sen } (9{,}034t - \phi_s)$$

Y aplicando las condiciones iniciales $x(0) = A \cos \phi_c = 75$ mm y $\dot{x}(0) = -9{,}034A(-\text{sen } \phi_c) = 375$ mm/s se tiene $A = 85{,}7$ mm y $\phi_c = 28{,}96° = 0{,}505$ rad. Por tanto, la ecuación que describe la posición del carrito será

$$x(t) = 85{,}7 \cos (9{,}034t - 0{,}505) \text{ mm} \qquad \text{Resp.}$$

El desplazamiento y la velocidad del carrito también podrían escribirse en la forma

$$x(t) = A \text{ sen } (9{,}034t - \phi_s)$$
$$\dot{x}(t) = 9{,}034A \cos (9{,}034t - \phi_s)$$

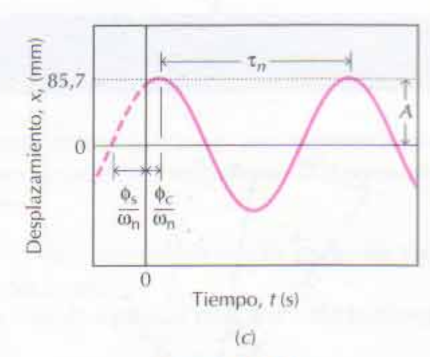
En tal caso, aplicando las condiciones iniciales $x(0) = A(-\text{sen } \phi_s) = 75$ mm y $\dot{x}(0) = 9{,}034A \cos \phi_s = 375$ mm/s, se tiene $A = 87{,}5$ mm y $\phi_s = -61{,}03° = -1{,}065$ rad. Por tanto, la ecuación que describe la posición del carrito será

$$x(t) = 85{,}7 \text{ sen } (9{,}034t + 1{,}065) \text{ mm} \qquad \text{Resp.}$$

(La solución descrita por estas dos ecuaciones es exactamente la misma que se representa en la figura 21-10*c*. Las fases iniciales $\phi_c = 0{,}505$ rad y $\phi_s = -1{,}065$ rad también se indican en la figura 21-10*c*.)

c. Como el valor máximo de la función coseno es 1, la amplitud de la vibración es

$$A = 87{,}5 \text{ mm} \qquad \text{Resp.}$$



(*c*)

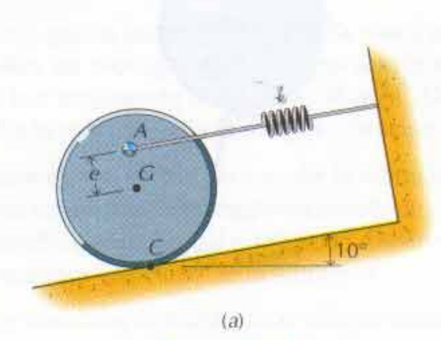
Figura 21-10

PROBLEMA EJEMPLO 21.3

Un cilindro uniforme de 30 cm de diámetro y 25 N de peso rueda sin deslizamiento por un plano inclinado, según se indica en la figura 21-11*a*. Un resorte lineal ($k = 400$ N/m) está unido al punto *A* del cilindro (que está a $e = 75$ mm del eje del cilindro) y su longitud natural es la representada en la posición de la figura. Si se suelta el cilindro a partir del reposo en esta posición, determinar

a. El periodo τ_n, la frecuencia f_n y la pulsación ω_n de la vibración resultante.

b. La posición del centro de masa del cilindro en función del tiempo.



(*a*)

Figura 21-11

SOLUCIÓN

a. En la figura 21-11*b* puede verse el diagrama de sólido libre del cilindro en su posición de equilibrio. Para pasar de su posición inicial a su posición de equilibrio, el cilindro ha tenido que girar en sentido antihorario un ángulo θ_{eq}, el centro de masa del cilindro habrá recorrido hacia abajo del plano una

distancia x_{Geq} y el resorte se habrá estirado una cantidad δ_{eq}. Si δ_{eq} es pequeño, puede hacerse sen $\theta_{eq} \cong \theta_{eq}$ (en radianes), cos $\theta_{eq} \cong 1$ y $\theta_{eq} \cong \tan \theta_{eq} \cong \frac{\delta_{eq}}{r+e} \cong \frac{x_{Geq}}{r}$ (fig. 21-11*c*); y la fuerza del resorte $k\,\delta_{eq}$ se mantiene paralela al plano inclinado. Entonces, las ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_x = 0: \qquad mg \text{ sen } 10° - F - k\delta_{eq} = 0$$
$$\sum M_G = 0: \qquad Fr - k\delta_{eq} e \cos \theta_{eq} = 0$$

se podrán combinar para dar

$$mgr \text{ sen } 10° - k(r+e)\delta_{eq} = 0 \qquad \textbf{(a)}$$

La ecuación *a* da δ_{eq}= 0,007235 m = 0,7235 cm lo que nos da x_{Geq} = 0,004823 m = 0,4823 cm y θ_{eq} = 0,03214 rad = 1,842°. (Como comprobación de la validez de la aproximación hecha para ángulo pequeño, notemos que sen θ_{eq} = 0,03215 $\cong \theta_{eq}$ y cos θ_{eq} = 0,9995 $\cong$ 1.)

A continuación, se dibuja el diagrama de sólido libre del cilindro (fig. 21-11*d*) para una posición arbitraria en la cual el centro de masa ha recorrido una distancia adicional x_G hacia abajo del plano, el cilindro habrá girado un ángulo adicional θ y (suponiendo ángulos pequeños) el resorte se habrá estirado una cantidad adicional $[(r+e)/r]x_G$. Entonces, las ecuaciones del movimiento para el cilindro son

$$\sum F_x = ma_{Gx}: \qquad mg \text{ sen } 10° - F - k\left(\delta_{eq} + \frac{9}{6}x_G\right) = m\ddot{x}_G$$
$$\sum M_G = I_G\alpha: \qquad Fr - k\left(\delta_{eq} + \frac{9}{6}x_G\right)e \cos(\theta_{eq} + \theta) = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

Para obtener la ecuación diferencial que describa la vibración, se sustituye $\cos(\theta_{eq} + \theta)$ por 1; se multiplica la primera ecuación por r y se le suma la segunda. Resulta así

$$[mgr \text{ sen } 10° - k(r+e)\delta_{eq}] - k(r+e)\left(\frac{9}{6}x_G\right) = mr\ddot{x}_G + \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

Pero, en virtud de la ecuación *a*, el término entre corchetes es nulo y las aceleraciones están relacionadas por $\ddot{x}_G = r\ddot{\theta}$. Por tanto, la ecuación diferencial del movimiento será

$$mr\ddot{x}_G + \frac{1}{2}mr\ddot{x}_G + k(r+e)\left(\frac{9}{6}x_G\right) = 0$$

o sea

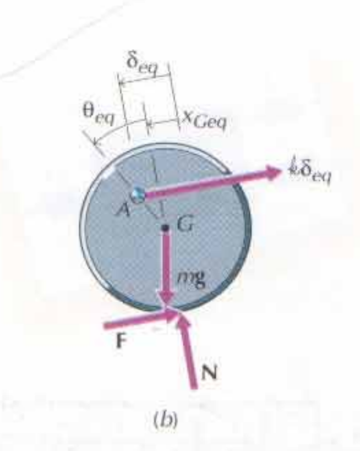
$$0{,}574\ddot{x}_G + 135x_G = 0$$

y la pulsación propia, la frecuencia propia y el periodo de vibración son

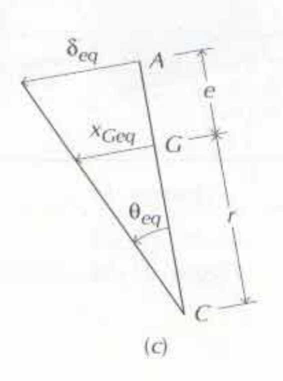
$$\omega_n = \sqrt{(135)/(0{,}574)} = 15{,}34 \text{ rad/s} \qquad \text{Resp.}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = 2{,}441 \text{ Hz} \qquad \text{Resp.}$$

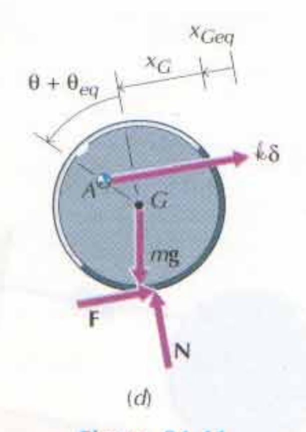
$$\tau_n = \frac{1}{f_n} = 0{,}410 \text{ s} \qquad \text{Resp.}$$



(*b*)



(*c*)



(*d*)

Figura 21-11

b. La posición y velocidad del centro de masa del cilindro se pueden escribir en la forma

$$x_G(t) = B \cos 15{,}34t + C \operatorname{sen} 15{,}34t$$
$$\dot{x}_G(t) = -15{,}34B \operatorname{sen} 15{,}34t + 15{,}34C \cos 15{,}34t$$

Pero cuando $t = 0$, $x_G = B = -x_{Geq} = -0{,}4823$ cm y $\dot{x}_G = 15{,}34C = 0$. Por tanto, la posición del centro de masa del cilindro será

$$x_G(t) = -0{,}4823 \cos 15{,}34t \qquad \text{Resp.}$$

Como comprobación final de la validez de la aproximación para ángulos pequeños, notemos que la amplitud de la oscilación es 0,4823 cm. Por tanto, el máximo ángulo de rotación a partir de la posición inicial será $\theta_{máx} = \theta_{eq} + 0{,}4823/15 = 0{,}06429$ rad $= 3{,}684°$. Pero sen $\theta_{máx} = 0{,}06425 \cong \theta_{máx}$ y cos $\theta_{máx} = 0{,}9979 \cong 1$.

PROBLEMAS

21-1 a 21-6 Las siguientes ecuaciones representan la posición de una partícula animada de movimiento armónico simple. Para cada ecuación, representar gráficamente la posición, velocidad y aceleración de la partícula en función del tiempo para dos ciclos completos de la oscilación.

21-1* $x(t) = 8 \cos \pi t$ cm

21-2* $x(t) = 5 \operatorname{sen} \pi t/4$ mm

21-3 $x(t) = 3 \cos (\pi t/2 - \pi/4)$ cm

21-4* $x(t) = 10 \operatorname{sen} (3\pi/4 - \pi/8)$ mm

21-5 $x(t) = 4 \cos 5t - 3 \operatorname{sen} 5t$ cm

21-6 $x(t) = 5 \operatorname{sen} 3t + 12 \cos 3t$ mm

21-7 a 21-12 Las siguientes ecuaciones representan la posición de una partícula animada de movimiento armónico simple. Para cada ecuación

a. Escribir la ecuación del movimiento de la partícula en la forma $x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi_c)$.
b. Hallar la velocidad máxima y la posición en que la alcanza la partícula.
c. Hallar la aceleración máxima y la posición en que la alcanza la partícula.

21-7* $x(t) = 3 \cos \pi t - 4 \operatorname{sen} \pi t$ cm

21-8 $x(t) = 12 \cos \pi t/2 + 5 \operatorname{sen} \pi t/2$ mm

21-9* $x(t) = 8 \cos 10t + 6 \operatorname{sen} 10t$ cm

21-10* $x(t) = 8 \cos 3\pi t/4 - 6 \operatorname{sen} 3\pi t/4$ mm

21-11 $x(t) = 5 \operatorname{sen} \pi t$ cm

21-12 $x(t) = 4 \operatorname{sen} (3t + \pi/3)$ mm

21-13 a 21-18 Las siguientes ecuaciones representan la posición de una partícula animada de movimiento armónico simple. Para cada ecuación

a. Escribir la ecuación del movimiento de la partícula en la forma $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_n t - \phi_s)$.
b. Hallar el primer valor de t para el cual sea nula la elongación de la partícula.
c. Hallar el primer valor de t para el cual sea nula la velocidad de la partícula.

21-13* $x(t) = 5 \cos \pi t - 12 \operatorname{sen} \pi t$ cm

21-14* $x(t) = 4 \cos \pi t/2 + 3 \operatorname{sen} \pi t/2$ mm

21-15 $x(t) = 8 \cos 3\pi t/4 - 6 \operatorname{sen} 3\pi t/4$ cm

21-16 $x(t) = 5 \cos 10t - 5 \operatorname{sen} 10t$ mm

21-17* $x(t) = 5 \cos \pi t$ cm

21-18 $x(t) = 8 \cos (3\pi t/2 + 2\pi/3)$ mm

21-19* Un instrumento que se utiliza para medir la vibración de una partícula indica un movimiento armónico simple de frecuencia propia 5 Hz y aceleración máxima de 48 m/s^2. Determinar la amplitud y la máxima velocidad de la vibración.

21-20 Un instrumento que se utiliza para medir la vibración de una partícula indica un movimiento armónico simple de periodo 0,025 s y aceleración máxima igual a 150 m/s^2. Determinar la amplitud y la máxima velocidad de la vibración.

21-21 Una partícula vibra con movimiento armónico simple de periodo 0,333 s y velocidad máxima 22,5 m/s. Determinar la amplitud y la aceleración máxima de la vibración.

21-22* Una partícula vibra con movimiento armónico simple. Cuando pasa por la posicion de equilibrio, su velocidad es de

2 m / s. Cuando se halla a 20 mm de su posición de equilibrio, su aceleración es de 50 m / s^2. Determinar el módulo de la velocidad en esta posición.

21-23 Una partícula vibra con movimiento armónico simple. Cuando pasa por su posición de equilibrio, su velocidad es de 3 m / s. Cuando se halla a 40 mm de su posición de equilibrio, su velocidad es de 1,8 m / s. Determinar el módulo de la aceleración en esta posición.

21-24* Un bloque de masa m se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamiento, según se indica en la figura P21-24. Determinar la constante k del resorte único que podría sustituir a los dos representados sin que cambiara la frecuencia de vibración del bloque.

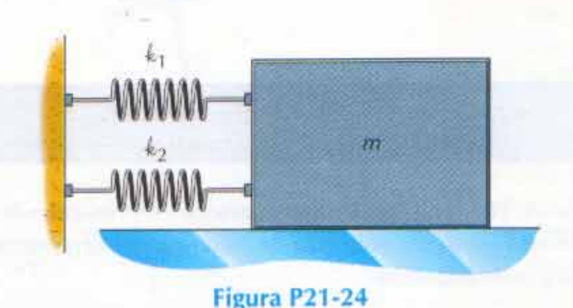


Figura P21-24

21-25* Un bloque de masa m se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamiento, según se indica en la figura P21-25. Determinar la constante k del resorte único que podría sustituir a los dos representados sin que cambiara la frecuencia de vibración del bloque.



Figura P21-25

21-26 Una masa de 2 kg está suspendida en un plano vertical por tres resortes, según se indica en la figura P21-26. Si se desplaza 5 mm hacia abajo a partir de su posición de equilibrio y se suelta con una velocidad hacia arriba de 250 mm / s cuando $t = 0$, determinar

a. La ecuación diferencial que rige el movimiento.
b. El periodo y la amplitud de la vibración resultante.
c. La posición de la masa en función del tiempo.
d. El menor tiempo $t_1 > 0$ de paso de la masa por su posición de equilibrio.

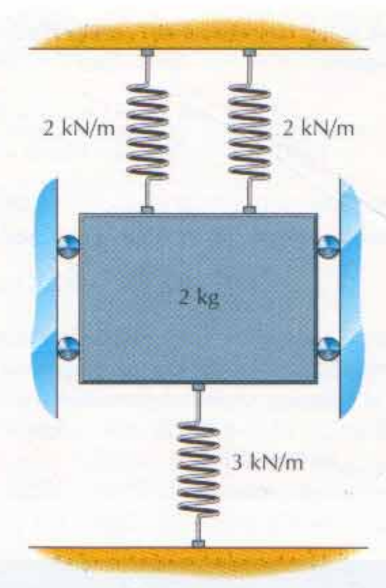


Figura P21-26

21-27* Un bloque que pesa 50 N está suspendido en un plano vertical por tres resortes, según se indica en la figura P21-27. Si se desplaza 175 mm hacia arriba a partir de su posición de equilibrio y se suelta con una velocidad hacia arriba de 3,75 m / s cuando $t = 0$, determinar

a. La ecuación diferencial que rige el movimiento.
b. El periodo y la amplitud de la vibración resultante.
c. La posición del bloque en función del tiempo.
d. El menor tiempo $t_1 > 0$ de paso del bloque por su posición de equilibrio.

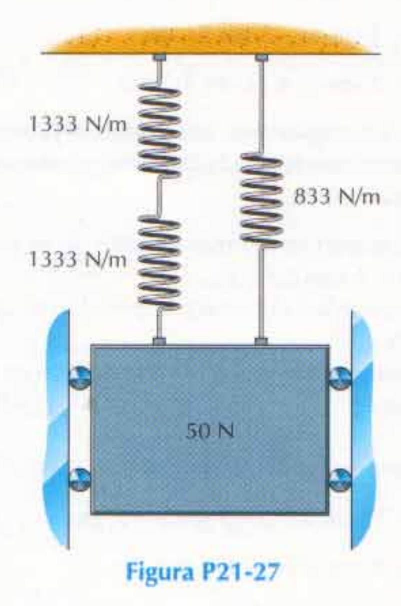


Figura P21-27

21-28 Una masa de 4 kg está suspendida en un plano vertical, según se indica en la figura P21-28. Los dos resortes están so-

metidos a tracción en todo momento y las poleas son pequeñas y están exentas de rozamientos. Si se lleva la masa a 15 mm por encima de su posición de equilibrio y se la suelta con una velocidad de 750 mm / s hacia abajo cuando $t = 0$, determinar:

a. La ecuación diferencial que rige el movimiento.
b. El periodo y la amplitud de la vibración resultante.
c. La posición de la masa en función del tiempo.
d. El menor tiempo $t_1 > 0$ correspondiente a velocidad nula de la masa.

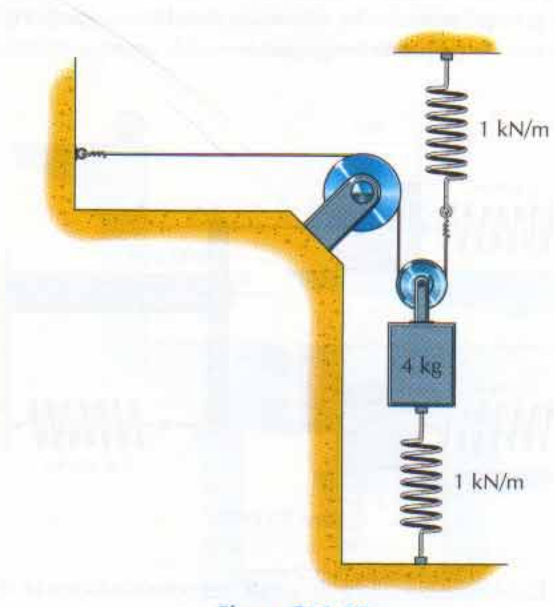


Figura P21-28

21-29 Un bloque que pesa 100 N se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamiento, según se indica en la figura P21-29. Los dos resortes están sometidos a tracción en todo momento y las poleas son pequeñas y exentas de rozamiento. Si se desplaza el bloque 75 mm hacia la izquierda de su posición de equilibrio y se suelta con una velocidad de 1,25 m / s hacia la derecha cuando $t = 0$, determinar:

a. La ecuación diferencial que rige el movimiento.
b. El periodo y la amplitud de la vibración resultante.
c. La posición del bloque en función del tiempo.
d. El menor tiempo $t_1 > 0$ correspondiente a velocidad nula de la masa.

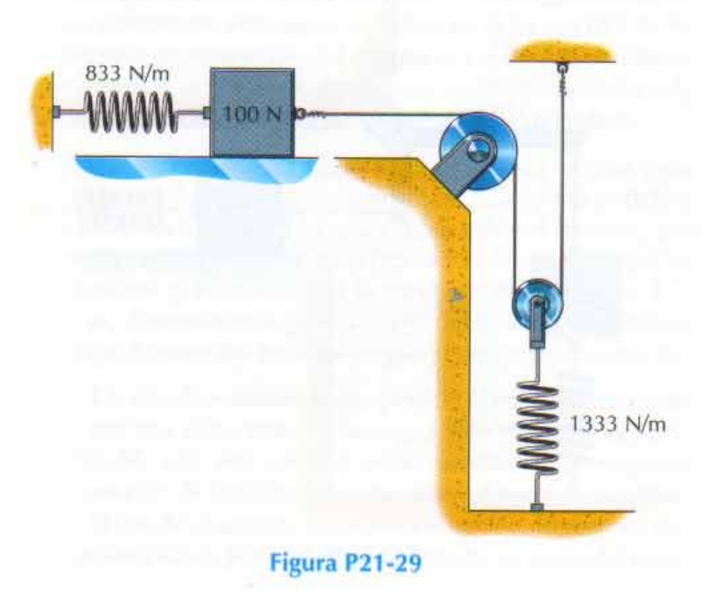


Figura P21-29

21-30* Una masa de 8 kg se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamiento, según se indica en la figura P21-30. Los dos resortes están sometidos a tracción en todo momento y las poleas son pequeñas y exentas de rozamientos. Si se desplaza la masa 25 mm hacia la derecha de su posición de equilibrio y se suelta con una velocidad de 800 mm / s hacia la derecha cuando $t = 0$, determinar:

a. La ecuación diferencial que rige el movimiento.
b. El periodo y la amplitud de la vibración resultante.
c. La posición de la masa en función del tiempo.
d. El menor tiempo $t_1 > 0$ correspondiente a aceleración nula.

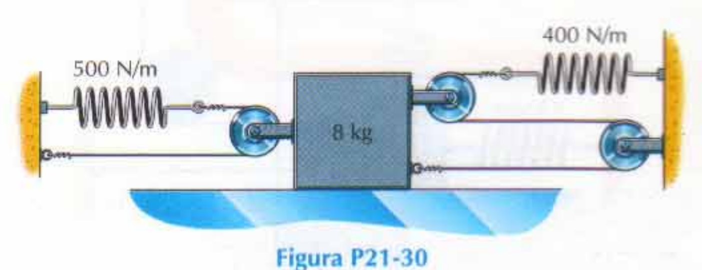


Figura P21-30

21-31 El bloque de 50 N de peso de la figura P21-31 se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamiento mientras

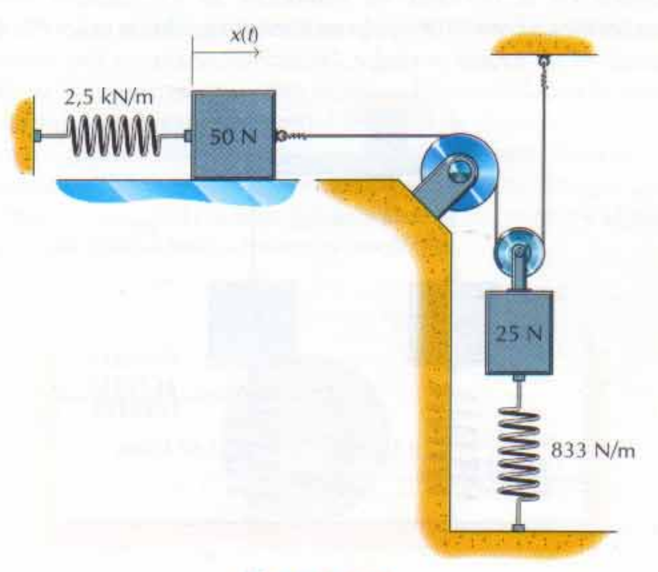


Figura P21-31

que el bloque de 25 N se mueve en un plano vertical. Los resortes están sometidos a tracción en todo momento y las poleas son pequeñas y exentas de rozamientos. Escribir la ecuación diferencial del movimiento para la posición $x(t)$ del bloque de 50 N y determinar la frecuencia y el periodo del movimiento vibratorio resultante.

21-32* Las dos masas de la figura P21-32 se deslizan por sendas superficies horizontales exentas de rozamiento. Los resortes están sometidos a tracción en todo momento y las poleas son pequeñas y exentas de rozamientos. Escribir la ecuación diferencial del movimiento para la posición $x(t)$ del bloque de 10 kg y determinar la frecuencia y el periodo del movimiento vibratorio resultante.

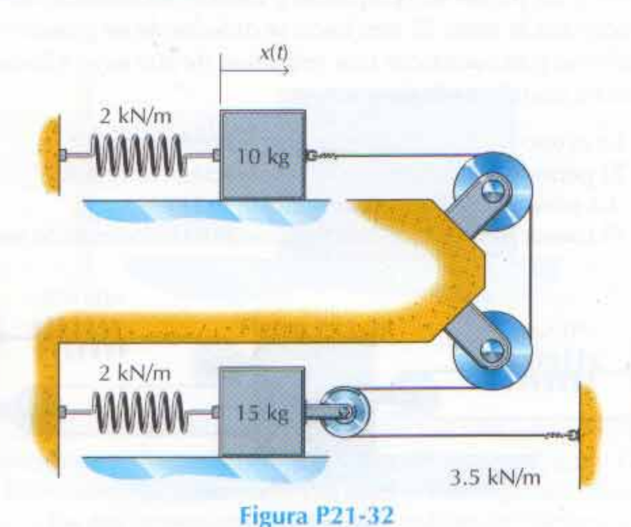


Figura P21-32

21-33 Los dos bloques de la figura P21-33 penden en un plano vertical de una barra de masa despreciable que está horizontal en la posición de equilibrio. Si los resortes están sometidos a tracción en todo momento, escribir la ecuación diferencial del movimiento para la posición $y(t)$ del bloque de 50 N y determinar la frecuencia y el periodo del movimiento vibratorio resultante. (Supónganse oscilaciones de pequeña amplitud.)

Figura P21-33

21-34* Las dos masas de la figura P21-34 se deslizan por sendas superficies horizontales exentas de rozamiento. La barra *ABC* está vertical en la posición de equilibrio y su masa es despreciable. Si los resortes están sometidos a tracción en todo momento, escribir la ecuación diferencial del movimiento para la posición $x(t)$ de la masa de 10 kg y determinar la frecuencia y el periodo de la vibración resultante. (Supónganse oscilaciones de pequeña amplitud.)

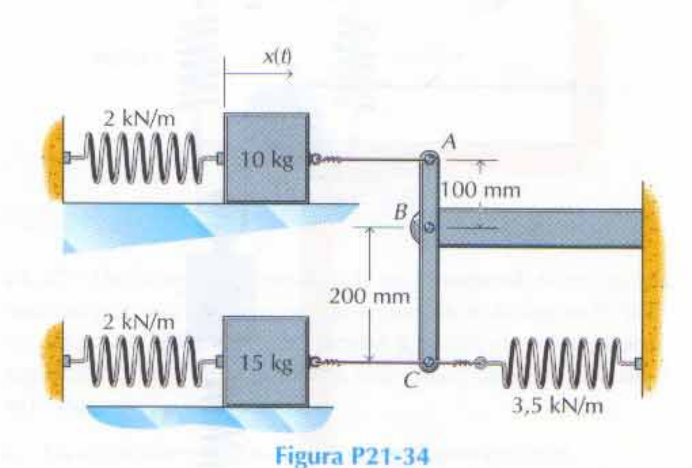


Figura P21-34

21-35 El bloque de 25 N de peso, representado en la figura P21-35, se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamiento mientras que el bloque de 15 N pende en un plano vertical. La barra *ABC* es de masa despreciable y su brazo *AB* está horizontal en la posición de equilibrio. Si los resortes están so-

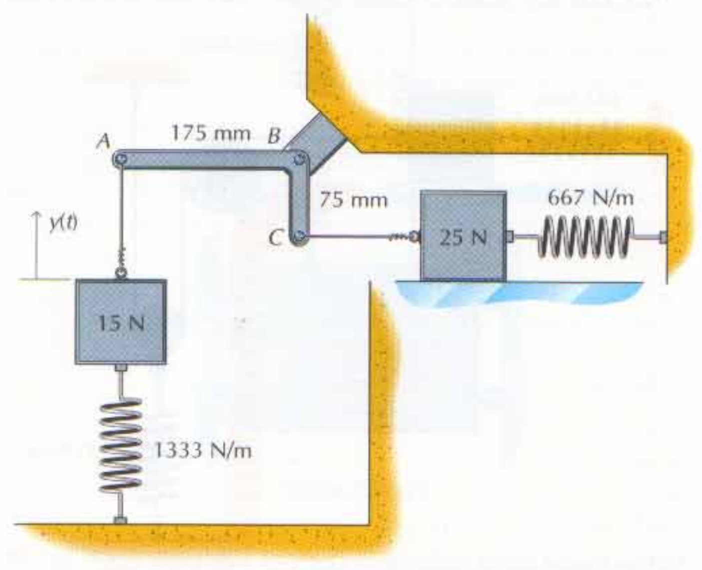


Figura P21-35

metidos a tracción en todo momento, escribir la ecuación diferencial que rige el movimiento de la posición $y(t)$ del bloque de 15 N y determinar la frecuencia y el periodo del movimiento vibratorio resultante. (Supónganse oscilaciones de pequeña amplitud.)

21-36* Un émbolo de 0,5 kg se halla en reposo en una guía vertical exenta de rozamiento. Sobre él cae una pelota de 0,3 kg que se hallaba en un nivel a 4 m de altura sobre el émbolo y rebota en éste según se indica en la figura P21-36. Si el choque es perfectamente elástico ($e = 1$) y la constante del resorte es k = 200 N/m, determinar la posición $y(t)$ del émbolo en función del tiempo a partir del instante del rebote.

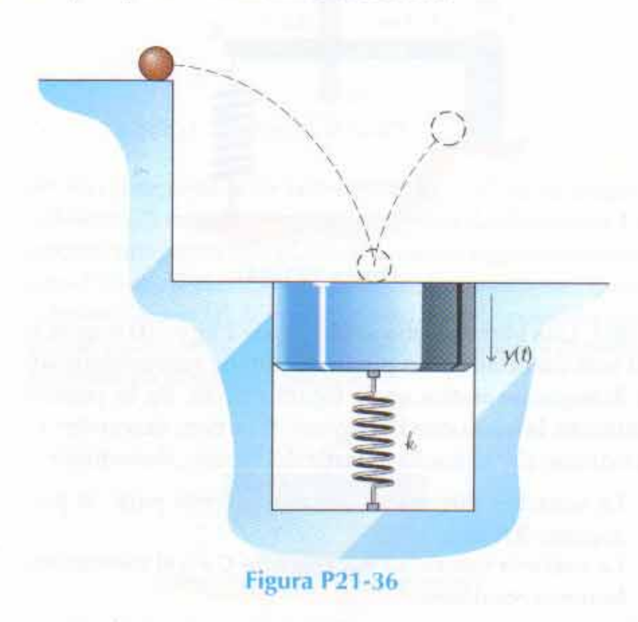


Figura P21-36

21-37 Un émbolo que pesa 12,5 N se halla en reposo en una guía vertical exenta de rozamiento. Sobre él cae una pelota de peso 10 N que se hallaba en un nivel de 4,5 m de altura sobre el émbolo y rebota en éste según se indica en la figura P21-36. Si el coeficiente de restitución del choque es $e = 0,6$ y la constante del resorte es $k = 500$ N/m, determinar la posición $y(t)$ del émbolo en función del tiempo a partir del instante del rebote.

21-38* Un émbolo de 0,5 kg se halla en reposo en una guía vertical exenta de rozamiento. Sobre él cae una pelota de 0,3 kg que se hallaba en un nivel a 4 m de altura sobre el émbolo y rebota en éste según se indica en la figura P21-36. Si el choque es perfectamente plástico ($e = 0$) y la constante del resorte es k = 200 N/m, determinar la posición $y(t)$ del émbolo en función del tiempo a partir del instante en que choca la bola contra él.

21-39 Un cilindro uniforme que pesa 35 N rueda sin deslizamiento por una superficie horizontal, según se indica en la figura P21-39. Los dos resortes están unidos a un pequeño pasador exento de rozamientos situado en el centro G del cilindro de 20 cm de diámetro. Escribir la ecuación diferencial del movimiento para la posición $x_G(t)$ del centro de masa del cilindro y determinar la frecuencia y el periodo del movimiento vibratorio resultante

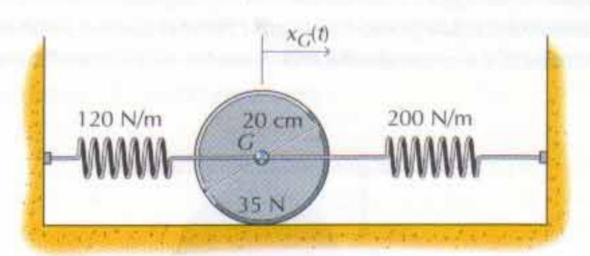


Figura P21-39

21-40* Un cilindro uniforme de 4 kg pende en un plano vertical en el seno de un hilo ligero, según se indica en la figura P21-40. Si el cilindro de 500 mm de diámetro no se desliza por el hilo, escribir la ecuación diferencial del movimiento para la posición $y_G((t)$ del centro de masa del cilindro y determinar la frecuencia y el periodo del movimiento vibratorio resultante.

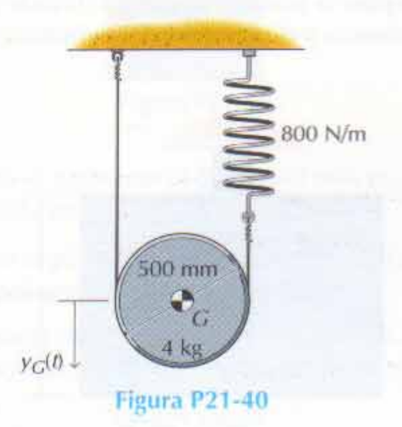


Figura P21-40

21-41 Una rueda escalonada que pesa 90 N rueda sin deslizamiento por un plano horizontal, según se indica en la figura P21-41. Los dos resortes están unidos a hilos arrollados de manera segura sobre el cubo central de 30 cm de diámetro. Si el radio de giro del cilindro escalonado vale 225 mm, escribir la ecuación diferencial del movimiento para la posición $x_G(t)$ del centro de masa del cilindro y determinar la frecuencia y el periodo del movimiento vibratorio resultante.

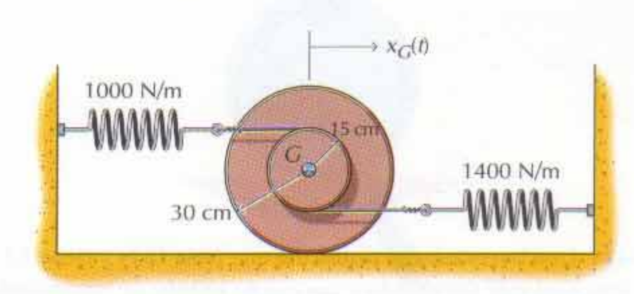


Figura P21-41

21-42* Un disco delgado de 2 kg y radio $r = 200$ mm pende por su borde de un pequeño pasador exento de rozamientos, según se indica en la figura P21-42. Escribir la ecuación diferencial del movimiento para la posición angular $\theta(t)$ del disco y determinar la frecuencia y el periodo del movimiento vibratorio resultante.

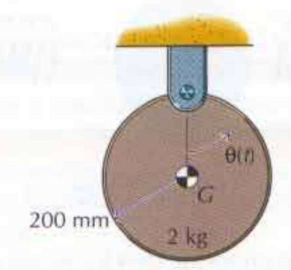


Figura P21-42

21-43* Una placa delgada rectangular (450 mm por 300 mm) que pesa 75 N pende de un pequeño pasador exento de rozamientos situado en el punto medio de su borde mayor, según se indica en la figura P21-43. Escribir la ecuación diferencial del movimiento para la posición angular $\theta(t)$ de la placa y determinar la frecuencia y el periodo del movimiento vibratorio resultante.

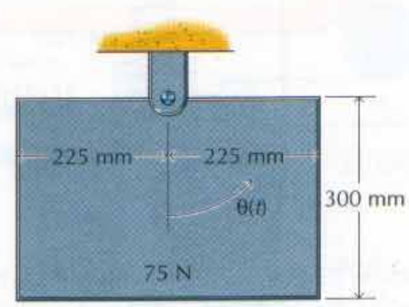


Figura P21-43

21-44 Se sustituye el disco del problema 21-42 por un aro delgado de igual masa y radio, según se indica en la figura P21-44. Escribir la ecuación diferencial del movimiento para la posición angular $\theta(t)$ del aro y determinar la frecuencia y el periodo del movimiento vibratorio resultante.

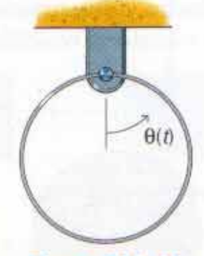


Figura P21-44

21-45 Una barra esbelta uniforme que pesa 15 N y tiene 1,5 m de longitud está conectada a un pivote exento de rozamientos situado en A, según se indica en la figura P21-45. En la posición de equilibrio, la barra está horizontal. Si se hace descender 125 mm su extremo C y se suelta a partir del reposo, determinar:

a. La ecuación diferencial del movimiento para la posición angular $\theta(t)$ de la barra.
b. La máxima velocidad del extremo C en el movimiento vibratorio resultante.

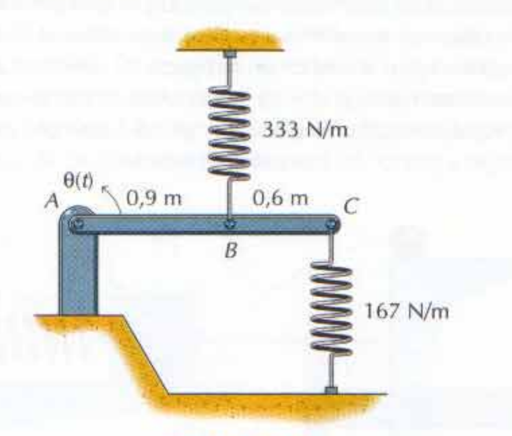


Figura P21-45

21-46* Una barra esbelta uniforme de 2 kg y 500 mm de longitud está conectada a un pivote exento de rozamientos situado en B, según se indica en la figura P21-46. En la posición de equilibrio, la barra está horizontal. Si se hace descender 15 mm su extremo C y se suelta a partir del reposo, determinar:

a. La ecuación diferencial del movimiento para la posición angular $\theta(t)$ de la barra.
b. La máxima velocidad del extremo C en el movimiento vibratorio resultante.

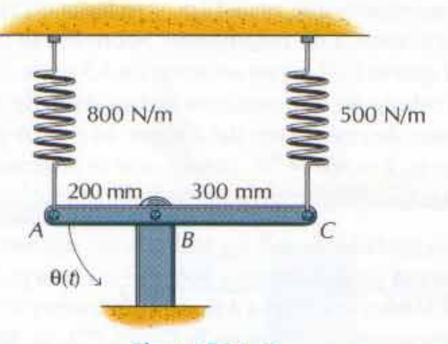


Figura P21-46

21-47 Dos barras esbeltas uniformes están soldadas según se indica en la figura P21-47. La barra ABC pesa 10 N y en la posición de equilibrio está horizontal; la barra BD pesa 15 N y en la posición de equilibrio está vertical; el pivote está exento de rozamientos. Si se desplaza el extremo D 75 mm hacia la izquierda y se suelta a partir del reposo, determinar:

a. La ecuación diferencial del movimiento para la posición angular $\theta(t)$ de la barra.

b. La máxima velocidad del extremo D en el movimiento vibratorio resultante.

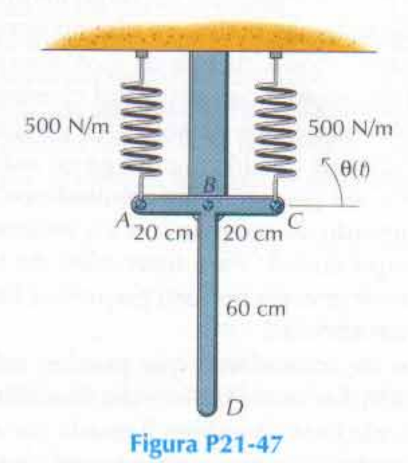


Figura P21-47

21-48* Un pisapapeles de latón (8750 kg/m^3) tiene forma de semicilindro (75 mm de longitud y 100 mm de diámetro). Descansa sobre una superficie plana horizontal, según se indica en la figura P21-48. Si el cilindro rueda sin deslizamiento, escribir la ecuación diferencial del movimiento para la posición angular $\theta(t)$ del pisapapeles y determinar la frecuencia y el periodo del movimiento vibratorio resultante.

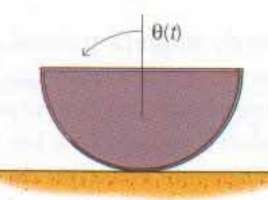


Figura P21-48

21-49 El hilo ligero atado al bloque de 50 N de la figura P21-49 está arrollado a un cilindro uniforme de 35 N. Si el hilo no se desliza por el cilindro, escribir la ecuación diferencial del movimiento para la posición $y(t)$ del bloque de 50 N y determinar la frecuencia y el periodo del movimiento vibratorio resultante.

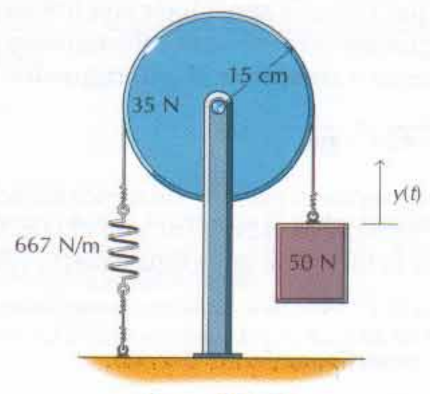


Figura P21-49

21-50* Un peso de 6 kg pende del cilindro del problema 21-40 según se indica en la figura P21-50, mediante un pasador exento de rozamientos que pasa por su centro. Escribir la ecuación diferencial del movimiento para la posición $y_G(t)$ del centro de masa del cilindro y determinar la frecuencia y el periodo del movimiento vibratorio resultante.

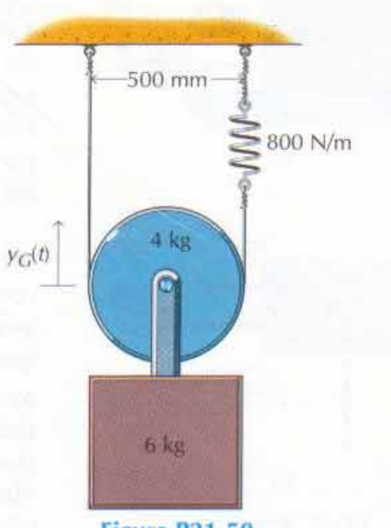


Figura P21-50

21-51 Repetir el problema 21-33 para el caso en que ABC sea una barra esbelta uniforme de 60 N de peso.

21-52* Repetir el problema 21-34 para el caso en que ABC sea una barra esbelta uniforme de masa 12 kg.

21-53 Repetir el problema 21-35 para el caso en que AB y BC sean barras esbeltas uniformes de pesos 10 N y 5 N, respectivamente.

21-54* Una barra esbelta uniforme de 5 kg y 400 mm de longitud está unida rígidamente a un cilindro uniforme de 8 kg y 300 mm de diámetro, según se indica en la figura P21-54. Si el cilindro rueda sin deslizamiento por la superficie horizontal, escribir la ecuación diferencial del movimiento para la posición angular $\theta(t)$ del cilindro y determinar la frecuencia y el periodo del movimiento vibratorio resultante.

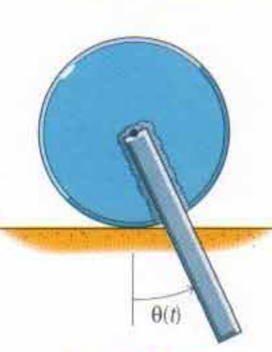


Figura P21-54

21.3 VIBRACIONES LIBRES AMORTIGUADAS

El análisis de las vibraciones libres no amortiguadas hecho en los apartados anteriores sólo es una idealización de sistemas reales, ya que no tiene en cuenta las pérdidas de energía en los rozamientos. Una vez en movimiento, esos sistemas idealizados vibrarían indefinidamente con amplitud constante. Sin embargo, los sistemas reales pierden energía en los rozamientos y llegan a pararse a menos que exista una fuente de energía que los mantenga en marcha. Cuando la energía que pierda el sistema sea pequeña, los resultados obtenidos en los apartados anteriores están a menudo de acuerdo con los sistemas reales, al menos durante intervalos de tiempo cortos. Para intervalos de tiempo más prolongados y cuando las pérdidas de energía no sean pequeñas, habrá que incluir los efectos de las fuerzas de rozamiento.

Existen varios tipos de fuerzas de rozamiento que pueden robar energía mecánica de un sistema en vibración. De entre las fuerzas de rozamiento más comunes, podemos citar: el *rozamiento fluido* (también llamado *fuerza de amortiguamiento viscoso*), que aparece cuando los cuerpos se mueven a través de fluidos viscosos; el *rozamiento seco* (también llamado *rozamiento de Coulomb*), que aparece cuando un cuerpo se desliza sobre una superficie seca, y el *rozamiento interno*, que aparece cuando se deforma un cuerpo sólido. El amortiguamiento debido al rozamiento fluido es muy corriente en la práctica y en este primer curso de Dinámica es el único que vamos a considerar.

21.3.1 Amortiguador viscoso lineal



Amortiguador
Figura 21-12

El amortiguamiento viscoso tiene lugar de manera natural cuando sistemas mecánicos tales como el péndulo oscilan en el aire o el agua. También presentan amortiguamiento viscoso los amortiguadores del tipo representado simbólicamente en la figura 21-12, que se añaden a propósito a los sistemas mecánicos para limitar o regular la vibración. Consiste este tipo de amortiguador en un émbolo que se mueve en el interior de un cilindro lleno de un fluido viscoso. Al movimiento del émbolo se opone el fluido, el cual debe atravesar pequeños orificios practicados en aquél o circular por un estrecho huelgo del émbolo. Estos amortiguadores se utilizan en los cierres de puertas y para atenuar golpes. También se utilizan a veces para representar las pérdidas por rozamiento de sistemas en los que no hay dispositivos específicos de amortiguamiento. Por lo general, la masa del amortiguador, como la del resorte, suele despreciarse.

Los amortiguadores viscosos que vamos a considerar son lineales. Es decir, el módulo de la fuerza de amortiguamiento viscoso es directamente proporcional a la celeridad con que se extiende o comprime el amortiguador

$$F = c\dot{x} \qquad (21\text{-}19)$$

La constante de proporcionalidad c recibe el nombre de *coeficiente de amortiguamiento viscoso.* Su unidad en el sistema SI es el N · s/m y en el U.S. Customary system es la lb · s/ft. El sentido de la fuerza de amortiguamiento viscoso siempre es opuesto a la velocidad.

21.3.2 Vibraciones libres con amortiguamiento viscoso

Para ilustrar la vibración libre con amortiguamiento viscoso, añadiremos al sistema bloque-resorte de la figura 21-5*a* un amortiguador, en la forma que se in-

dica en la figura 21-13*a*. En la figura 21-13*b* podemos ver el diagrama de sólido libre del bloque, en el cual éste se ha desplazado una distancia arbitraria en el sentido positivo de las abscisas. La fuerza recuperadora elástica del resorte $F_s = kx$ está dirigida hacia la posición de equilibrio (sentido negativo de las abscisas). Como los sentidos positivos de la velocidad y de la aceleración coinciden con el de las abscisas, la fuerza amortiguadora $F_d = c\dot{x}$ también estará dirigida en el sentido negativo de las abscisas. Aplicando la segunda ley de Newton $\Sigma F = ma_x = m\ddot{x}$ al bloque, tenemos la ecuación diferencial de su movimiento

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \qquad \textbf{(21-20a)}$$

o sea

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad \textbf{(21-20b)}$$

que es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

La teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias nos dice que la solución de toda ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes tiene siempre la forma

$$x(t) = De^{\lambda t} \qquad \textbf{(21-21)}$$

donde las constantes D y λ deben satisfacer la ecuación diferencial y las condiciones iniciales. Aplicando la ecuación 21-21 en la 21-20 tenemos la ecuación característica[1]

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \qquad \textbf{(21-22)}$$

que tiene por raíces

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \qquad \textbf{(21-23)}$$

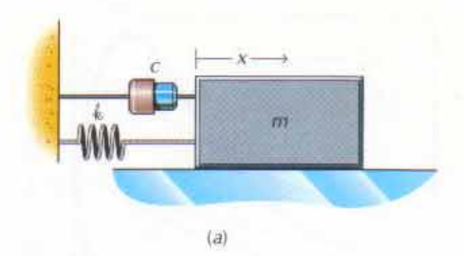
El desplazamiento del bloque vendrá entonces dado por[2]

$$x(t) = D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t} \qquad \textbf{(21-24)}$$

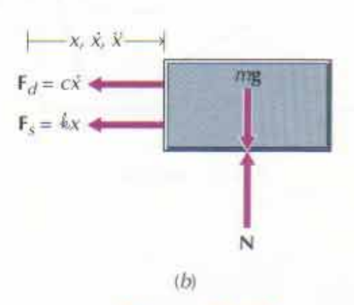
donde las constantes D_1 y D_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales (en $t = 0$; $x = D_1 + D_2 = x_0$ y $\dot{x} = D_1\lambda_1 + D_2\lambda_2 = v_0$) y λ_1 y λ_2 vienen dadas por la ecuación 21-23.

Sin embargo, antes de discutir la solución vamos a escribir las raíces (ec. 21-23) en función de variables más convenientes. La combinación adimensional de constantes

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{c}{2m\omega_n} \qquad \textbf{(21-25)}$$



(*a*)



(*b*)

Figura 21-13

[1] Si la constante D es nula, la ecuación 21-21 da la solución trivial $x = 0$, que carece de interés. Evidentemente, la exponencial $e^{\lambda t}$ no es nunca nula. Por tanto, el factor $De^{\lambda t}$ no será nunca nulo y podremos dividir la ecuación por él.

[2] Cuando la cantidad subradical de la ecuación 21-23 es nula, las dos raíces son iguales $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -c/2m = -\sqrt{k/m} = \omega_n$ (ya que $c = 2\sqrt{mk}$). En tal caso, la integral general de la ecuación 21-20 es

$$x(t) = (B + Ct)\,e^{\lambda t}$$

según puede comprobarse por sustitución directa.

se denomina *razón de amortiguamiento.*[1] Escribiéndola en función de la razón de amortiguamiento ζ y de la pulsación propia ω_n, la ecuación 21-23 queda en la forma

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad \textbf{(21-26)}$$

El comportamiento del sistema depende de que la cantidad subradical de la ecuación 21-26 sea positiva, nula o negativa. El valor de c que haga nulo el radical recibe el nombre de *coeficiente de amortiguamiento crítico* c_{cr}. Por tanto,

$$c_{cr} = 2m\omega_n = 2\sqrt{mk} \qquad \textbf{(21-27)}$$

La solución (ec. 21-24) tendrá tres tipos de comportamiento totalmente distintos según que el amortiguamiento real del sistema c sea mayor, igual o menor que c_{cr}.[2] En los tres apartados que siguen vamos a analizar por separado las distintas posibilidades.

21.3.3 Sistemas sobreamortiguados

Cuando el coeficiente de amortiguamiento c sea mayor que c_{cr}, la razón de amortiguamiento ζ será mayor que la unidad, el radical de la ecuación 21-26 será real y las dos raíces λ_1 y λ_2 serán reales y diferentes. Además, como $\sqrt{\zeta^2 - 1} < \zeta$, ambas raíces serán negativas. Por tanto, el desplazamiento (ec. 21-24) simplemente disminuirá tendiendo a cero al crecer t y el movimiento no será vibratorio.

En la figura 21-14 se ha representado, para condiciones iniciales representativas, el desplazamiento dado por la ecuación 21-24. En este caso, el amortiguamiento es tan severo que el sistema sobreamortiguado vuelve lentamente a su posición de equilibrio. Como el sistema no oscila, no hay periodo ni frecuencia asociados a los movimientos *sobreamortiguados* o con *amortiguamiento supercrítico.*

Figura 21-14

21.3.4 Sistemas con amortiguamiento crítico

Cuando el coeficiente de amortiguamiento c es igual a c_{cr}, la razón de amortiguamiento ζ es igual a uno, el radical de la ecuación 21-26 es nulo y las dos raíces $\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$ son iguales y negativas. En este caso, la solución tiene la forma especial

$$x(t) = (B + Ct)\,e^{-\omega_n t} \qquad \textbf{(21-28)}$$

También ahora, el desplazamiento (ec. 21-24) tiende a cero al crecer t y el movimiento no es oscilatorio.

Cualitativamente, el movimiento descrito por la ecuación 21-28 correspondiente al amortiguamiento crítico es igual que el del movimiento con amorti-

[1] En este ejemplo, las constantes que aparecen en las definiciones de la razón de amortiguamiento ζ y de la pulsación propia ω_n son la masa real m del sistema, el coeficiente de amortiguamiento c y la constante del resorte k. Sin embargo, en general, deberán interpretarse como la *masa eficaz* del sistema (coeficiente del término en $\ddot{x}$ en la ecuación 21-20), el *coeficiente de amortiguamiento eficaz* (coeficiente del término en $\dot{x}$ en la ecuación 21-20) y la *constante eficaz del resorte* (coeficiente del término en x en la ecuación 21-20), respectivamente.

[2] Como siempre, las constantes m, c y k pueden, o no, ser valores del sistema real. Más bien deben interpretarse como coeficientes de la ecuación diferencial del movimiento cuando se escribe en forma normal —ec. 21-20*b*.

guamiento supercrítico. El amortiguamiento crítico sólo tiene una importancia especial por ser el punto que separa los movimientos aperiódicos de los oscilatorios amortiguados. Es decir, el amortiguamiento crítico es la menor cantidad de amortiguamiento para la cual no oscile el sistema. Además, un sistema con amortiguamiento crítico pasará al estado de reposo en menos tiempo que cualquier otro sistema que parta de las mismas condiciones iniciales.[1] En la figura 21-15 podemos ver curvas que representan el desplazamiento de un sistema, en los casos de sobreamortiguamiento y de amortiguamiento crítico, partiendo de un mismo desplazamiento inicial y con la misma velocidad inicial.

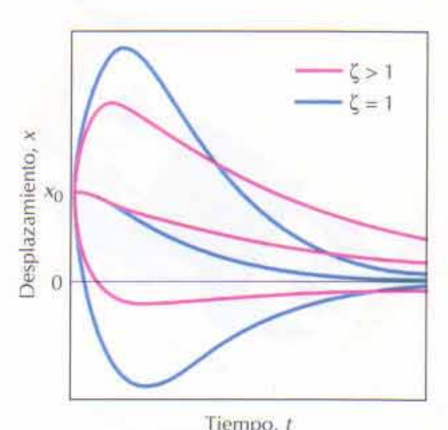


Figura 21-15

21.3.5 Sistemas subamortiguados

Cuando el coeficiente de amortiguamiento c es menor que c_{cr}, la razón de amortiguamiento ζ es menor que uno, el radical de la ecuación 21-23 es imaginario y las dos raíces λ_1 y λ_2 son complejas conjugadas,

$$\lambda_1 = -\zeta\omega_n + i\omega_d \qquad \textbf{(21-29a)}$$
$$\lambda_2 = -\zeta\omega_n - i\omega_d \qquad \textbf{(21-29b)}$$

donde

$$i = \sqrt{-1} \qquad \text{y} \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Al aplicar estos valores en la ecuación 21-24, la ecuación del desplazamiento queda en la forma

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}(D_1 e^{i\omega_d t} + D_2 e^{-i\omega_d t}) \qquad \textbf{(21-30)}$$

Utilizando la fórmula de Euler $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, la ecuación 21-30 podrá escribirse en la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\xi\omega_n t}[(D_1 + D_2)\cos\omega_d t + i(D_1 - D_2)\operatorname{sen}\omega_d t] \\ &= e^{-\xi\omega_n t}(B\cos\omega_d t + C\operatorname{sen}\omega_d t) \qquad \textbf{(21-31a)} \\ &= Ae^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi_c) \qquad \textbf{(21-31b)} \end{aligned}$$

Las constantes $B = D_1 + D_2$ y $C = i(D_1 - D_2)$ o $A = \sqrt{B^2 + C^2}$ y $\phi_c = \tan^{-1}B/C$ deberán determinarse a partir de las condiciones iniciales. En la figura 21-16 podemos ver una curva de desplazamiento correspondiente a la ecuación 21-31. Al igual que en los casos anteriores, el desplazamiento tiende a cero cuando t tiende a infinito. Sin embargo, en este caso la respuesta oscila entre los límites fijados por las curvas de decrecimiento exponencial $Ae^{-\xi\omega_n t}$ y $-Ae^{-\xi\omega_n t}$ al ir tendiendo a cero.

El movimiento descrito por la ecuación 21-31 se dice que es *periódico en el tiempo*. El movimiento oscila en torno a la posición de equilibrio, pero la amplitud $Ae^{-\xi\omega_n t}$ disminuye ya que el exponente $-\zeta\omega_n = -c/2m$ es negativo. Como la amplitud de la oscilación amortiguada disminuye monótonamente con el

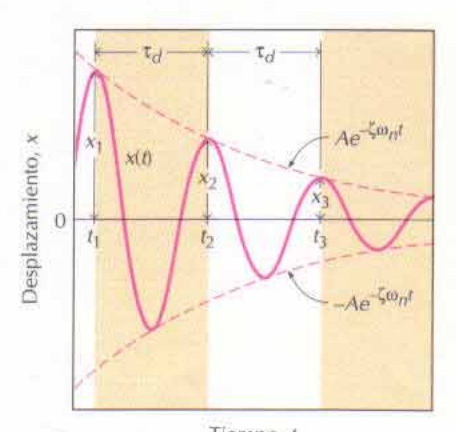


Figura 21-16

[1] En rigor, el sistema descrito por la ecuación 21-28 no alcanza el reposo para ningún valor finito del tiempo. Sin embargo, en la práctica, el movimiento será imperceptible al cabo de un tiempo finito y podremos decir que el sistema ya está en reposo.

tiempo, no se repetirá nunca a sí misma. Por tanto, la oscilación amortiguada no tendrá periodo en el sentido que se definió para las vibraciones libres no amortiguadas. Sin embargo, la semejanza entre las ecuaciones 21-31*b* y 21-5*a* hace que a la constante $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ se le llame *pulsación propia amortiguada*. Como $0 < \zeta < 1$ en el caso de vibraciones subamortiguadas, la pulsación propia amortiguada ω_d será siempre menor que la pulsación propia no amortiguada ω_n. También, por analogía con las vibraciones libres no amortiguadas, podremos definir una *frecuencia propia amortiguada* f_d y un *periodo amortiguado* τ_d en la forma

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi} \qquad \textbf{(21-32a)}$$

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \textbf{(21-32b)}$$

El periodo definido por la ecuación 21-32*b* vemos que es el intervalo de tiempo que transcurre entre dos puntos sucesivos en que la curva representativa de la ecuación 21-31 toca a una de las dos curvas límite representadas en la figura 21-16 o bien es el doble del intervalo de tiempo que transcurre entre dos pasos sucesivos por la posición de equilibrio. Interesa observar que el periodo amortiguado τ_d, la frecuencia propia amortiguada f_d y la pulsación propia amortiguada ω_d son constantes (independientes del tiempo) aun cuando no lo sea la amplitud.

El amortiguador viscoso lineal no es un elemento físico real en muchos sistemas físicos sino un concepto matemático que se utiliza para explicar la disipación de energía. Por esta y otras razones, suele ser necesario determinar experimentalmente el valor de la razón de amortiguamiento ζ. Esto se logra fácilmente midiendo el desplazamiento en dos "picos" sucesivos del movimiento; por ejemplo, x_1 y x_2 en la figura 21-16. Como $\cos(\omega_d t - \phi) = 1$ en t_1 y en t_2, el cociente de estas dos amplitudes será

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{Ae^{-\zeta\omega_n t}}{Ae^{-\zeta\omega_n(t_1+\tau_d)}} = e^{\zeta\omega_n\tau_d}$$

Tomando el logaritmo neperiano de uno y otro miembro y definiendo el *decremento logarítmico* $\delta = \ln\dfrac{x_1}{x_2}$ tenemos

$$\delta = \zeta\omega_n\tau_d = \zeta\omega_n\frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \textbf{(21-33)}$$

Notemos que δ sólo depende de la razón de amortiguamiento ζ y no de t_1 o t_2. Es decir, el decremento logarítmico no depende de cuales sean los picos sucesivos utilizados para medirlo. Por último, despejando ζ tenemos

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \qquad \textbf{(21-34)}$$

Cuando el amortiguamiento del sistema sea pequeño, los desplazamientos x_1 y x_2 serán casi iguales $x_1 \cong x_2$ con lo que $\delta = \ln(x_1/x_2)$ será muy pequeño. Entonces $\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2} \cong 2\pi$ con lo que $\zeta \cong \delta/2\pi$ o sea $\delta \cong 2\pi\zeta$.

PROBLEMA EJEMPLO 21.4

Un bloque de 5 kg se desliza por un plano inclinado exento de rozamiento, según se indica en la figura 21-17*a*. Las constantes de los resortes son $k_1 = k_2 = 2$ kN/m y los coeficientes de amortiguamiento viscoso son $c_1 = c_2 = 25$ N · s/m. Si se desplaza el bloque por el plano inclinado 50 mm hacia arriba a partir de su posición de equilibrio y se suelta con una velocidad inicial de 1,25 m/s hacia abajo del plano cuando $t = 0$, determinar:

a. El periodo amortiguado τ_d, la frecuencia amortiguada f_d y la pulsación amortiguada ω_d de la vibración resultante.

b. La posición del bloque en función del tiempo.

c. El instante t_1 en el cual la amplitud se haya reducido al 1% de su valor inicial.

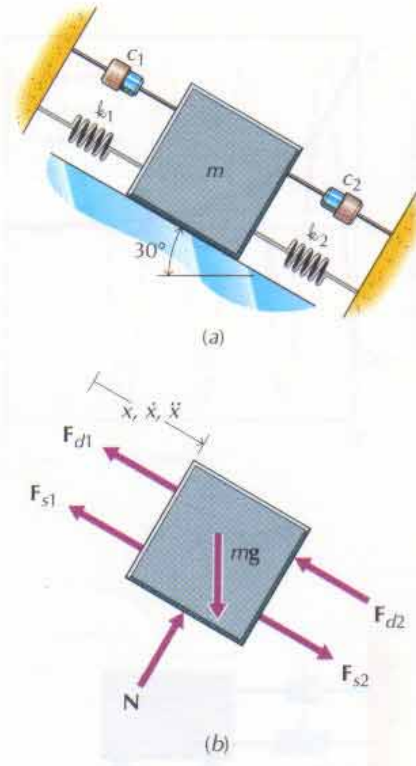


Figura 21-17

SOLUCIÓN

a. En la figura 21-17*b* puede verse el diagrama de sólido libre del bloque. En él, la coordenada x mide la posición del bloque a lo largo del plano inclinado siendo $x = 0$ en la posición de equilibrio. En ésta (antes de perturbar al bloque), las fuerzas de los resortes son proporcionales a su deformación estática $F_{s1} = k_1\delta_{eq1}$, $F_{s2} = k_2\delta_{eq2}$. Como en la posición de equilibrio estático $\dot{x} = 0$, será $F_{d1} = F_{d2} = 0$. Por tanto, la condición de equilibrio da

$$mg \text{ sen } 30° - k_1\delta_{eq1} + k_2\delta_{eq2} = 0 \qquad \textbf{(a)}$$

La ecuación *a* expresa una relación entre las deformaciones estáticas de los resortes y el peso del bloque.

Cuando el bloque se halle en una posición arbitraria x (positiva), el resorte 1 habrá aumentado su alargamiento y $F_1 = k_1[\delta_{eq1} + x]$, mientras que el alargamiento del resorte 2 habrá disminuido y $F_2 = k_2[\delta_{eq2} - x]$. Los dos amortiguadores se oponen al movimiento y ejercen las fuerzas $F_{d1} = c_1\dot{x}$ y $F_{d2} = c_2\dot{x}$ en el sentido negativo de las coordenadas (cuando $\dot{x}$ es positiva). Por tanto, la segunda ley de Newton $\Sigma F_x = m\ddot{x}$ da

$$mg \text{ sen } 30° - k_1(\delta_{eq1} + x) + k_2(\delta_{eq2} - x) - (c_1 + c_2)\dot{x} = m\ddot{x}$$

o sea

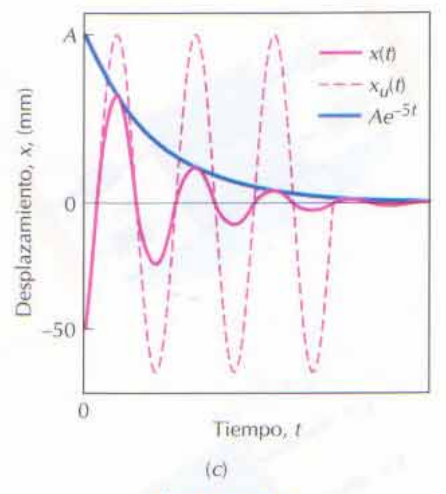
$$mg \text{ sen } 30° - k_1\delta_{eq1} + k_2\delta_{eq2} = m\ddot{x} + (c_1 + c_2)\dot{x} + (k_1 + k_2)x \qquad \textbf{(b)}$$

El primer miembro de la ecuación *b* es nulo en virtud de la ecuación *a*, por lo que la ecuación diferencial del movimiento quedará en la forma

$$m\ddot{x} + (c_1 + c_2)\dot{x} + (k_1 + k_2)x = 0$$
$$5\ddot{x} + 50\dot{x} + 400x = 0$$

En consecuencia, la pulsación propia, la razón de amortiguamiento, la pulsación amortiguada, la frecuencia propia amortiguada y el periodo amortiguado son

$$\omega_n = \sqrt{4000/5} = 28{,}284 \text{ rad/s}$$
$$\zeta = \frac{50}{2(5)(28{,}284)} = 0{,}17678$$
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - (0{,}17678)^2} = 27{,}84 \text{ rad/s} \qquad \text{Resp.}$$



(c)

Figura 21-17

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = 4{,}431 \text{ Hz} \qquad \text{Resp.}$$

$$\tau_d = \frac{1}{f_d} = 0{,}2257 \text{ s} \qquad \text{Resp.}$$

b. El desplazamiento y la velocidad del bloque se pueden escribir en la forma

$$x(t) = e^{-5{,}000t}(B \cos 27{,}84t + C \text{ sen } 27{,}84t)$$
$$\dot{x}(t) = -5{,}000e^{-5{,}000t}(B \cos 27{,}84t + C \text{ sen } 27{,}84t)$$
$$+e^{-5{,}000t}(27{,}84B \text{ sen } 27{,}84t + 27{,}84C \cos 27{,}84t)$$

Pero en $t = 0$, $x = B = -50$ mm y $\dot{x} = -5B + 27{,}84C = 1250$ mm/s. Por tanto, $B = -50$ mm y $C = 35{,}92$ mm, con lo cual

$$x(t) = e^{-5{,}000t}(-50 \cos 27{,}84t + 35{,}92 \text{ sen } 27{,}84t) \qquad \text{Resp.}$$

En la figura 21-17*c* se ha representado esta solución. También se han representado, a efectos de comparación, las dos partes de la solución amortiguada $x_u(t) = -50 \cos 27{,}84t + 35{,}92 \text{ sen } 27{,}84t$ y la amplitud $Ae^{-5{,}00t}$ donde $A = \sqrt{B^2 + c^2} = 61{,}56$ mm.

c. La amplitud inicial de la oscilación es, precisamente, A. Por tanto, en el instante t_1

$$Ae^{-5{,}000t} = 0{,}01A$$

de donde resulta

$$t_1 = 0{,}921 \text{ s} \qquad \text{Resp.}$$

(o sea, poco más de cuatro ciclos de la oscilación).

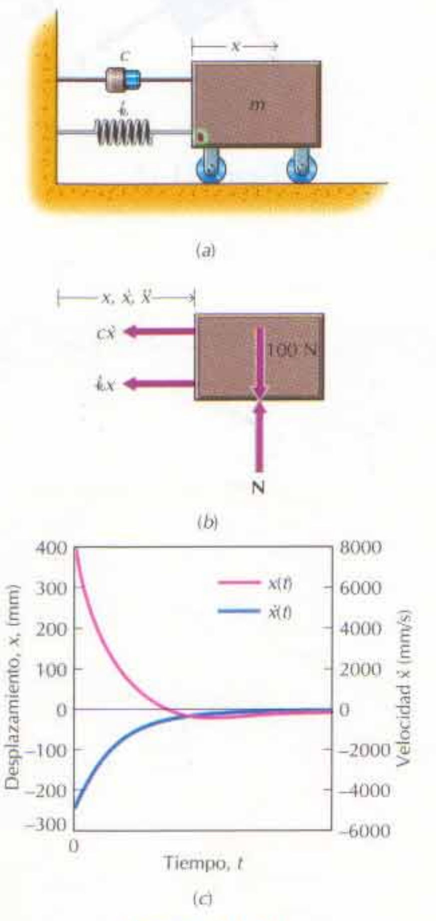


Figura 21-18

PROBLEMA EJEMPLO 21.5

Un carrito de peso 100 N rueda por una superficie horizontal plana, según se indica en la figura 21-18*a*. Se empuja el carrito hacia la derecha 375 mm y se suelta con una velocidad de 4,5 m/s hacia la izquierda en el instante $t = 0$. Si la constante del resorte es $k = 667$ N/m y c el coeficiente de amortiguamiento corresponde al amortiguamiento crítico, determinar:

a. El valor del coeficiente de amortiguamiento c.

b. Si el carrito superará la posición de equilibrio antes de quedar en reposo.

SOLUCIÓN

a. En la figura 21-18*b* puede verse el diagrama de sólido libre del carrito para una posición arbitraria (positiva) x. La segunda ley de Newton $\sum F = m\ddot{x}$ da

$$-c\dot{x} - kx = m\ddot{x}$$

o sea

$$\frac{100}{9{,}81}\ddot{x} + c\dot{x} + 667x = 0$$

Luego, la pulsación propia será

$$\omega_n = \sqrt{\frac{667}{100/(9{,}81)}} = 8{,}089 \text{ rad/s}$$

y la razón de amortiguamiento

$$\zeta = \frac{c_{cr}}{2\,\frac{100}{9{,}81}8{,}089} = 1$$

Por tanto, el coeficiente de amortiguamiento será

$$c = c_{cr} = 164{,}9 \text{ N} \cdot \text{s/m} \qquad \text{Resp.}$$

b. En el caso de amortiguamiento crítico, el desplazamiento y la velocidad del carrito vienen dados por

$$x(t) = (B + Ct)\,e^{-\omega_n t} = (B + Ct)\,e^{-8{,}089t} \text{ mm}$$
$$\dot{x}(t) = [C - 8{,}089(B + Ct)]\,e^{-8{,}089t} \text{ mm/s}$$

Pero en $t = 0$, $x = B = 375$ mm y $dx/dt = C - 8{,}089B = -4500$ mm/s. Por tanto, $B = 375$ mm, $C = -1466{,}6$ mm/s y

$$x(t) = (375 - 1466{,}6t)\,e^{-8{,}089t} \text{ mm}$$

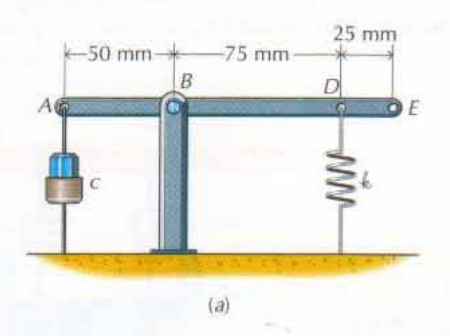
Como B y C tienen signos opuestos, habrá un instante $t_1 = 375/1466{,}6 = 0{,}256$ s en el cual la posición del carrito será nula. Antes de t_1 el carrito estará a un lado de la posición de equilibrio y después de t_1 estará al otro lado. Por tanto, el carrito pasará por la posición de equilibrio antes de quedar en reposo.

En la figura 21-18*c* se han representado la posición y la velocidad del carrito para $0 \le t \le 1{,}5$ s.

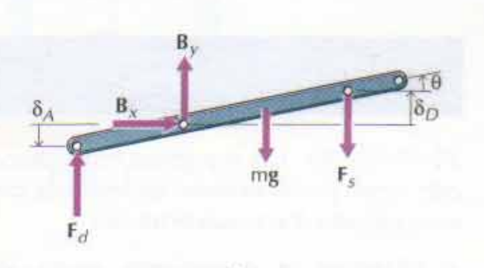
PROBLEMA EJEMPLO 21.6

Una barra esbelta uniforme de 3 kg tiene una longitud de 100 mm y está en equilibrio en la posición horizontal que se indica en la figura 21-19*a*. Cuando se desciende un poco E y se suelta, se observa que la amplitud de cada pico de la oscilación es un 90% de la amplitud del pico anterior. Si la constante del resorte es $k = 400$ N/m, determinar:

a. El valor del coeficiente de amortiguamiento c.
b. El periodo amortiguado τ_d, la frecuencia amortiguada f_d y la pulsación amortiguada ω_d de la vibración resultante.



(a)



(b)

Figura 21-19

SOLUCIÓN

a. Se determina el decremento logarítmico a partir del cociente entre amplitudes sucesivas $\delta = \ln(x_1/x_2) = \ln(1/0{,}9) = 0{,}10536$. Luego, la razón de amortiguamiento será

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} = 0{,}01677 = \frac{c_{eff}}{2\sqrt{m_{eff}k_{eff}}} \qquad \textbf{(a)}$$

donde m_{eff}, c_{eff} y son los coeficientes de la ecuación diferencial del movimiento.

En la figura 21-19*b* puede verse el diagrama de sólido libre de la barra. En él, θ mide la posición angular de la barra, siendo θ positiva en sentido antihorario y $\theta = 0$ en la posición de equilibrio. En ésta (antes de perturbar la barra), la fuerza del amortiguador es $F_d = 0$ y la fuerza del resorte $F_s = k\,\delta_{eq}$ donde δ_{eq} es el alargamiento que tiene el resorte en la posición de equilibrio. Por tanto, la ecuación de momentos en el equilibrio

$$\circlearrowleft + \sum M_B = 0: \qquad -0,075k\delta_{eq} - 0,025mg = 0 \qquad (b)$$

da $\delta_{eq} = -24,53$ mm.

Cuando se gira la barra en sentido antihorario (en el sentido positivo de θ), el alargamiento del resorte será $\delta_{eq} + \delta_D$ donde, para rotaciones de ángulo pequeño, $\delta_D \cong 0,075\,\theta$. Análogamente, el amortiguador se comprimirá a razón de $\dot{\delta}_A \cong 0,050\dot{\theta}$. Por tanto, la ecuación diferencial del movimiento será

$$\circlearrowleft + \sum M_B = 0: \qquad -0,025mg - 0,075\,k(\delta_{eq} + \delta_D) - 0,050c\dot{\delta}_A = I_B\ddot{\theta}$$

o sea

$$I_B\ddot{\theta} + (0,050)^2 c\dot{\theta} + (0,075)^2 k\theta = -0,075\,k\delta_{eq} - 0,025mg \qquad (c)$$

donde $I_B = \frac{1}{12}(3)(0,150)^2 + (3)(0,025)^2 = 7,5(10^{-3})\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. Ahora bien, el segundo miembro de la ecuación *c* es nulo en virtud de la ecuación *b*, por lo que

$$\ddot{\theta} + 0,0333c\dot{\theta} + 300\theta = 0$$

Sustituyendo en la ecuación *a* por sus valores los coeficientes $m_{eff} = 1$, $c_{eff} = 0,3333c$ y $k_{eff} = 300$, se tiene el coeficiente de amortiguamiento viscoso

$$c = \frac{0,01677}{0,3333}(2)\sqrt{300} = 1,743\ \text{N}\cdot\text{s/m} \qquad \text{Resp.}$$

b. Entonces, la pulsación propia será $\omega_n = \sqrt{300} = 17,321$ rad/s y

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 17,318\ \text{rad/s} \qquad \text{Resp.}$$

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = 2,756\ \text{Hz} \qquad \tau_d = \frac{1}{f_d} = 0,363\ \text{s} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

21-55 a 21-68 Las siguientes ecuaciones representan la posición de un punto material animado de movimiento vibratorio amortiguado. Para cada ecuación

a. Clasificar el movimiento según sea subamortiguado, sobreamortiguado o de amortiguamiento crítico.
b. Representar gráficamente la posición, velocidad y aceleración del punto en función del tiempo desde $t = 0$ hasta que la amplitud se haya reducido al 5% de su valor inicial o hasta tres ciclos de la oscilación, lo que se produzca antes.

21-55* $x(t) = 10e^{-0,1t}\cos(5t - 1,2)$ cm

21-56* $x(t) = (5 + 3t)e^{-2t}$ mm

21-57 $x(t) = 10e^{-0,5t} - 8e^{-1,5t}$ rad

21-58* $x(t) = e^{-0{,}05t}(8 \cos 3t - 6 \text{ sen } 3t)$ mm

21-59 $x(t) = 8e^{-0{,}5t} - 8e^{-2t}$ cm

21-60* $x(t) = (-2 + 5t)e^{-1{,}5t}$ rad

21-61 $x(t) = e^{-0{,}02t}(12 \text{ sen } 12t - 5 \cos 12t)$ cm

21-62 $x(t) = -8e^{-0{,}02t} \text{ sen } (15t + 2{,}5)$ mm

21-63* $x(t) = -(5 + 10t)e^{-0{,}2t}$ cm

21-64 $x(t) = 7e^{-2t} + 5e^{-3t}$ rad

21-65* $x(t) = (4 - t)e^{-1{,}2t}$ rad

21-66* $x(t) = 6e^{-0{,}15t} \text{ sen } (10t - 2{,}5)$ mm

21-67 $x(t) = 3e^{-0{,}06t} \cos (8t + 1{,}8)$ cm

21-68 $x(t) = 5e^{-0{,}5t} - 8e^{-1{,}5t}$ mm

21-69 a 21-76 Las siguientes ecuaciones diferenciales y condiciones iniciales representan el movimiento de un punto material animado de movimiento vibratorio amortiguado. Para cada ecuación

a. Clasificar el movimiento según sea subamortiguado, sobreamortiguado o con amortiguamiento crítico.
b. Representar gráficamente la posición, velocidad y aceleración del punto en función del tiempo desde $t = 0$ hasta que la amplitud se haya reducido a un 5% de su valor inicial o hasta tres ciclos de la oscilación, lo que se produzca antes.

21-69* $0{,}5\ddot{x} + 5\dot{x} + 40x = 0$; x, cm
$x(0) = 3$ cm $\dot{x}(0) = 15$ cm/s

21-70* $3\ddot{x} + 60\dot{x} + 240x = 0$; x, mm
$x(0) = -30$ mm; $\dot{x}(0) = 150$ mm/s

21-71 $0{,}25\ddot{x} + 5\dot{x} + 25x = 0$; x, cm
$x(0) = -5$ cm $\dot{x}(0) = 50$ cm/s

21-72* $2\ddot{x} + 4\dot{x} + 40x = 0$; x, mm
$x(0) = 100$ mm; $\dot{x}(0) = 150$ mm/s

21-73 $0{,}1\ddot{x} + 5\dot{x} + 5x = 0$; x, cm
$x(0) = 8$ cm $\dot{x}(0) = 25$ cm/s

21-74 $4\ddot{x} + 100\dot{x} + 200x = 0$; x, mm
$x(0) = -100$ mm; $\dot{x}(0) = -250$ mm/s

21-75* $0{,}2\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$; x, cm
$x(0) = -15$ cm $\dot{x}(0) = 0$ cm/s

21-76 $5\ddot{x} + 10\dot{x} + 50x = 0$; x, mm
$x(0) = 0$ mm; $\dot{x}(0) = 500$ mm/s

21-77* Un bloque de masa m se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamientos, según se indica en la figura P21-77. Determinar el coeficiente de amortiguamiento c del amortiguador único que podría sustituir a los dos representados sin que cambiara la frecuencia de vibración del bloque.

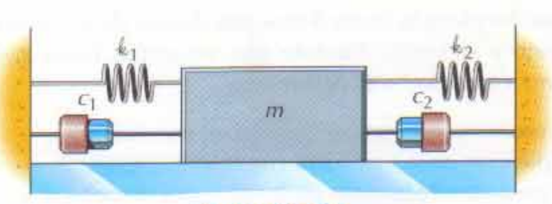


Figura P21-77

21-78 Un bloque de masa m se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamientos, según se indica en la figura P21-78. Determinar el coeficiente de amortiguamiento c del amortiguador único que podría sustituir a los dos representados sin que cambiara la frecuencia de vibración del bloque.

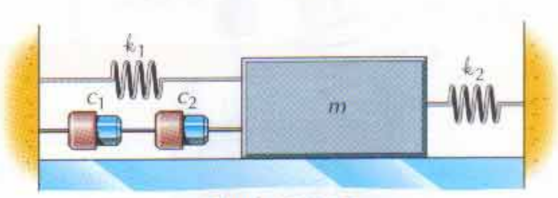


Figura P21-78

21-79 Un bloque que pesa 50 N pende, en un plano vertical, de dos resortes y un amortiguador, según se indica en la figura P21-79. Si se desplaza el bloque 175 mm por encima de su posición de equilibrio y se suelta dándole una velocidad hacia arriba de 3,75 m/s cuando $t = 0$, determinar

a. La ecuación diferencial que rige el movimiento.
b. El periodo de la vibración resultante.
c. La posición del bloque en función del tiempo.
d. El primer instante $t_1 > 0$ en que el bloque pasa por su posición de equilibrio.

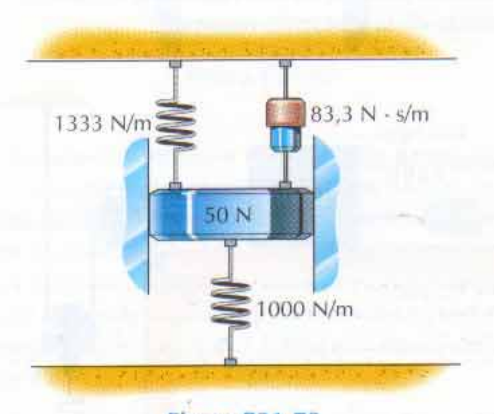


Figura P21-79

21-80* Una masa de 2 kg pende, en un plano vertical, de dos resortes y un amortiguador, según se indica en la figura P21-

80. Si se desplaza la masa 5 mm por debajo de su posición de equilibrio y se suelta dándole una velocidad hacia arriba de 250 mm/s cuando $t = 0$, determinar

a. La ecuación diferencial que rige el movimiento.
b. El periodo de la vibración resultante.
c. La posición de la masa en función del tiempo.
d. El primer instante $t_1 > 0$ en que la masa pasa por su posición de equilibrio.

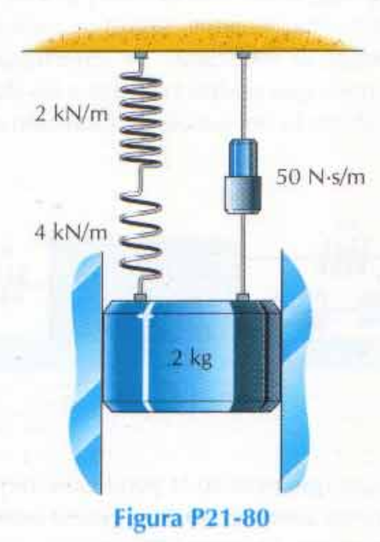


Figura P21-80

21-81 Un bloque que pesa 100 N se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamiento, según se indica en la figura P21-81. Los dos resortes están sometidos a tracción en todo momento y las poleas son pequeñas y exentas de rozamientos. Si se desplaza el bloque 75 mm a la izquierda de su posición de equilibrio y se suelta dándole una velocidad de 1,25 m/s hacia la derecha cuando $t = 0$, determinar.

a. La ecuación diferencial que rige el movimiento.
b. El periodo de la vibración resultante.

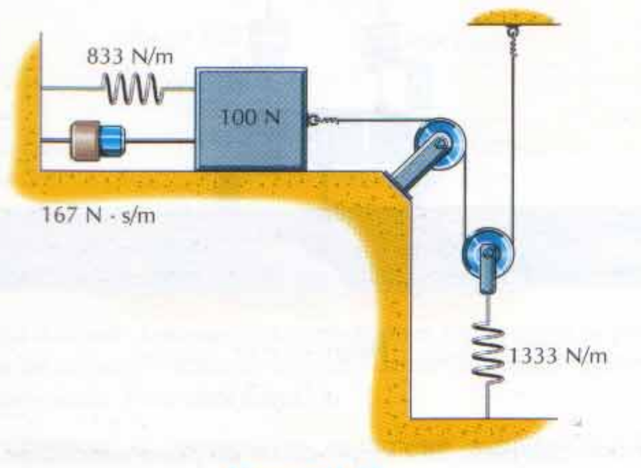


Figura P21-81

c. La posición del bloque en función del tiempo.
d. El primer instante $t_1 > 0$ en que se anula la velocidad del bloque.

21-82* Una masa de 4 kg pende en un plano vertical, según se indica en la figura P21-82. El resorte se halla sometido a tracción en todo momento y las poleas son pequeñas y exentas de rozamientos. Si se desplaza la masa 15 mm por encima de su posición de equilibrio y se suelta dándole una velocidad hacia abajo de 750 mm/s cuando $t = 0$, determinar

a. La ecuación diferencial que rige el movimiento.
b. El periodo de la vibración resultante.
c. La posición de la masa en función del tiempo.
d. El primer instante $t_1 > 0$ en que se anula la velocidad de la masa.

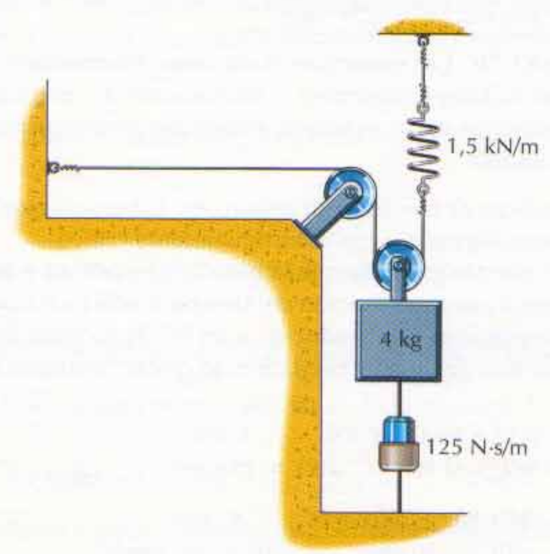


Figura P21-82

21-83* Los dos bloques de la figura P21-83 penden, en un plano vertical, de una barra de masa despreciable que está hori-

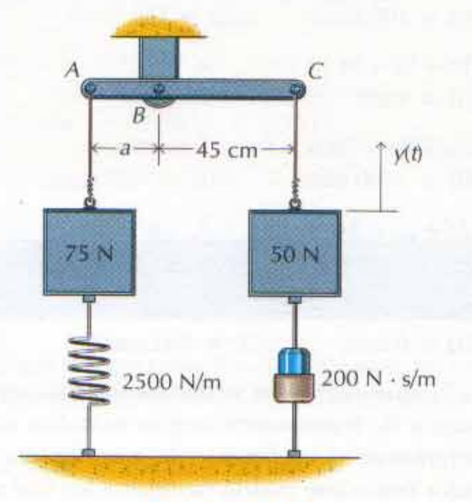


Figura P21-83

zontal en la posición de equilibrio. Si $a = 15$ cm y se suponen oscilaciones de pequeña amplitud, determinar.

a. La razón de amortiguamiento ζ.
b. El tipo de movimiento (subamortiguado, sobreamortiguado o con amortiguamiento crítico).
c. La frecuencia y periodo del movimiento (si procede).
d. El valor de a que da amortiguamiento crítico.

21-84* Las dos masas de la figura P21-84 se deslizan por sendas superficies horizontales exentas de rozamiento. En la posición de equilibrio, la barra *ABC* está vertical, siendo despreciable su masa. Si $a = 100$ mm y se suponen oscilaciones de pequeña amplitud, determinar

a. La razón de amortiguamiento ζ.
b. El tipo de movimiento (subamortiguado, sobreamortiguado o con amortiguamiento crítico).
c. La frecuencia y periodo del movimiento (si procede).
d. El valor de a que da amortiguamiento crítico.

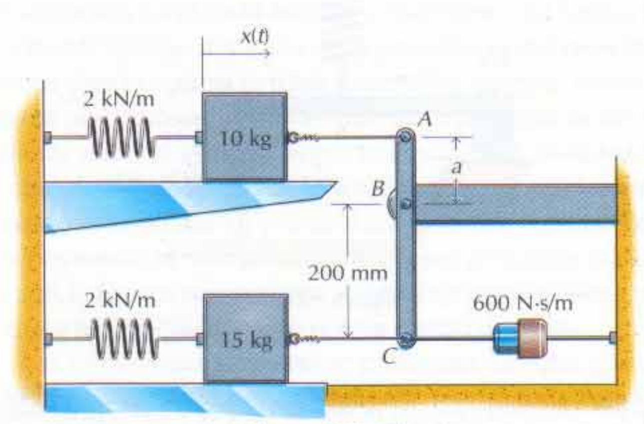


Figura P21-84

21-85 El bloque de 25 N de peso de la figura P21-85 se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamiento mientras que el que pesa 15 N pende en un plano vertical. La barra *ABC* tiene masa despreciable y en la posición de equilibrio tiene horizontal su brazo *AB*. Si $c = 250$ N · s / m y se suponen oscilaciones de pequeña amplitud, determinar

a. La razón de amortiguamiento ζ.
b. El tipo de movimiento (subamortiguado, sobreamortiguado o con amortiguamiento crítico).
c. La frecuencia y periodo del movimiento (si procede).
d. El valor de c que da amortiguamiento crítico.

21-86 Para el sistema masa-resorte-amortiguador de la figura 21-13 (pág. 467), determinar la razón de amplitudes de la vibración entre

a. Los picos positivos segundo y tercero.
b. Los picos positivos primero y tercero.
c. Los picos positivos tercero y quinto.
d. El primer pico positivo y el pico negativo siguiente.

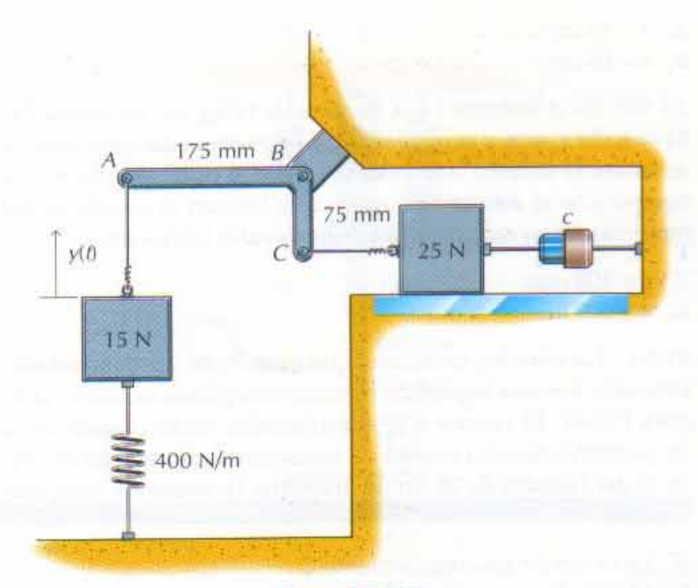


Figura P21-85

21-87 Se quiere determinar el coeficiente de amortiguamiento c de un amortiguador observando la oscilación de un bloque de 50 N de peso que pende de él según se indica en la figura P21-87. Cuando se tira hacia abajo del bloque y se suelta, se observa que la amplitud de la vibración resultante disminuye de 125 mm a 75 mm en 20 ciclos de oscilación. Determinar el valor de c si los 20 ciclos se completan en 5 s.

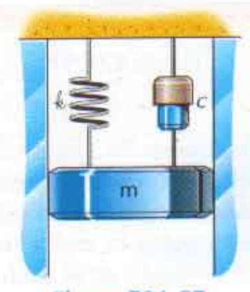


Figura P21-87

21-88* Se quiere determinar el coeficiente de amortiguamiento c de un amortiguador observando la oscilación de un bloque que pende de él en la forma indicada en la figura P21-87. Cuando se tira hacia abajo del bloque y se suelta, se observa que la amplitud de la vibración resultante disminuye de 75 mm a 20 mm en 10 ciclos de oscilación. Determinar el valor de c si la constante del resorte es $k = 1{,}5$ kN/m y los 10 ciclos se completan en 8 s.

21-89 En el instante $t = 0$, el peso de 50 N del problema 21-83 se halla y_o cm por encima de su posición de equilibrio. Si se suelta el sistema con velocidad inicial nula, determinar el tiempo y/o el número de ciclos que tardará la amplitud del movimiento en reducirse al 1% de su valor inicial para:

a. $a = 15$ cm
b. $a = 60$ cm

21-90* En el instante $t = 0$, la masa de 10 kg del problema 21-84 se halla x_0 mm a la izquierda de su posición de equilibrio. Si se suelta el sistema con velocidad inicial nula, determinar el tiempo y/o el número de ciclos que tardará la amplitud del movimiento en reducirse al 1% de su valor inicial para:

a. $a = 100$ mm
b. $a = 500$ mm

21-91 Un cilindro uniforme, que pesa 35 N, rueda sin deslizamiento por una superficie horizontal según se indica en la figura P21-91. El resorte y el amortiguador están conectados a un pequeño pasador exento de rozamientos situado en el centro G del cilindro de 20 cm de diámetro. Determinar, para este sistema:

a. La razón de amortiguamiento ζ.
b. El tipo de movimiento (subamortiguado, sobreamortiguado o con amortiguamiento crítico).
c. La frecuencia y periodo del movimiento (si procede).

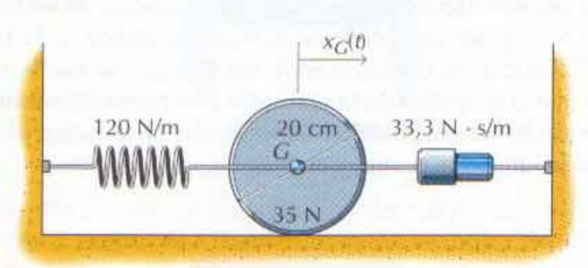


Figura P21-91

21-92* Un cilindro uniforme de 5 kg rueda sin deslizamiento por un plano inclinado, según se indica en la figura P21-92. El resorte está unido a un hilo ligero inextensible, arrollado sobre el cilindro y el amortiguador lo está a un pequeño pasador exento de rozamientos situado en el centro G del cilindro de 400 mm de diámetro. Determinar, para este sistema:

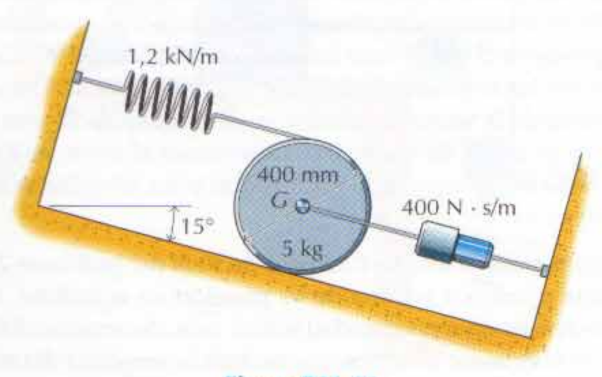


Figura P21-92

a. La razón de amortiguamiento ζ.
b. El tipo de movimiento (subamortiguado, sobreamortiguado o con amortiguamiento crítico).
c. La frecuencia y periodo del movimiento (si procede).

21-93 Una barra esbelta uniforme de 1,5 m de longitud y que pesa 15 N gira alrededor de un pivote exento de rozamientos situado en A, según se indica en la figura P21-93. En la posición de equilibrio, la barra está horizontal. Determinar, para este sistema:

a. La razón de amortiguamiento ζ.
b. El tipo de movimiento (subamortiguado, sobreamortiguado o con amortiguamiento crítico).
c. La frecuencia y periodo del movimiento (si procede).

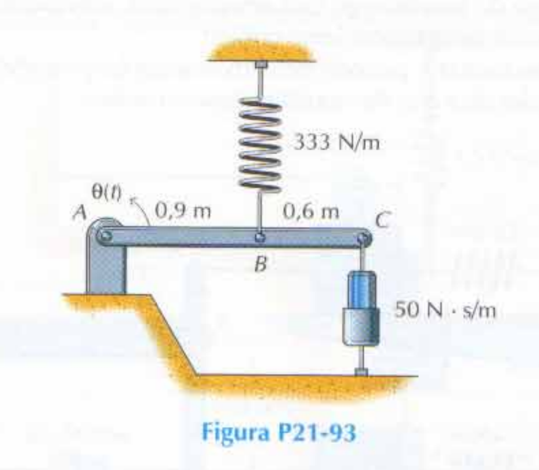


Figura P21-93

21-94* Una barra esbelta uniforme de 2 kg y 500 mm de longitud gira alrededor de un pivote exento de rozamientos situado en B, según se indica en la figura P21-94. En la posición de equilibrio, la barra está horizontal. Determinar, para este sistema:

a. La razón de amortiguamiento ζ.
b. El tipo de movimiento (subamortiguado, sobreamortiguado o con amortiguamiento crítico).
c. La frecuencia y periodo del movimiento (si procede).

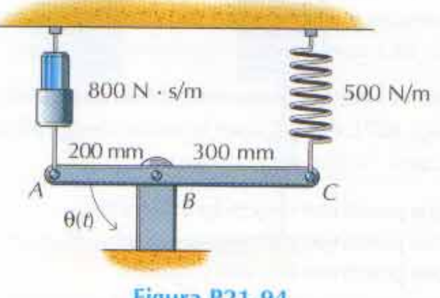


Figura P21-94

21-95 Dos barras esbeltas uniformes están soldadas según se indica en la figura P21-95. La barra *ABC* pesa 10 N y en la posición de equilibrio está horizontal; la barra *BD* pesa 15 N y en la posición de equilibrio está vertical; el pivote está exento de rozamientos. Determinar, para este sistema:

a. La razón de amortiguamiento ζ.
b. El tipo de movimiento (subamortiguado, sobreamortiguado o con amortiguamiento crítico).
c. La frecuencia y periodo del movimiento (si procede).

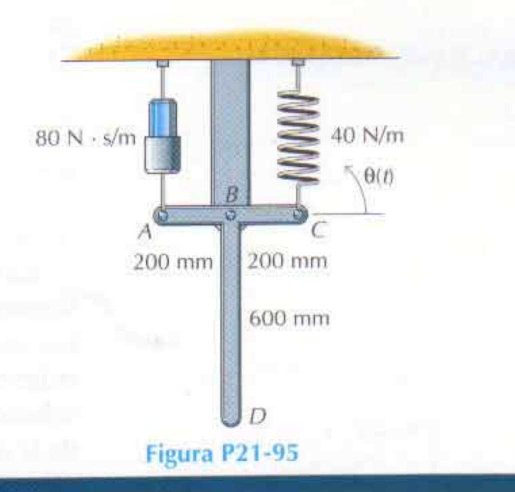


Figura P21-95

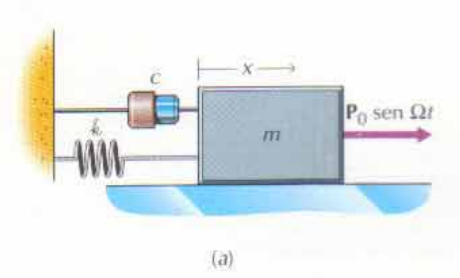
21.4 VIBRACIONES FORZADAS

La vibración forzada la origina y mantiene una fuerza periódica aplicada exteriormente que no depende de la posición ni del movimiento del cuerpo. Dicha fuerza puede aplicarse directamente al cuerpo, como sucede en el caso de la fuerza que mantiene en movimiento al péndulo de un reloj. La fuerza se puede generar cuando oscile el soporte al cual está unido el cuerpo, como ocurre en el caso de la fuerza aplicada a un automóvil por los muelles de su suspensión cuando el vehículo va por una calzada con baches. También puede generarla interiormente el movimiento de piezas giratorias no equilibradas, como sucede con la fuerza transmitida al árbol de transmisión cuando una rueda gira en torno a un eje que no pase por su centro de masa.

Las vibraciones forzadas se presentan siempre que a un cuerpo se le aplique una fuerza variable periódicamente. Como toda función periódica del tiempo no armónica se puede expresar mediante una serie de Fourier (serie de funciones armónicas simples), vamos a considerar una función armónica del tiempo

$$P = P_0 \operatorname{sen} \Omega t \qquad \text{o bien} \qquad P = P_0 \cos \Omega t$$

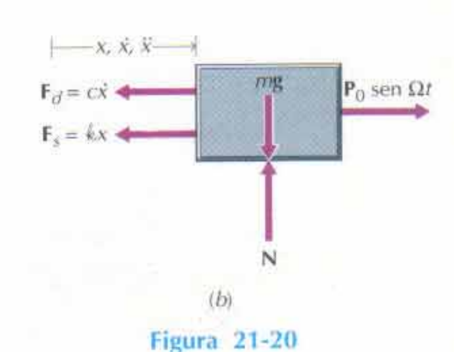
Las constantes P_0 y Ω son, respectivamente, la amplitud y la pulsación (rad/s) de la fuerza impulsora.



(a)

21.4.1 Fuerza armónica de excitación

Para ilustrar las vibraciones forzadas con amortiguamiento viscoso, añadiremos al sistema bloque-resorte-amortiguador de la figura 21-13*a* una fuerza armónica de excitación, tal como se indica en la figura 21-20*a*. En la figura 21-20*b* podemos ver el diagrama de sólido libre del bloque, en el cual éste se halla desplazado una cantidad arbitraria en el sentido positivo de las abscisas. La fuerza elástica recuperadora que ejerce el resorte, $F_s = kx$, está dirigida hacia la posición de equilibrio (sentido de las abscisas negativas) y la fuerza amortiguadora, $F_d = c\dot{x}$ se ejerce en sentido opuesto al de la velocidad (también en el sentido



(b)

Figura 21-20

de las abscisas negativas). Aplicando al bloque la segunda ley de Newton $\Sigma F = ma_x = m\ddot{x}$ tendremos la ecuación diferencial del movimiento del bloque

$$-\,c\dot{x} - kx + P_0 \text{ sen } \Omega t = m\ddot{x}$$

o sea

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \text{ sen } \Omega t \tag{21-35}$$

La ecuación 21-35 es una ecuación diferencial lineal, de segundo orden, no homogénea y de coeficientes constantes. Su integral general consta de dos partes: una *solución particular* más una *solución complementaria*. La solución particular es una función cualquiera $x_p(t)$ que satisfaga a la ecuación diferencial. La solución complementaria es la función $x_c(t)$ que satisface a la parte homogénea de la ecuación diferencial, o sea a la ecuación 21-20. Por tanto, la solución complementaria vendrá dada por las ecuaciones 21-24, 21-28 o 21-31, según sea el valor de la razón de amortiguamiento ζ. La integral general de la ecuación 21-35 es, pues,

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \tag{21-36}$$

La parte complementaria de la integral general se ha estudiado ya detalladamente en el apartado 21.3. Por tanto, no la vamos a seguir considerando salvo para indicar que:

1. Tanto si el sistema está sobreamortiguado como si está subamortiguado o con amortiguamiento crítico, $x_c(t)$ contiene dos constantes que hay que elegir de manera que satisfagan las condiciones iniciales. Ahora bien, al calcular dichas constantes debe incluirse la solución particular. Es decir, si la posición y velocidad iniciales son $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$, respectivamente, será $x_c(0) = x_0 - x_p(0)$ y $\dot{x}_c(0) = v_0 - \dot{x}_p(0)$.
2. Ningún sistema real está totalmente exento de rozamientos. Por tanto, la solución complementaria $x_c(t)$ irá disminuyendo en el transcurso del tiempo. Como esta solución sólo será apreciable durante cierto tiempo (generalmente corto) a partir del inicio del movimiento, recibe el nombre de solución transitoria.

La parte particular de la solución es una función cualquiera $x_p(t)$ que satisfaga a la ecuación 21-35. Como la fuerza periódica de excitación es armónica, parece razonable aventurar que también lo sea $x_p(t)$

$$\begin{aligned} x_p &= D \text{ sen}(\Omega t - \psi_s) \\ &= D \text{ sen } \Omega t \cos \psi_s - D \text{ sen } \psi_s \cos \Omega t \end{aligned} \tag{21-37}$$

donde habrá que tomar las constantes D y ψ_s de manera que la solución $x_p(t)$ satisfaga a la ecuación diferencial 21-35. Derivando adecuadamente y aplicando las derivadas en la ecuación diferencial tenemos

$$\begin{aligned} &D\,[\,(k - m\Omega^2) \cos \psi_s + c\Omega \text{ sen } \psi_s\,] \text{ sen } \Omega t \\ &D\,[c\Omega \cos \psi_s - (k - m\Omega^2)\,(\text{sen } \psi_s)\,] \cos \Omega t = P_0 \text{ sen } \Omega t \end{aligned} \tag{21-38}$$

Ahora bien, la solución (ec. 21-37) se supone que satisface a la ecuación diferencial en todo momento. Por tanto, la ecuación 21-38 debe cumplirse para



todo valor del tiempo. En particular, cuando $t = 0$, sen $\Omega t = 0$ y cos $\Omega t = 1$ con lo que [1]

$$\tan \psi_s = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2} = \frac{2\zeta\Omega/\omega_n}{1 - (\Omega/\omega_n)^2} \qquad \textbf{(21-39)}$$

El *ángulo de fase* ψ_s representa el retraso de la respuesta D sen$(\Omega t - \psi_s)$ respecto a la fuerza aplicada P_0 sen Ωt. Es decir, la respuesta pasa por su máximo ψ_s/Ω segundos después de que lo haga la fuerza aplicada.

Cuando $\Omega t = \pi/2$, sen $\Omega t = 1$ y cos $\Omega t = 0$ con lo que la ecuación 21-38 nos da

$$D = \frac{P_0}{(k - m\Omega^2)\cos\psi_s + c\Omega \operatorname{sen}\psi_s}$$

donde (v. fig. 21-21)

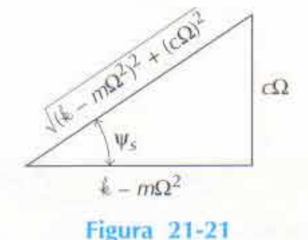


Figura 21-21

$$\operatorname{sen}\psi_s = \frac{c\Omega}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}}$$

$$\cos\psi_s = \frac{k - m\Omega^2}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}}$$

Por tanto, la amplitud de la solución particular es

$$D = \frac{P_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} = \frac{P_0/k}{\sqrt{[1 - (\Omega/\omega_n)^2]^2 + (2\zeta\Omega/\omega_n)^2}} \qquad \textbf{(21-40)}$$

Como la amplitud de la solución particular es constante, a dicha solución se le da el nombre de vibración *permanente*. Es decir, cuando la parte transitoria x_c de la solución ya ha desaparecido, el sistema oscila cumpliendo $x_p(t) = D$ sen$(\Omega t - \psi_s)$ mientras siga aplicada la fuerza impulsora P_0 sen Ωt.

Ahora bien, notemos que $\delta_p = P_0/k$ es la deformación que sufriría el resorte si se le aplicara estáticamente la fuerza P_0.[2] Entonces, el cociente D/δ_p representa el número de veces que la magnitud de la oscilación dinámica es mayor que la deformación estática. A este cociente se le denomina *factor dinámico de amplificación* y viene dado por

$$\frac{D}{\delta_p} = \frac{D}{P_0/k} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\Omega/\omega_n)^2]^2 + (2\zeta\Omega/\omega_n)^2}} \qquad \textbf{(21-41)}$$

En las figuras 21-22 y 21-23 podemos ver la variación del factor de amplificación D/δ_p y del ángulo de fase ψ_s con la razón de frecuencias Ω/ω_n para diversos valores de la razón de amortiguamiento ζ. Cuando se aplica la fuerza perturbadora P_0 sen Ωt a frecuencias bajas ($\Omega/\omega_n < 1$), la respuesta permanente está en su mayor parte *en fase* con la fuerza perturbadora ($0 < \psi_s < 90°$). Es decir, la fuerza perturbadora se ejerce generalmente hacia la derecha (P_0 sen $\Omega t > 0$)

---

[1] Como siempre, los coeficientes m, k, c y P_0 en las soluciones de las ecuaciones 21-38 a 21-42 deben interpretarse como los coeficientes de la ecuación diferencial 21-35. Pueden referirse, o no, a los valores de la masa, constante del resorte, etc., del sistema real.

[2] La deformación estática δ_p no debe confundirse con la deformación en equilibrio δ_{eq} de los apartados 21.2 y 21.3. La deformación estática δ_p describe la deformación que se produciría si se aplicara estáticamente al resorte la fuerza P_0 y no tiene nada que ver con el equilibrio del sistema.

cuando el bloque se halla a la derecha de la posición de equilibrio ($x_p > 0$) y viceversa (fig. 21-24*a*). En realidad, a frecuencias muy bajas ($\Omega / \omega_n \cong 0$), el sistema se halla esencialmente en equilibrio estático; el ángulo de fase es casi nulo ($\psi_s \cong 0$), el factor de amplificación es aproximadamente igual a uno ($D / \delta_p \cong 1$) y la respuesta permanente es $x_p(t) \cong (P_0 \operatorname{sen} \Omega t) / k$.

Cuando la fuerza perturbadora se aplica a frecuencias elevadas ($\Omega / \omega_n > 1$), la respuesta permanente está en su mayor parte *en oposición de fase* con la fuerza perturbadora ($90° < \psi_s < 180°$). Es decir, la fuerza perturbadora se ejerce generalmente hacia la derecha ($P_0 \operatorname{sen} \Omega t > 0$) cuando el bloque se halla a la izquierda de su posición de equilibrio ($x_p < 0$) y viceversa (fig. 21-24*b*). A frecuencias muy elevadas ($\Omega / \omega_n >> 1$), la respuesta está casi en oposición de fase total con la fuerza perturbadora ($\psi_s \cong 180°$) y el factor de amplificación es aproximadamente nulo e independiente de la razón de amortiguamiento. El bloque se mantiene, en esencia, estacionario a causa de la resistencia inerte del bloque.

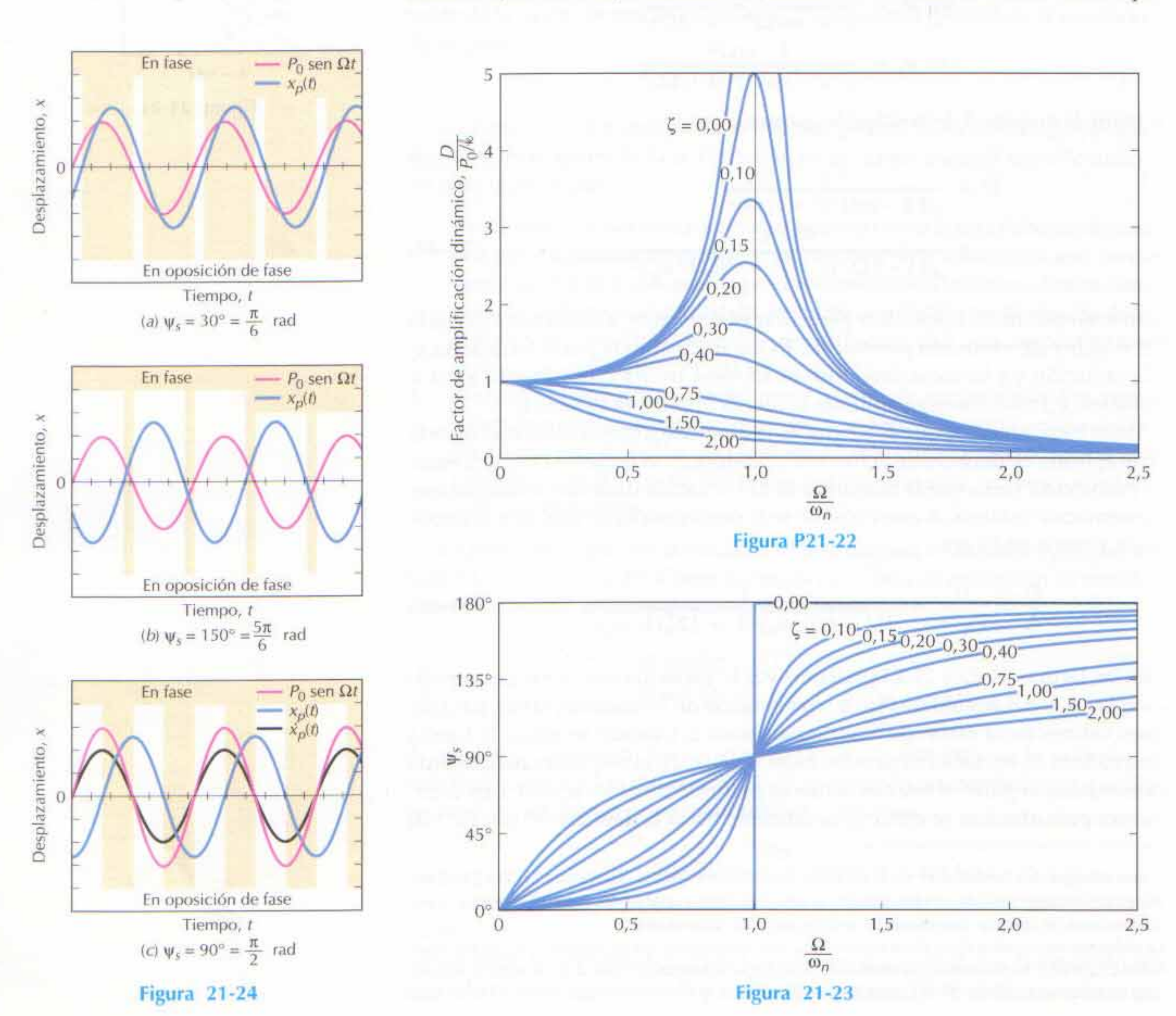


Figura 21-24

Figura P21-22

Figura 21-23

Cuando se aplica la fuerza perturbadora a una frecuencia próxima a la frecuencia propia del sistema ($\Omega / \omega_n \cong 1$) y el amortiguamiento es débil ($\zeta \cong 0$), la amplitud de la vibración se amplifica de manera sustancial. En realidad, si el sistema no tuviera amortiguamiento y lo excitara una fuerza armónica de frecuencia próxima a la frecuencia propia ($\Omega \cong \omega_n$), la amplitud de la vibración se haría muy grande según nos indica la ecuación 21-40.[1] Esta condición recibe el nombre de *resonancia*. La figura 21-22 nos sugiere que la amplitud de la oscilación se puede controlar bien sea evitando la condición de resonancia o (si no pudiera evitarse) aumentando el amortiguamiento ζ.

Cuando la frecuencia de la fuerza perturbadora se hace igual a la frecuencia propia del sistema ($\Omega / \omega_n = 1$), la respuesta está retrasada 90° respecto a la fuerza perturbadora cualquiera que sea la razón de amortiguamiento (v. fig. 21-23). Por tanto, el desplazamiento $x_p(t) = D$ sen $(\Omega t - \pi/2) = -D \cos \Omega t$ será máximo cuando la fuerza perturbadora P_0 sen Ωt sea nula y recíprocamente (fig. 21-24*c*). En cambio, la velocidad $\dot{x}_p(t) = D\Omega \cos(\Omega t - \pi/2) = D\Omega$ sen Ωt está en fase con la fuerza perturbadora P_0 sen Ωt. También cuando $\Omega/\omega_n = 1$, la ecuación 21-41 nos dice que el factor de amplificación $D/\delta_p = 1/2\zeta$. Estas características se aprovechan a menudo para determinar experimentalmente la frecuencia propia y la razón de amortiguamiento.

Debe observarse, no obstante, que salvo en el caso en que $\zeta = 0$, las gráficas del factor de amplificación (y por tanto las de la amplitud de la vibración) no presentan su máximo en el punto $\Omega/\omega_n = 1$ exactamente. Al aumentar el amortiguamiento disminuye la frecuencia de resonancia —la frecuencia a la cual la curva de la amplificación presenta su máximo. Cuando $\zeta = \sqrt{1/2}$, la amplitud máxima tiene lugar en $\Omega = 0$. Cuando $\zeta \geq \sqrt{1/2}$, la amplitud de vibración D es menor que el desplazamiento estático δ_p para todas las pulsaciones $\Omega > 0$. La situación exacta de la frecuencia de resonancia correspondiente a un valor dado cualquiera de ζ se puede calcular haciendo igual a cero la derivada respecto a Ω/ω_n del factor de amplificación.

En resumen, la solución total consta de dos vibraciones superpuestas $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$. En el caso de sistemas subamortiguados $\zeta < 1$, el desplazamiento es

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi_c) + D \text{ sen } (\Omega t - \psi_s) \qquad \text{(21-42)}$$

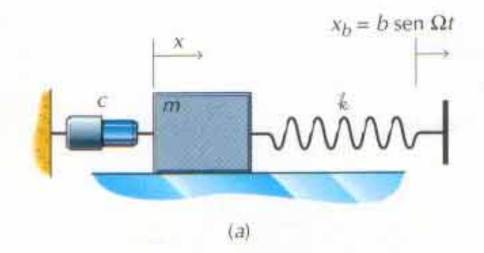
El primer término de la ecuación 21-42 representa una vibración libre del sistema. Su frecuencia sólo depende de propiedades del sistema (la constante del resorte k, el coeficiente de amortiguamiento c y la masa m) y no depende de la fuerza perturbadora. La amplitud de la vibración libre (o vibración transitoria) disminuye en el transcurso del tiempo a causa de las fuerzas amortiguadoras. Las constantes A y ϕ_c se eligen de manera que ajusten la solución total a las condiciones iniciales.

El último término de la ecuación 21-42, que representa la vibración permanente del sistema, es la parte de la solución que suele tener un interés primordial. La frecuencia de la vibración permanente es igual a la de la fuerza perturbadora aplicada y su amplitud depende del cociente Ω/ω_n entre las pulsaciones o frecuencias.

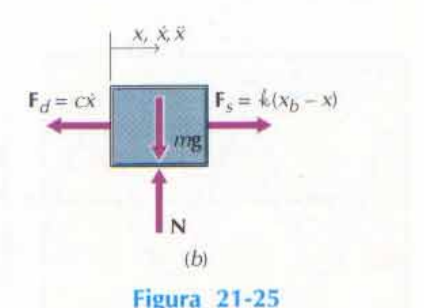
[1] Desde luego, todos los sistemas reales poseen algo de amortiguamiento y por tanto la amplitud de la vibración no puede hacerse infinita. Además, las limitaciones físicas tales como la longitud del resorte también limitan la amplitud de la vibración. Así y todo, la resonancia constituye una condición peligrosa y deberá siempre evitarse.

21.4.2 Movimiento armónico del apoyo

La causa de las vibraciones forzadas no tiene por qué ser una fuerza periódica aplicada directamente a la masa del sistema. En muchos sistemas, tales como las suspensiones de automóviles, las vibraciones forzadas las origina el movimiento periódico del soporte en que se apoya el sistema y no una fuerza aplicada directamente. Veremos que el movimiento periódico del apoyo equivale a una fuerza perturbadora periódica. Mientras los coeficientes m, k, c y P_0 de las soluciones (ecs. 21-38 a 21-42) se interpreten como coeficientes de la ecuación diferencial del movimiento del sistema, las mencionadas soluciones serán igualmente aplicables a este caso.



(a)



(b)

Figura 21-25

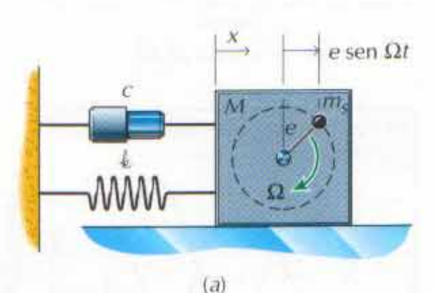
Por ejemplo, supongamos que al apoyo al que está sujeto el resorte de la figura 21-13*a* se le comunica un desplazamiento variable periódicamente $x_b(t) = b$ sen Ωt, tal como se indica en la figura 21-25*a*. En la figura 21-25*b* podemos ver el diagrama de sólido libre del bloque, en el cual éste está desplazado una distancia arbitraria en el sentido positivo de las abscisas. El alargamiento del resorte es la diferencia entre los desplazamientos del bloque y del apoyo móvil $x_b(t) - x(t) = b$ sen $\Omega t - x(t)$. Por tanto, la fuerza elástica recuperadora que ejerce el resorte es $F_s = k(b$ sen $\Omega t - x)$, dirigida hacia la derecha (el resorte está estirado y tira del bloque siempre que b sen $\Omega t > x$). Como el amortiguador está unido a un apoyo fijo, su extensión por unidad de tiempo será $\dot{x}(t)$ y la fuerza amortiguadora $F_d = c\dot{x}$ tendrá sentido opuesto al de la velocidad (sentido negativo de las abscisas). Aplicando la segunda ley de Newton del movimiento $\sum F = ma_x = m\ddot{x}$ al bloque tendremos la ecuación diferencial

$$-c\dot{x} + k(b \text{ sen } \Omega t - x) = m\ddot{x}$$

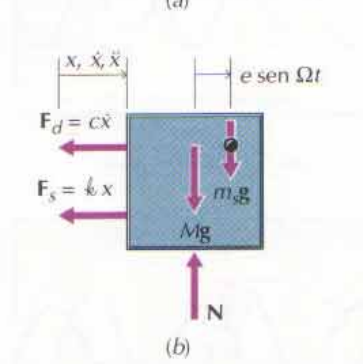
o sea

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kb \text{ sen } \Omega t \tag{21-43}$$

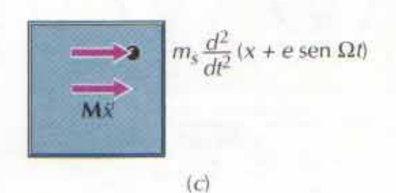
Pero la ecuación 21-43 es formalmente igual a la 21-35 pues basta sustituir en ésta P_0 por kb. Por tanto, la ecuación 21-43 tendrá la misma solución que la 21-35. Es decir, las soluciones definidas por las ecuaciones 21-38 a 21-42 también describen el movimiento del bloque sometido al desplazamiento del apoyo $x_b(t) = b$ sen Ωt cuando se interpreta que las constantes m, c, k y P_0 son los coeficientes de la ecuación diferencial del movimiento escrita en la forma de la ecuación 21-35.



(a)



(b)



(c)

Figura 21-26

21.4.3 Rotación descompensada

Otra fuente corriente de vibraciones forzadas la encontramos en el desequilibrio de una pieza giratoria de una máquina. Por ejemplo, la pequeña masa m_s de la figura 21-26*a* gira con una celeridad angular Ω en torno a un eje fijo del bloque de mayor tamaño cuya masa es M. Cuando se desplaza éste una distancia arbitraria $x(t)$ en el sentido positivo de las abscisas, la posición de la masa pequeña será $x(t) + e$ sen Ωt. En el diagrama de sólido libre representado en la figura 21-26*b*, no es necesario dibujar las fuerzas interiores que se ejercen entre la masa y el bloque. La fuerza elástica recuperadora que ejerce el resorte, $F_s = kx$, está dirigida hacia la posición de equilibrio (sentido negativo de las abscisas). La fuerza amortiguadora, $F_d = c\dot{x}$ tiene sentido opuesto al de la velocidad —también el sentido negativo de las abscisas. Aplicando la segunda ley de

Newton del movimiento $\sum F = ma_x = m\ddot{x}$ al bloque y a la masa tenemos la ecuación diferencial

$$-c\dot{x} - kx = M\ddot{x} + m_s \frac{d^2(x + e \text{ sen } \Omega t)}{dt^2}$$

o sea

$$(M + m_s)\ddot{x} + c\dot{x} + kx = em_s\Omega^2 \text{ sen } \Omega t \qquad \textbf{(21-44)}$$

Esta ecuación es formalmente igual a la 21-35 pues basta sustituir P_0 por $em_s\Omega^2$ y m por $M + m_s$ para pasar de la 21-35 a la 21-44. Es decir, las soluciones definidas por las ecuaciones 21-38 a 21-42 también describen el movimiento del bloque sometido a la descompensación rotatoria de la pequeña masa m_s cuando se interpretan las constantes m, c, k y P_0 como los coeficientes de la ecuación diferencial del movimiento escrita en la forma de la ecuación 21-35.

PROBLEMA EJEMPLO 21.7

Un motor de 3 kg descansa sobre un resorte (k = 150 kN/m) y un amortiguador (c = 120 N · s/m) según se indica en la figura 21-27*a*. En el borde de la polea del motor (e = 25 mm) está fija una pequeña masa (m = 0,5 kg). Determinar la máxima amplitud de la vibración forzada resultante del motor.

SOLUCIÓN

En la figura 21-27*b* puede verse el diagrama de sólido libre del motor correspondiente a una posición y arbitraria (positiva). La fuerza hacia abajo en el resorte es $F_s = (y + \delta_{eq})$ donde δ_{eq} es el alargamiento del resorte en la posición de equilibrio, en la cual $y = 0$. En la posición de equilibrio (antes de ponerse en marcha el motor), $y = \dot{y} = 0$ y la componente vertical de equilibrio ($\uparrow \sum F_y = 0$)

$$-(3 + 0{,}5)(9{,}81) - 150\,000\delta_{eq} = 0 \qquad \textbf{(a)}$$

da la deformación estática del resorte $\delta_{eq} = -2{,}289(10^{-4})$ m = –0,2289 mm. Una vez en marcha el motor, la segunda ley de Newton $\sum F_y = m\ddot{y}$ da

$$\begin{aligned} &-(3 + 0{,}5)(9{,}81) - 150\,000(y + \delta_{eq}) - 120\dot{y} \\ &= 3\frac{d^2y}{dt^2} + 0{,}5\frac{d^2}{dt^2}(y + 0{,}025 \text{ sen } \Omega t) \end{aligned} \qquad \textbf{(b)}$$

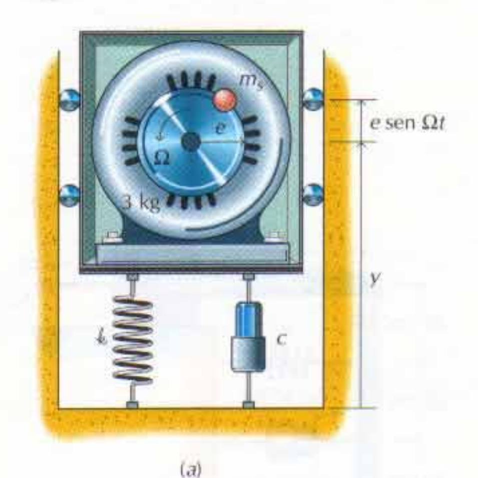
Sustituyendo ahora δ_{eq} por su valor $-2{,}289(10^{-4})$ m en la ecuación *b* o, lo que es equivalente, restando la ecuación *a* de la ecuación *b*, se tiene la ecuación diferencial del movimiento del motor

$$3{,}5\ddot{y} + 120\dot{y} + 150\,000y = 0{,}0125\Omega^2 \text{ sen } \Omega t$$

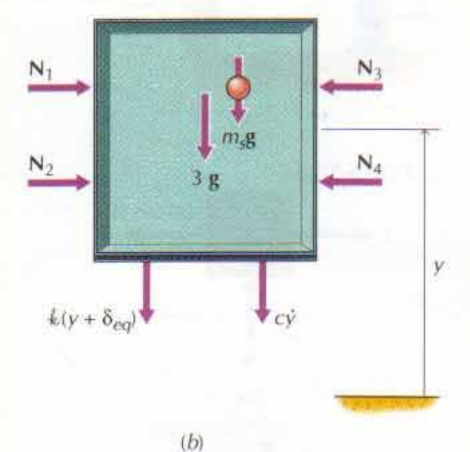
Por tanto, la pulsación propia y la razón de amortiguamiento del movimiento son

$$\omega_n = \sqrt{150\,000/3{,}5} = 207{,}0 \text{ rad/s}$$

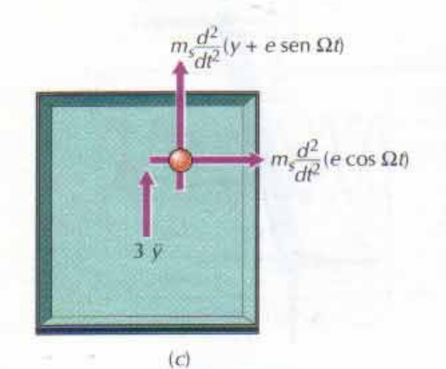
$$\zeta = \frac{120}{2(3{,}5)(207{,}0)} = 0{,}08282$$



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Figura 21-27

y la amplitud de la vibración estacionaria es

$$D = \frac{(0{,}0125\Omega^2)/150\,000}{\sqrt{[1-(\Omega/207{,}0)^2]^2 + [2(0{,}08282)\Omega/207{,}0]^2}}$$

Para hallar el valor de Ω que da la amplitud máxima, se hace igual a cero la derivada $dD/d\,\Omega = 0$, lo cual da $\Omega = 208{,}4$ rad/s. Luego

$$D_{max} = 0{,}02163 \text{ m} = 21{,}63 \text{ mm} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO 21.8

Un bloque que pesa 120 N se desliza por una superficie exenta de rozamiento, según se indica en la figura 21-28*a*. El resorte tiene su longitud natural cuando la barra *AB* está vertical y la *BC* horizontal. Los pesos de estas barras son despreciables. Suponiendo oscilaciones de pequeña amplitud, determinar

a. El dominio de pulsaciones Ω para el cual el movimiento angular estacionario de la barra *AB* es inferior a ± 5°.
b. La posición del bloque en función del tiempo si se desplaza 5 cm hacia la derecha y se suelta a partir del reposo cuando $t = 0$ y $\Omega = 25$ rad/s.

Figura 21-28

SOLUCIÓN

a. En las figuras 21-28*b* y 21-28*c* se han representado los diagramas de sólido libre del bloque y de la barra *AB*, en los cuales se ha desplazado el bloque una distancia arbitraria en el sentido positivo de las abscisas (hacia la derecha). Cuando se desplaza el bloque una distancia x hacia la derecha, la barra *AB* gira en sentido horario un ángulo θ. Si las oscilaciones son de pequeña amplitud, sen $\theta \cong \theta$, cos $\theta \cong 1$, la compresión del resorte será $2x/3$ y la razón de compresión del amortiguador será $\dot{x}/3$. Como la masa de la barra es despreciable, también lo será su momento de inercia y

$$\circlearrowright \Sigma M_A = \left(600\frac{\dot{x}}{3}\right) + 2\left(7500\frac{2x}{3}\right) - 3T = 0$$

o sea

$$T = \frac{200}{3}\dot{x} + \frac{10\,000}{3}x \qquad (a)$$

Aplicando ahora la segunda ley de Newton $\Sigma F = ma_x = m\ddot{x}$ al bloque, se tiene

$$100 \text{ sen } \Omega t - T = \frac{120}{9{,}81}\ddot{x} \qquad (b)$$

Sumando las ecuaciones *a* y *b* se tiene la ecuación diferencial del movimiento del bloque

$$12{,}232\ddot{x} + 66{,}67\dot{x} + 3333x = 100 \text{ sen } \Omega t$$

Por tanto, la pulsación propia y la razón de amortiguamiento del sistema son

$$\omega_n = \sqrt{3333/12{,}232} = 16{,}508 \text{ rad/s}$$
$$\zeta = \frac{66{,}67}{2(12{,}232)(16{,}508)} = 0{,}1651$$

Como se quiere mantener el movimiento angular de la barra AB inferior a $5° = 0{,}08727$ rad, la amplitud máxima de la vibración estacionaria del bloque será

$$D \cong (0{,}9 \text{ m})(0{,}08727 \text{ rad}) = \frac{100}{\sqrt{(3333 - 12{,}232\Omega^2)^2 + (66{,}67\Omega)^2}}$$

que corresponde a las pulsaciones límite

$$\Omega = 14{,}26 \text{ rad/s} \qquad \text{o bien} \qquad 17{,}66 \text{ rad/s}$$

Las pulsaciones comprendidas entre estos dos valores dan amplitudes demasiado grandes por lo que el dominio de pulsaciones permitidas es

$$0 < \Omega < 14{,}26 \text{ rad/s} \qquad 17{,}66 \text{ rad/s} < \Omega$$ Resp.

b. Cuando $\Omega = 25$ rad / s, la ecuación del movimiento del bloque es

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi_c) + D\,\text{sen}(\Omega t - \psi_s)$$

donde

$$\omega_d = 16{,}508\sqrt{1 - (0{,}1651)^2} = 16{,}28 \text{ rad/s}$$
$$D = \frac{100}{\sqrt{[3333 - 12{,}232(25)^2]^2 + [66{,}67(25)]^2}}$$
$$= 0{,}002387 \text{ m} = 2{,}387 \text{ mm}$$

y

$$\psi_s = \tan^{-1}\frac{(66{,}67)(25)}{[3333 - 12{,}232(25)^2]} = 158{,}9° = 2{,}773 \text{ rad}$$

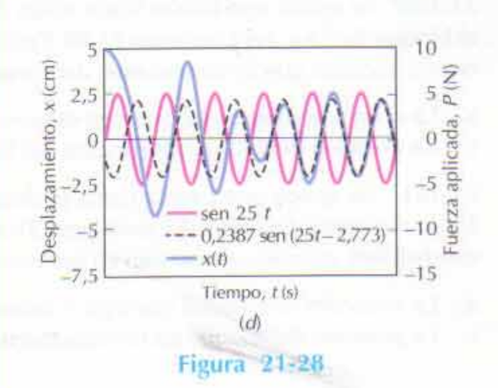
Pero en $t = 0$

$$x(0) = 2 = A\cos\phi_c - 0{,}002387 \text{ sen } 158{,}9°$$
$$\dot{x}(0) = A[16{,}28 \text{ sen } \phi_c - (0{,}1651)(16{,}508)\cos\phi_c] + (0{,}002387)(25)\cos 158{,}9° = 0$$

Por tanto, $A = 0{,}05224$ m $= 5{,}22$ cm, $\phi_c = 38{,}29° = 0{,}668$ rad y

$$x(t) = 0{,}5224e^{-2{,}73t}\cos(16{,}28t - 0{,}668) + 0{,}2387 \text{ sen } (25t - 2{,}773) \text{ cm}$$ Resp.

En la figura 21-28*d* se ha representado esta solución. A efectos de comparación, se ha representado también una curva de carga unitaria (sen $25t$) y la porción estacionaria de la respuesta $x_p(t) = 0{,}2387$ sen $(25t - 2{,}773)$.



(*d*)

Figura 21-28

PROBLEMAS

21-96* Una integral particular de la ecuación diferencial del movimiento

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \cos \Omega t$$

puede escribirse en la forma

$$x_p(t) = D \cos(\Omega t - \psi_c)$$

Determinar expresiones para D y ψ_c similares a las ecuaciones 21-39 y 21-40 correspondientes a este caso.

21-97 Determinar el máximo factor dinámico de amplificación dado por la ecuación 21-41 y la razón de frecuencias (Ω/ω_n) a la cual se produce en función de la razón de amortiguamiento ζ.

21-98* Un bloque de 20 kg se desliza por una superficie exenta de rozamiento según se indica en la figura P21-98. El resorte ($k = 500$ N/m y el amortiguador ($c = 40$ N · s/m) están unidos a una pared oscilante. Determinar

a. La ecuación diferencial que rige el movimiento del bloque.
b. Una solución particular de la forma $x_p(t) = D \operatorname{sen}(\Omega t - \psi_s)$.

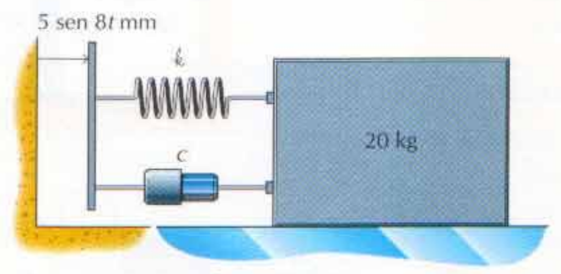


Figura P21-98

21-99 Se aplica una fuerza hacia arriba $P(t) = 350$ sen $30t$ N al bloque de 50 N del problema 21-79. Para las mismas condiciones iniciales que se dan en éste, determinar

a. La ecuación diferencial que rige el movimiento.
b. La posición del bloque en función del tiempo.

21-100* Se aplica una fuerza hacia abajo $P(t) = 600$ sen $20t$ N al bloque de 2 kg del problema 21-80. Para las mismas condiciones iniciales que se dan en éste, determinar

a. La ecuación diferencial que rige el movimiento.
b. La posición del bloque en función del tiempo.

21-101 Se aplica una fuerza hacia la derecha $P(t) = 200$ sen $12t$ N al bloque de 100 N del problema 21-81. Para las mismas condiciones iniciales que se dan en ese problema, determinar

a. La ecuación diferencial que rige el movimiento.
b. La posición del bloque en función del tiempo.

21-102* Se aplica una fuerza hacia abajo $P(t) = 150$ sen $18t$ N al bloque de 4 kg del problema 21-82. Para las mismas condiciones iniciales que se dan en ese problema, determinar

a. La ecuación diferencial que rige el movimiento.
b. La posición del bloque en función del tiempo.

21-103 Los dos bloques de la figura P21-103 penden, en un plano vertical, de una barra de masa despreciable que está horizontal en la posición de equilibrio. Si se aplica al punto D de la barra una fuerza hacia arriba $P(t) = 20$ sen Ωt N, determinar

a. La máxima amplitud de la oscilación estacionaria del bloque de 50 N.
b. El dominio de pulsaciones Ω que hay que evitar para que la amplitud de oscilación del bloque de 50 N no supere los 37,5 mm.

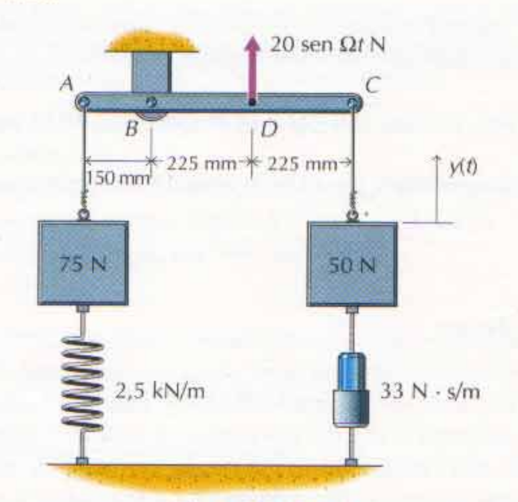


Figura P21-103

21-104* Las dos masas de la figura P21-104 se deslizan por sendas superficies horizontales exentas de rozamiento. La ba-

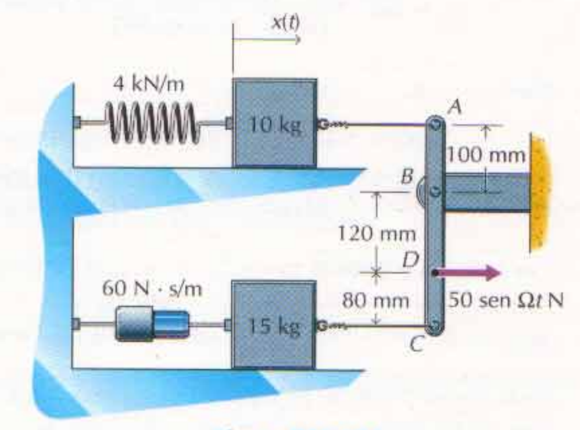


Figura P21-104

rra ABC es de masa despreciable y está vertical en la posición de equilibrio. Si al punto D de la barra se aplica una fuerza $P(t) = 50 \text{ sen } \Omega t$ N, determinar

a. La máxima amplitud de la oscilación estacionaria del bloque de 10 kg.
b. El dominio de pulsaciones Ω que hay que evitar para que la amplitud de la oscilación estacionaria del bloque de 10 kg no supere los 25 mm.

21-105 En el caso del bloque de 50 N del problema 21-79, determinar la amplitud de la oscilación estacionaria que resulta cuando el apoyo inferior oscila verticalmente según la ley $y = 175 \text{ sen } 30t$ mm.

21-106* En el caso del bloque de 4 kg del problema 21-82, determinar la amplitud de la oscilación estacionaria que resulta cuando el soporte superior oscila verticalmente según la ley $y = 80 \text{ sen } 35t$ mm.

21-107 En el caso del bloque de 100 N del problema 21-81, determinar la amplitud de la oscilación estacionaria que resulta cuando el apoyo inferior oscila verticalmente según la ley $y = 375 \text{ sen } 12t$ mm.

21-108* En el caso del bloque de 4 kg del problema 21-82, (pág. 476) determinar la amplitud de la oscilación estacionaria que resulta cuando el apoyo inferior oscila verticalmente según la ley $y = 200 \cos 18t$ mm.

21-109 En el caso del sistema del problema 21-83, determinar la amplitud de la oscilación estacionaria del bloque de 50 N cuando $a = 225$ mm y

a. El apoyo inferior de la izquierda oscila verticalmente según la ley $y = 100 \text{ sen } 9t$ mm.
b. El apoyo inferior de la derecha oscila vericalmente según la ley $y = 100 \cos 9t$ mm.

21-110* En el caso del sistema del problema 21-64, determinar la amplitud de la oscilación estacionaria del bloque de 10 kg cuando $a = 150$ mm y

a. El soporte superior de la izquierda oscila horizontalmente según la ley $x = 5 \text{ sen } 8t$ mm.
b. El soporte inferior de la izquierda oscila horizontalmente según la ley $x = 5 \text{ sen } 8t$ mm.

21-111 Al bloque de 50 N del problema 21-79(pág. 475) se le agrega un peso de 10 N que describe una circunferencia de radio 15 cm con celeridad angular $\Omega = 30$ rad/s. Determinar la amplitud de la oscilación estacionaria resultante. La circunferencia está en el mismo plano vertical que el amortiguador y los resortes.

21-112* Al bloque de 2 kg del problema 21-80 se le agrega una masa de 0,6 kg que describe una circunferencia de 150 mm de radio con celeridad angular $\Omega = 20$ rad/s. Determinar la amplitud de la oscilación estacionaria resultante. La circunferencia está en el mismo plano vertical que el amortiguador y los resortes.

21-113 Al bloque de 100 N del problema 21-81 se le agrega un peso de 7,5 N que describe una circunferencia de 45 cm de radio con celeridad angular $\Omega = 12$ rad/s. Determinar la amplitud de la oscilación estacionaria resultante. La circunferencia está en el mismo plano vertical que el amortiguador y los resortes.

21-114* Al bloque de 4 kg del problema 21-82 se le agrega una masa de 0,8 kg que describe una circunferencia de 400 mm de radio con celeridad angular $\Omega = 52$ rad/s. Determinar la amplitud de la oscilación estacionaria resultante. La circunferencia está en el mismo plano vertical que el amortiguador y las poleas.

21.5 MÉTODOS ENERGÉTICOS

El método seguido en los primeros apartados de este capítulo ha consistido en obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento mediante la aplicación de la segunda ley de Newton al diagrama (o diagramas) del sólido libre. Dichas ecuaciones diferenciales, una vez integradas, nos daban la frecuencia, el periodo y la amplitud de vibración, así como las ecuaciones de la posición, velocidad y aceleración del sistema. En este procedimiento directo, el análisis debía comprender todas las fuerzas (incluidas las de conexión interna y de rozamiento o de amortiguamiento viscoso).

No obstante, si sobre el sistema no se ejercieran fuerzas de rozamiento o de amortiguamiento viscoso, el teorema de las fuerzas vivas descrito en los capítulos 17 y 18 puede simplificar el procedimiento. Cuando todas las fuerzas que se ejerzan sobre el sistema sean conservativas (como en el caso de la vibración libre no amortiguada de un punto o de un cuerpo rígido), el teorema citado se

reduce a la *conservación de la energía: la energía mecánica total del sistema se mantiene constante*

$$T + V = \text{constante}$$

Podemos manipular el principio de conservación de la energía para tener la ecuación diferencial del movimiento y la frecuencia propia de vibración.

Aun cuando todos los sistemas reales pierden energía en los rozamientos, en muchos casos el amortiguamiento es muy débil y al considerar estos sistemas exentos de amortiguamiento, los errores que se cometen al determinar la frecuencia propia de vibración (y el periodo propio) resultan ser muy pequeños. El método del trabajo y la energía resulta especialmente adecuado para los problemas en los que intervienen puntos materiales conectados rígidamente y sistemas de cuerpos rígidos conectados entre sí. Al utilizar este método, no es necesario aislar el sistema ni considerar por separado el movimiento de sus distintas partes.

21.5.1 Ecuación diferencial del movimiento obtenida por métodos energéticos

Consideremos de nuevo el bloque representado en la figura 21-5*a* (pág. 450), el cual se desliza por una superficie lisa horizontal. Cuando se desplaza el bloque una distancia x en el sentido positivo de las abscisas, su energía cinética es $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ y la energía potencial de la fuerza elástica que ejerce el resorte es $V = \frac{1}{2}kx^2$. Entonces, derivando respecto al tiempo la energía mecánica (que es constante) tenemos

$$\frac{d}{dt}(T + V) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = (kx + m\ddot{x})\,\dot{x} = 0 \qquad \textbf{(21-45)}$$

Pero como la velocidad $\dot{x}$ no es nula en todo momento, la ecuación 21-45 nos da la ecuación diferencial del movimiento

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad \textbf{(21-46)}$$

que coincide con la ecuación 21-2. Entonces, la pulsación propia ω_n, el periodo τ_n, etc., se deducen de la ecuación diferencial tal como se hizo en el apartado 21.2.

21.5.2 Frecuencia de vibración obtenida por métodos energéticos

La frecuencia y el periodo propios se pueden también determinar utilizando el principio de conservación de la energía sin deducir antes la ecuación diferencial del movimiento. En el apartado 21.2 vimos que cuando un sistema vibra con movimiento armónico simple en torno a su posición de equilibrio (donde $x = 0$), la posición y la velocidad del sistema se pueden escribir en la forma

$$x(t) = A\,\text{sen}(\omega_n t - \phi_c)$$
$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega_n \cos(\omega_n t - \phi_c)$$

Pero en estas expresiones observamos que la posición es máxima ($x_{\text{máx}} = A$) cuando la velocidad es nula. Es decir, la energía potencial es máxima cuando la energía cinética es nula. Análogamente, la velocidad máxima ($v_{\text{máx}} = A\omega_n = \omega_n x_{\text{máx}}$) se tiene donde la posición es nula, por lo cual, la energía cinética es máxima cuando es nula la energía potencial. Por tanto, la energía mecánica total del sistema es

$$T + V = T_{\text{máx}} + 0 = 0 + V_{\text{máx}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2_{\text{máx}} = \frac{1}{2}k x^2_{\text{máx}}$$
$$\frac{1}{2}m(\omega_n A)^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

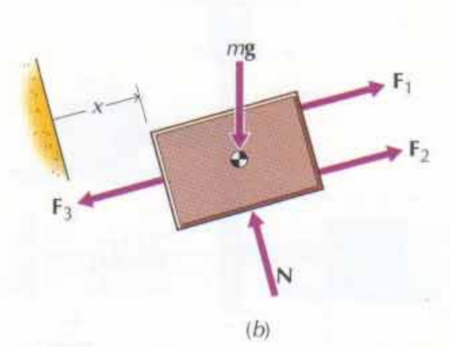
Despejando la pulsación propia ω_n tenemos

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

que coincide con la del apartado 21.2.

PROBLEMA EJEMPLO 21.9

Determinar la ecuación diferencial del movimiento del carrito del Problema Ejemplo 21-2 mediante el método energético.



(b)

Figura 21-10

SOLUCIÓN

En el diagrama de sólido libre del carrito (fig. 21-10*b*) se ve que cuatro de las cinco fuerzas que sobre él actúan son conservativas y la quinta no trabaja. Por tanto, la ecuación diferencial podrá obtenerse mediante el principio de conservación de la energía.

Antes de iniciarse el movimiento, el carrito se halla en su posición de equilibrio estático y el equilibrio ($\Sigma F_x = 0$) da

$$k_1\delta_{eq1} + k_2\delta_{eq2} - k_3\delta_{eq3} - mg \text{ sen } 15° = 0 \tag{a}$$

donde δ_{eq1}, δ_{eq2} y δ_{eq3} son las deformaciones de los resortes en la posición de equilibrio estático ($x = 0$). Aun cuando los valores de δ_{eq1}, δ_{eq2}, δ_{eq3} no se pueden determinar, la ecuación *a* los relaciona con el peso del carrito.

En la posición arbitraria representada en la figura 21-10*b*, la energía cinética del carrito es

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Cuando se mueva hacia la derecha, su centro de gravedad se eleva de manera que la energía potencial gravitatoria será

$$V_g = mgx \text{ sen } 15°$$

Además, cuando el carrito se mueva hacia la derecha, los alargamientos de los resortes 1 y 2 disminuirán y el del resorte 3 aumentará. Por tanto, las energías potenciales elásticas de los tres resortes serán

$$V_{e1} = \frac{1}{2}k_1(\delta_{eq1} - x)^2 \qquad V_{e2} = \frac{1}{2}k_2(\delta_{eq2} - x)^2$$
$$V_{e3} = \frac{1}{2}k_3(\delta_{eq3} + x)^2$$

y la ecuación que traduce la conservación de la energía toma la forma

$$\begin{aligned} T + V &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mg \text{ sen } 15° + \left[\frac{1}{2}k_1(\delta_{eq1} - x)^2\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}k_2(\delta_{eq2} - x)^2 + \frac{1}{2}k_3(\delta_{eq3} + x)^2 \\ &= \text{const.} \end{aligned} \qquad (b)$$

Derivando respecto al tiempo la ecuación b, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(T + V) &= [m\ddot{x} + mg \text{ sen } 15° - k_1(\delta_{eq1} - x)] \\ &\quad - k_2(\delta_{eq2} - x) + k_3(\delta_{eq3} + x) \end{aligned} \qquad (c)$$

Pero como la velocidad $\dot{x}$ del carrito no siempre es nula, deberá ser nulo el término entre corchetes. Por último, sumando las ecuaciones a y c se tiene la ecuación diferencial del movimiento del carrito

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2 + k_3)x = 0 \qquad \text{Resp.}$$

que es la que se dedujo en el Problema Ejemplo 21-2.

PROBLEMA EJEMPLO 21.10

Un bloque de 5 kg se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamiento, según se indica en la figura 21-29a. Las constantes de los resortes son k_1= 600 N/m y k_2= 300 N/m. Suponiendo que los hilos estén siempre tensos, determinar la frecuencia propia de la vibración libre no amortiguada del bloque mediante un método energético.

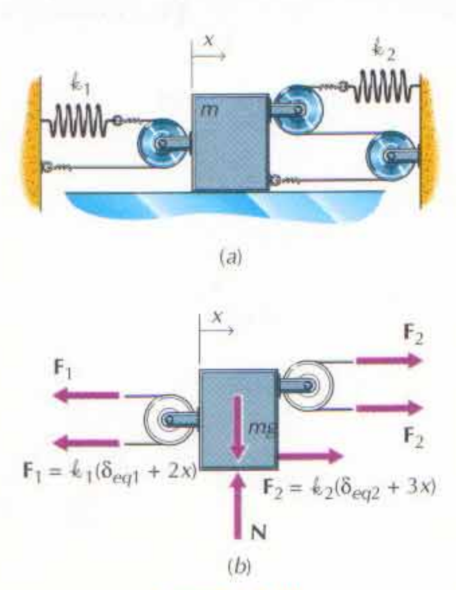


Figura 21-29

SOLUCIÓN

En el diagrama de sólido libre del bloque (fig. 21-29b) se ve que dos de las fuerzas (m**g** y **N**) no trabajan y las demás se deben a resortes, por lo que son conservativas. En consecuencia, el bloque oscilará con movimiento armónico simple y se podrá obtener la frecuencia propia de vibración utilizando el principio de conservación de la energía.

Antes de iniciarse el movimiento, el bloque está en su posición de equilibrio estático y el equilibrio ($\Sigma F_x = 0$) da

$$3k_2\delta_{eq2} - 2k_1\delta_{eq1} = 0 \qquad (a)$$

donde δ_{eq1} y δ_{eq2} son las deformaciones de los resortes en la posición de equilibrio estático ($x = 0$). Cuando el bloque se haya movido hacia la derecha una distancia

x, el alargamiento del resorte 1 habrá aumentado $2x$ y el del resorte 2 habrá disminuido $3x$. Por tanto, la energía potencial elástica de los resortes será

$$V_e = \frac{1}{2} k_1(\delta_{eq1} + 2x)^2 - \frac{1}{2} k_1 \delta_{eq1}^2 + \frac{1}{2} k_2(\delta_{eq2} - 3x)^2 - \frac{1}{2} k_2 \delta_{eq2}^2 \qquad (b)$$

donde se han restado las constantes de manera que el cero de energía potencial corresponda a la posición de equilibrio. Desarrollando la ecuación b y simplificando con ayuda de la ecuación a se tiene

$$V_e = \frac{1}{2}(4 k_1 x^2 + 4 k_1 x \delta_{eq1} + 9 k_2 x^2 - 6 k_2 x \delta_{eq2}) = \frac{1}{2}(4 k_1 + 9 k_2) x^2$$

La energía cinética del bloque es, simplemente,

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

Ahora bien, en el caso de un cuerpo que oscile con movimiento armónico simple, su posición y velocidad se pueden escribir en la forma

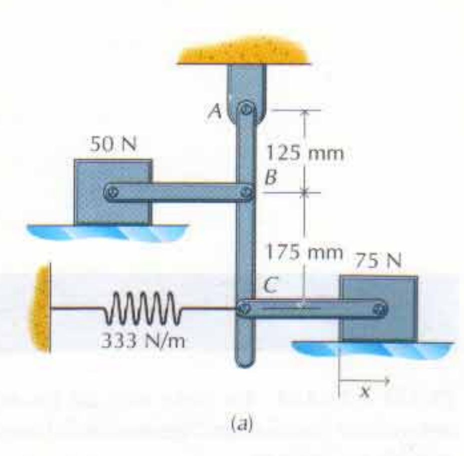
$$x = A \operatorname{sen}(\omega_n t - \phi_s)$$
$$\dot{x} = A\omega_n \cos(\omega_n t - \phi_s)$$

Por tanto, cuando la posición sea nula ($x = 0$), la energía potencial también lo será ($V = 0$), la velocidad es máxima ($\dot{x} = \dot{x}_{máx} = A\omega_n$), así como la energía cinética ($T = T_{máx} = \frac{1}{2} m A^2 \omega_n^2$). Por otra parte, cuando la posición sea máxima, es decir $x = x_{máx} = A$, también lo será la energía potencial ($V = V_{máx} = \frac{1}{2}(4 k_1 + 9 k_2) A^2$), la velocidad será nula ($v = 0$) así como la energía cinética ($T = 0$). Escribiendo la ecuación que traduce la conservación de la energía entre estas dos posiciones ($T_{máx} + 0 = 0 + V_{máx}$) se tiene

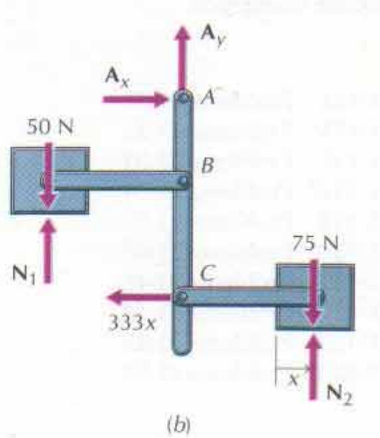
$$\frac{1}{2} m A^2 \omega_n^2 = \frac{1}{2}(4 k_1 + 9 k_2) A^2 \qquad (c)$$

Por último, despejando la pulsación propia en la ecuación c se tiene

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4 k_1 + 9 k_2}{m}} = 39{,}5 \text{ rad/s} \qquad \text{Resp.}$$



(a)



(b)

Figura 21-30

PROBLEMA EJEMPLO 21.11

Los dos bloques representados en la figura 21-30a se deslizan por sendas superficies horizontales exentas de rozamiento. Las barras de conexión tienen peso despreciable y en la posición de equilibrio, ABC está vertical. Supóngase oscilaciones de pequeña amplitud y utilícese un método energético para determinar

a. La ecuación diferencial del movimiento del bloque de 75 N.
b. La pulsación propia de la oscilación.

SOLUCIÓN

a. En la figura 21-30b puede verse el diagrama de sólido libre del conjunto. Como las barras de conexión son rígidas, no será necesario considerar el

trabajo que efectúan las fuerzas en las conexiones. Por tanto, la única fuerza cuyo trabajo hay que considerar es la que ejerce el resorte, la cual es conservativa. En consecuencia, para determinar la ecuación diferencial del movimiento y la frecuencia propia de la vibración podrá utilizarse un método energético.

Cuando el bloque de 75 N se mueva hacia la derecha una distancia x, el de 50 N se moverá hacia la derecha una distancia igual a $125x/300 = 5x/12$. Por tanto, la energía cinética del sistema será

$$T = \frac{1}{2}\frac{75}{9{,}81}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{50}{9{,}81}\left(\frac{5}{12}\dot{x}\right)^2 = 4{,}265\dot{x}^2$$

La energía potencial elástica del resorte es

$$V = \frac{1}{2}333x^2$$

Derivando respecto al tiempo la energía mecánica total del sistema ($T + V =$ constante) se tiene

$$\frac{d}{dt}(T + V) = (8{,}53\ddot{x} + 333x)\,\dot{x} = 0$$

Como la velocidad $\dot{x}$ no es nula en todo instante, deberá serlo la cantidad entre corchetes y ello da la ecuación diferencial del movimiento del bloque de 75 N

$$8{,}53\ddot{x} + 333x = 0 \qquad \text{Resp.}$$

b. Determinada la ecuación diferencial del movimiento, la pulsación propia de la vibración resulta ser

$$\omega_n = \sqrt{333/8{,}53} = 6{,}25 \text{ rad/s} \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

21-115 a 21-124 En cada uno de los siguientes problemas, determinar la ecuación diferencial del movimiento mediante el método energético.

21-115 Problema 21-31
21-116* Problema 21-32
21-117 Problema 21-33
21-118* Problema 21-34
21-119 Problema 21-39
21-120* Problema 21-40
21-121 Problema 21-45
21-122* Problema 21-46
21-123 Problema 21-49
21-124* Problema 21-50

21-125 a 21-138 En cada uno de los siguientes problemas, determinar la pulsación propia de vibración ω_n utilizando el método energético.

21-125* Problema 21-29
21-126* Problema 21-26
21-127 Problema 21-27
21-128* Problema 21-28
21-129 Problema 21-31
21-130* Problema 21-32
21-131 Problema 21-33
21-132* Problema 21-34
21-133 Problema 21-41
21-134* Problema 21-42
21-135 Problema 21-43
21-136* Problema 21-44
21-137 Problema 21-49
21-138* Problema 21-54

RESUMEN

Una vibración mecánica es la oscilación repetida de un punto material o de un cuerpo rígido en torno a una posición de equilibrio. En muchos dispositivos conviene tener un movimiento vibratorio y en ellos se genera deliberadamente. En tales problemas, la misión del ingeniero es crear y gobernar las vibraciones. En cambio, la mayoría de las vibraciones que se producen en máquinas rotatorias y en estructuras son nocivas. En estos casos, el ingeniero debe eliminarlas (o, al menos, reducir su efecto todo lo posible) mediante un proyecto adecuado.

El estudio de las vibraciones es una aplicación directa de los principios que se desarrollaron previamente. En los capítulos anteriores, se obtenía la aceleración para una posición particular del cuerpo y en un instante dado. En este capítulo, se ha obtenido la aceleración para una posición arbitraria del cuerpo y luego se ha integrado para obtener su velocidad y su posición en todo instante posterior.

Una vibración libre no amortiguada se repite a sí misma indefinidamente. Una vez en movimiento, un tal sistema ideal vibrará por siempre con amplitud constante. Desde luego, todos los sistemas reales contienen fuerzas de rozamiento que llegarían a detener una vibración libre. Sin embargo, en muchos sistemas, la pérdida de energía debida a la resistencia del aire, el rozamiento interno de los resortes u otras resistencias pasivas, es suficientemente pequeña para que un análisis basado en prescindir del amortiguamiento dé, a menudo, resultados satisfactorios desde un punto de vista técnico. En particular, la frecuencia y el periodo que se obtienen para un sistema en vibración libre son muy próximos a los valores que se obtienen para un sistema que tenga un amortiguamiento débil.

La vibración forzada está generada y mantenida por una fuerza periódica aplicada exteriormente que no depende de la posición ni del movimiento del cuerpo. La vibración forzada con amortiguamiento se mantiene mientras esté aplicada la fuerza periódica que origina la vibración.

Cuando se aplica una fuerza periódica a un cuerpo, éste comienza a oscilar con una combinación de vibraciones libres y forzadas. Sin embargo, como en los sistemas reales siempre hay rozamiento, la parte del movimiento correspondiente a la vibración libre llegará a extinguirse. Por ello, a esta parte del movimiento se le da el nombre de movimiento *transitorio*. La frecuencia de la vibración forzada permanente es la de la fuerza perturbadora aplicada y es independiente de la frecuencia propia y otras características del cuerpo en vibración. No obstante, la amplitud de la vibración forzada permanente sí depende de la frecuencia propia del sistema y de la frecuencia de la carga aplicada.

Cuando se aplica una fuerza perturbadora de frecuencia próxima a la frecuencia propia del sistema y el amortiguamiento de éste es débil, la amplitud de la vibración se amplifica mucho. A esta condición se le da el nombre de *resonancia*. La amplitud de la oscilación se puede gobernar o evitando la condición de resonancia o (si ello no fuese posible) aumentando el amortiguamiento ζ.

En todos los casos, las constantes m, c, k y P_0 que aparecen en las soluciones deben interpretarse como coeficientes de la ecuación diferencial del movimiento y no como la masa real del sistema, ni el coeficiente de amortiguamiento real, etc.

21-139* Un niño que pesa 300 N bota hacia arriba y hacia abajo gracias a un par de cordones elásticos, según se indica en la figura P21-139. Se observa que la amplitud de la oscilación disminuye un 3% cada 5 ciclos y que en estos 5 ciclos se invierten 6,5 s. Determinar la constante elástica y el coeficiente de amortiguamiento de los cordones elásticos.

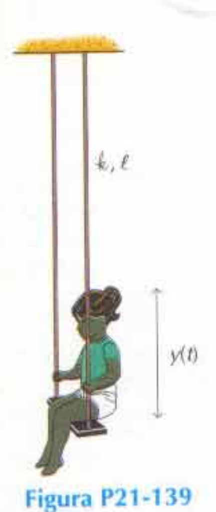


Figura P21-139

21-140* El péndulo representado en la figura P21-140 consiste en una masa de 5 kg sujeta al extremo de una varilla ligera de 0,9 m de longitud. El otro extremo de la varilla oscila a lo largo de una guía horizontal. Suponiendo oscilaciones de pequeña amplitud determinar

a. La ecuación diferencial del movimiento para la posición angular θ del péndulo.
b. La amplitud de la oscilación estacionaria.

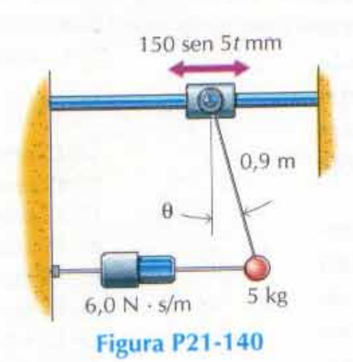


Figura P21-140

21-141 Una bolita, asimilable a un punto material, rueda por la base de un cuenco esférico de 250 mm de radio. Despréciese el rozamiento y supóngase oscilaciones de pequeña amplitud. Si la bolita lleva una celeridad de 375 mm/s cuando pasa por el punto más bajo, determinar

a. La ecuación diferencial que rige el movimiento.
b. El periodo y la amplitud de la oscilación resultante.
c. La posición de la bolita en función del tiempo.

21-142* Una masa de 10 kg se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamiento, según se indica en la figura P21-142. En $t = 0$, la masa pasa por su posición de equilibrio con una velocidad de 2,5 m/s dirigida hacia la derecha. Si k = 1,2 kN/m y c = 180 N · s/m, determinar

a. La fuerza F_k que el resorte ejerce sobre la masa cuando alcanza su máximo alargamiento.
b. La fuerza F_c que ejerce el amortiguador sobre la masa cuando ésta vuelve a su posición de equilibrio.

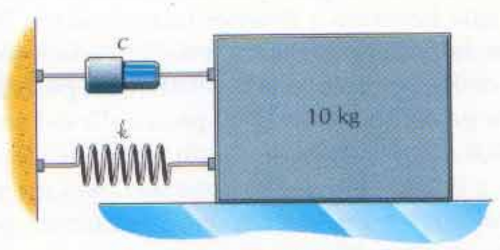


Figura P21-142

21-143 La integral particular dada por la ecuación 21-37 no satisface la ecuación diferencial del movimiento expresada en la ecuación 21-35 cuando la frecuencia de la fuerza aplicada es exactamente igual a la frecuencia propia del sistema.

a. Demostrar que la solución particular tiene la forma

$$x_p(t) = Dt \text{ sen}\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

cuando $\Omega = \omega_n$ y $c = 0$.
b. Determinar el valor de D en función de los parámetros del sistema m, k, ω_n y P_0.

21-144* Una masa de 10 kg se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamiento, según se indica en la figura P21-144. Si es k = 800 N/m, c = 30 N · s/m, Ω = 1,5 Hz; y P_0 = 80 N, determinar

a. La amplitud de la oscilación estacionaria.
b. El factor dinámico de amplificación.
c. El módulo de la fuerza total F_p que se transmite a la pared.
d. La transmisibilidad —cociente entre F_p y P_0 (amplitud de la fuerza aplicada).

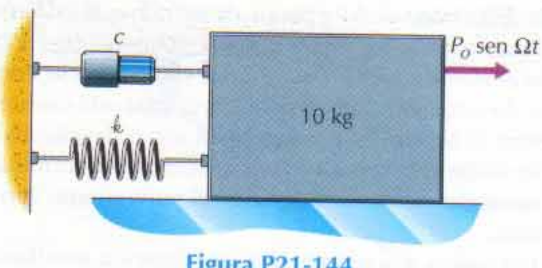


Figura P21-144

21-145 Un émbolo que pesa 10 N se halla inicialmente en reposo apoyado sobre dos resortes de k = 100 N/m cada uno. Sobre él cae una bola de masilla que pesa 2,5 N (fig. P21-145). Si el choque es perfectamente plástico ($e = 0$) y $h = 4{,}8$ m, determinar

a. La ecuación diferencial que rige el movimiento del émbolo.
b. El periodo y amplitud de la vibración resultante.

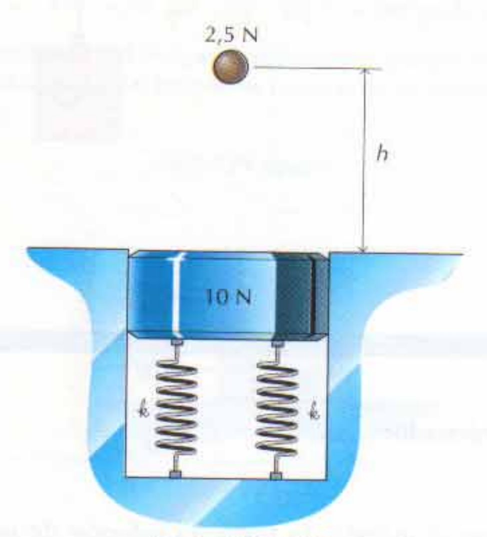


Figura P21-145

c. La fuerza que el émbolo ejerce sobre la bola cuando los resortes alcanzan su máxima compresión.
d. La fuerza que el émbolo ejerce sobre la bola cuando el sistema pase por su posición de equilibrio ascendiendo.
e. La máxima altura $h_{máx}$ desde la que se podría dejar caer la bola sin que perdiera el contacto con el émbolo durante la oscilación subsiguiente.

21-146* Una masa de 4 kg pende de un cordón elástico, según se indica en la figura P21-146. La longitud natural del cordón es 1,5 m y su longitud en el equilibrio es 2,0 m. Si el cordón ha de mantenerse tenso cuando el soporte superior oscile según la ley $\delta = a$ sen Ωt, determinar:

a. La máxima amplitud $a_{máx}$ cuando $\Omega = 4$ rad/s.
b. El dominio de pulsaciones Ω permisible cuando $a = 0{,}7$ m.

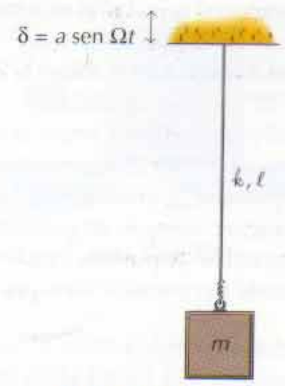


Figura P21-146

21-147 Una bolita de 25 mm de diámetro y peso $W = 0{,}28$ N rueda sin deslizamiento por la parte inferior de un cuenco esférico de 300 mm de radio. Si la bolita lleva una celeridad de 375 mm/s cuando pasa por el punto más bajo del cuenco, determinar

a. La ecuación diferencial que rige el movimiento.
b. La frecuencia y la amplitud de la vibración resultante.
c. La posición de la bolita en función del tiempo.

21-148* Cuando el sistema representado en la figura P21-148 está en equilibrio, el resorte 1 ($k_1 = 1{,}2$ kN/m) está alargado 50 mm y el resorte 2 ($k_2 = 1{,}8$ kN/m) lo está 90 mm. Si se tira de la masa m hacia abajo una distancia δ y se suelta a partir del reposo, determinar

a. La ecuación diferencial que rige el movimiento.
b. La distancia máxima $\delta_{máx}$ tal que los hilos se hallen siempre en tensión.
c. La frecuencia y la amplitud de la vibración resultante.
d. La posición de la masa en función del tiempo.

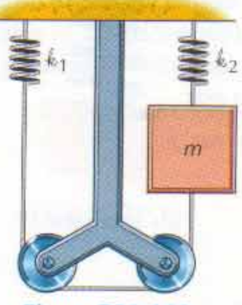


Figura P21-148

21-149 Una moneda que pesa 0,5 N descansa sobre un émbolo de 10 N de peso, según se indica en la figura P21-149. Si se hace oscilar el extremo inferior del resorte siguiendo la ley $\delta = a$ sen Ωt donde $a = 37{,}5$ mm y $\Omega = 2\pi$ rad/s, determinar

a. La ecuación diferencial que rige el movimiento del émbolo.
b. La amplitud de la vibración resultante.
c. La fuerza que el émbolo ejerce sobre la moneda cuando el resorte alcance su máxima compresión.
d. La fuerza que el émbolo ejerce sobre la moneda cuando el resorte alcance su máximo alargamiento.
e. La máxima amplitud $a_{máx}$ cuando $\Omega = 10$ rad/s si la moneda ha de permanecer siempre en contacto con el émbolo.
f. El dominio permisible de pulsaciones Ω cuando $a = 50$ mm si la moneda ha de permanecer siempre en contacto con el émbolo.

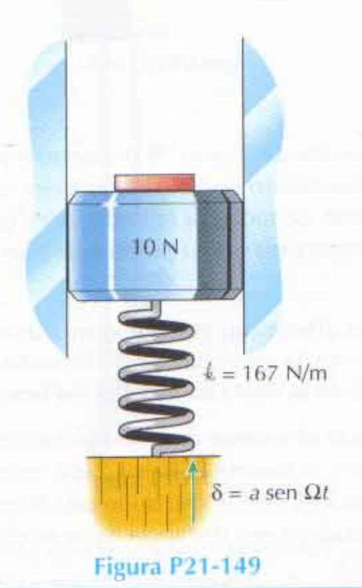
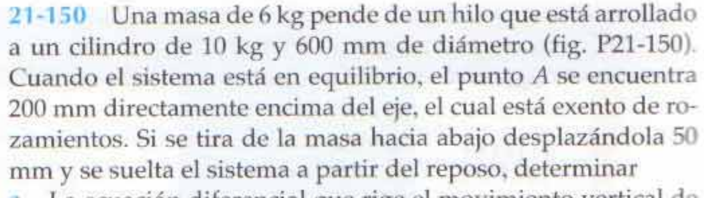


Figura P21-149


21-150 Una masa de 6 kg pende de un hilo que está arrollado a un cilindro de 10 kg y 600 mm de diámetro (fig. P21-150). Cuando el sistema está en equilibrio, el punto A se encuentra 200 mm directamente encima del eje, el cual está exento de rozamientos. Si se tira de la masa hacia abajo desplazándola 50 mm y se suelta el sistema a partir del reposo, determinar
a. La ecuación diferencial que rige el movimiento vertical de la masa.
b. La frecuencia y la amplitud de la vibración resultante.
c. La posición de la masa en función del tiempo.

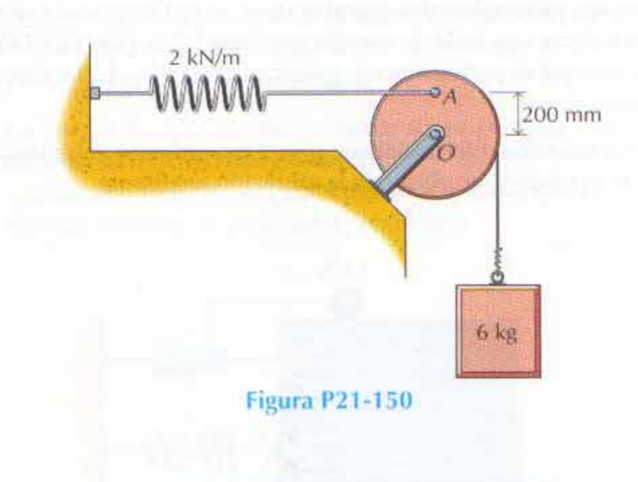


Figura P21-150

Problemas para resolver con ordenador

C21-151 Un péndulo simple consiste en una masa m concentrada en el extremo de una varilla AB de masa despreciable, según se indica en la figura P21-151. Si el gozne en A está exento de rozamientos, la ecuación diferencial del movimiento del péndulo viene dada por

$$\ell \ddot{\theta} + g \text{ sen } \theta = 0 \qquad \text{(a)}$$

La solución de esta ecuación sólo se da en forma aproximada de movimiento armónico simple cuando el ángulo θ se mantenga suficientemente pequeño para poder hacer sen $\theta \cong \theta$. Si $\ell = 1{,}2$ m, $mg = 10$ N y se suelta el péndulo a partir del reposo cuando $\theta = \theta_0$

a. Utilizar el método de Euler de solución de ecuaciones diferenciales (v. Apéndice C) para obtener el ángulo θ a partir de la ecuación a, en función del tiempo, para diversos ángulos iniciales θ_0 ($10° \leq \theta_0 \leq 120°$).
b. A continuación, para $\theta_0 = 80°$, representar gráficamente θ en función del tiempo t a lo largo de un ciclo completo de la oscilación. Sobre la misma gráfica, representar gráficamente la solución que se obtiene al utilizar la aproximación del movimiento armónico simple.
c. Para cada ángulo inicial $\theta_0 = 10°, 20°, 30°, ..., 120°$, determinar el periodo τ de la oscilación. Por ejemplo, determinar el tiempo que transcurre al pasar 10 veces por $\theta = 0$ y dividir por 5.
d. Representar gráficamente Err, el error relativo porcentual, utilizando la aproximación de ángulos pequeños, en función de θ_0 ($10° \leq \theta_0 \leq 120°$), siendo $Err = [(\tau - \tau_n)/\tau] \times 100$ y $\tau_n = \sqrt{\ell/g}$ el periodo propio del movimiento armónico simple.

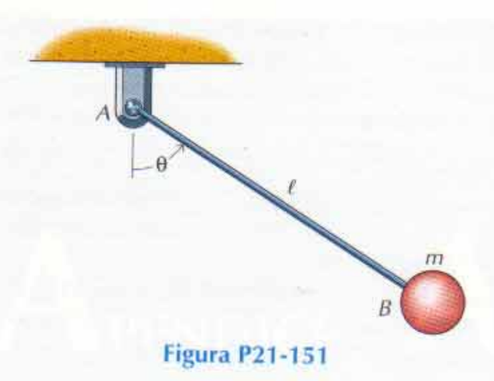


Figura P21-151

C21-152 Un bloque de 10 kg se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamiento, según se indica en la figura P21-152. En el instante $t = 0$, la posición y la velocidad del bloque son $x_0 = 0{,}175$ m y $v_0 = 3$ m/s, respectivamente. Si $k = 1000$ N/m y $c = 15$ N · s/m, calcular y representar gráficamente.

a. La posición x del bloque en función del tiempo $t(0 \leq t \leq 5$ s).
b. La velocidad v del bloque en función de su posición x $(0 \leq t \leq 5$ s).

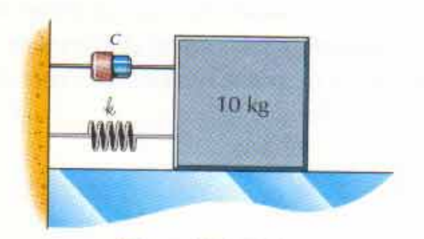


Figura P21-152

C21-153 Cuando la pulsación Ω de la fuerza aplicada en una oscilación forzada está próxima a la pulsación propia del sistema ω_n, la amplitud de la oscilación varía sinusoidalmente con una pulsación $|\Omega - \omega_n|$. Este fenómeno se conoce con el nombre de *pulsaciones*.

Considérese el bloque de peso 125 N que se desliza por una superficie lisa horizontal, según se indica en la figura P21-153. En el instante $t = 0$, la posición y la velocidad del bloque son $x_0 = 0$ m y $v_0 = 2{,}4$ m/s, respectivamente. Si $k = 667$ N/m, $P_0 = 50$ N y $\Omega = 8$ rad/s, calcular y representar gráficamente la posición x del bloque en función del tiempo t $(0 \leq t \leq 25$ s). (Ensáyense otros valores de k; p. ej., $k = 800$ N/m o $k = 833$ N/m).

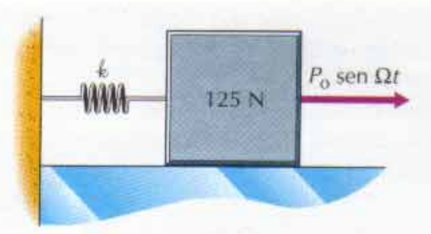


Figura P21-153

C21-154 Una moneda de 50 g descansa sobre un émbolo de 2 kg, según se indica en la figura P21-154. Se hace oscilar el extremo inferior del resorte según la ley $\delta = \delta_0$ sen Ωt. En el instante $t = 0$, la posición y la velocidad del bloque son ambas nulas $x_0 = 0$ m y $v_0 = 0$ m/s. Si $k = 205$ N/m, $\delta_0 = 20$ mm y $\Omega = 8$ rad/s.

a. Calcular y representar gráficamente la fuerza F_s que hay que aplicar al extremo inferior del resorte para originar el movimiento, en función del tiempo $t(0 \leq t \leq 10$ s).
b. Calcular y representar gráficamente la fuerza F_m que ejerce el émbolo sobre la moneda, en función del tiempo $t(0 \leq t \leq 10$ s).
c. Determinar el máximo valor de δ_0 para el cual la moneda permanece siempre en contacto con el émbolo; es decir, para la cual $F_m > 0$ siempre.



Figura P21-154

C21-155 Un bloque que pesa 125 N se desliza por una superficie lisa horizontal, según se indica en la figura P21-155. En el instante $t = 0$, la posición y la velocidad del bloque son $x_0 = 15$ cm y $v_0 = 0$ m/s, respectivamente. Si $k = 667$ N/m, $c = 17$ N · s/m, $\Omega = 8$ rad/s y $P_0 = 50$ N, calcular y representar gráficamente

a. La posición x del bloque en función del tiempo $t(0 \leq t \leq 10$ s). Sobre la misma gráfica, dibujar la representativa de la parte estacionaria de la solución.
b. La velocidad v del bloque en función de $t(0 \leq t \leq 5$ s). Sobre la misma gráfica, dibujar la representativa de la parte estacionaria de la solución.

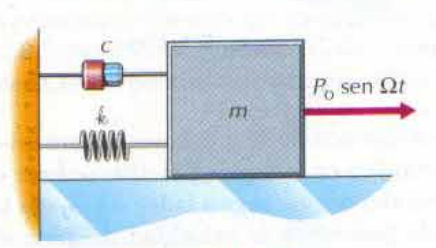


Figura P21-155

C21-156 Un bloque de 5 kg se desliza por una superficie lisa horizontal, según se indica en la figura P21-155. En el instante $t = 0$, la posición y la velocidad del bloque son $x_0 = 25$ mm y $v_0 = 0$ mm/s, respectivamente. Si $k = 125$ N/m, $c = 5$ N · s/m, $\Omega = 8$ rad/s y $P_0 = 1000$ N, calcular y representar gráficamente

a. F/P (cociente entre la fuerza F que el sistema ejerce sobre la pared) y P_0 (módulo de la fuerza variable P) en función del tiempo t $(0 \leq t \leq 10$ s).
b. $(F/P)_{máx}$ de la parte estacionaria de la solución en función de Ω/ω_n $(0{,}1 \leq \Omega/\omega_n \leq 3)$ para $c = 5$ N · s/m, 10 N · s/m, 15 N · s/m, 20 N · s/m, …, 50 N · s/m.

APÉNDICE A MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA

A.1 MOMENTO DE INERCIA

En los análisis del movimiento de cuerpos rígidos, encontramos a menudo expresiones en las que interviene el producto de la masa de un pequeño elemento del cuerpo por el cuadrado de su distancia a una recta de interés. Este producto recibe el nombre de *segundo momento de la masa* del elemento o, más corrientemente, de *momento de inercia* del elemento. Así pues, el momento de inercia dI de un elemento de masa dm respecto al eje OO (fig. A-1) está definido en la forma

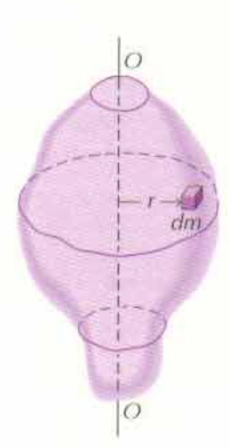


Figura A-1

$$dI = r^2 m$$

El momento de inercia de todo el cuerpo respecto al eje OO es, por definición,

$$I = \int_m r^2\, dm \qquad \text{(A-1)}$$

Como tanto la masa del elemento como el cuadrado de su distancia al eje son siempre positivos, el momento de inercia de una masa será siempre una cantidad positiva.

Las dimensiones de un momento de inercia son las de una masa multiplicada por el cuadrado de una longitud, ML^2. Sus unidades son: en el sistema SI el $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. En el U.S. Customary system, las magnitudes fundamentales son fuerza, longitud y tiempo y la masa tiene por dimensiones FT^2L^{-1}. Por tanto, las unidades del momento de inercia será $\text{lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{ft}$. Si la masa del cuerpo W/g se expresa en slugs ($\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$) la unidad de momento de inercia será el $\text{slug} \cdot \text{ft}^2$.

Podemos determinar los momentos de inercia de un cuerpo respecto a los ejes de coordenadas considerando un elemento de masa como se indica en la figura A-2. De la definición de momento de inercia,

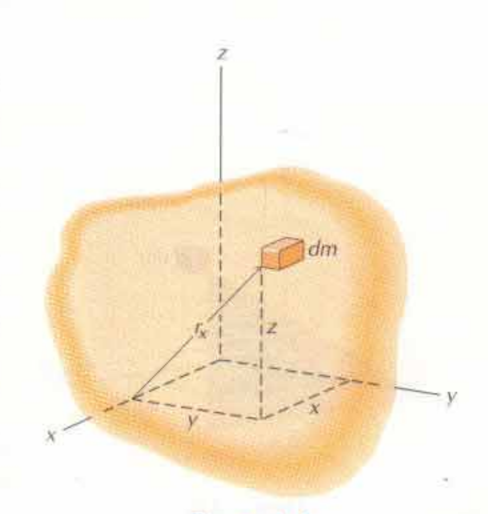


Figura A-2

$$dI_x = r_x^2\, dm = (y^2 + z^2)\, dm$$

Para los ejes y y z pueden escribirse expresiones análogas. Así pues,

$$I_x = \int_m r_x^2 \, dm = \int_m (y^2 + z^2) \, dm$$

$$I_y = \int_m r_y^2 \, dm = \int_m (z^2 + x^2) \, dm \qquad \text{(A-2)}$$

$$I_z = \int_m r_z^2 \, dm = \int_m (x^2 + y^2) \, dm$$

A.1.1 Radio de giro

La definición de momento de inercia (ec. A-1) indica que las dimensiones del momento de inercia son las de una masa multiplicada por el cuadrado de una longitud. A consecuencia de ello, el momento de inercia de un cuerpo puede expresarse mediante el producto de su masa m por el cuadrado de una longitud k. Esta longitud k se denomina *radio de giro* del cuerpo. Así pues, el momento de inercia I de un cuerpo respecto a una recta dada se puede expresar en la forma

$$I = mk^2 \qquad \text{o sea} \qquad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \qquad \text{(A-3)}$$

El radio de giro de la masa de un cuerpo respecto a un eje cualquiera puede considerarse que es la distancia al eje a la que habría que concentrar una masa igual a la total del cuerpo para tener el mismo momento de inercia respecto al eje de la masa real (o distribuida).

El radio de giro de las masas es muy parecido al radio de giro de las áreas estudiado en el apartado 10.2.3. El radio de giro de las masas no es la distancia al eje dado de un punto fijo del cuerpo tal como el centro de masa. El radio de giro de la masa de un cuerpo respecto a un eje es siempre mayor que la distancia del centro de masa del cuerpo al eje. Para el radio de giro no existe ninguna interpretación física útil; no es más que una manera conveniente de expresar el momento de inercia de la masa de un cuerpo en función de su masa y una longitud.

A.1.2 Teorema de Steiner para momentos de inercia

El teorema de Steiner para momentos de inercia es muy parecido al del mismo nombre correspondiente a los segundos momentos de área estudiado en el apartado 10.2.1. Consideremos el cuerpo representado en la figura A-3, que tiene un sistema de ejes de coordenadas xyz con su origen en el centro de masa G del cuerpo y otro sistema de ejes de coordenadas $x'y'z'$ paralelos a los anteriores cuyo origen sea el punto O'. En la figura vemos que

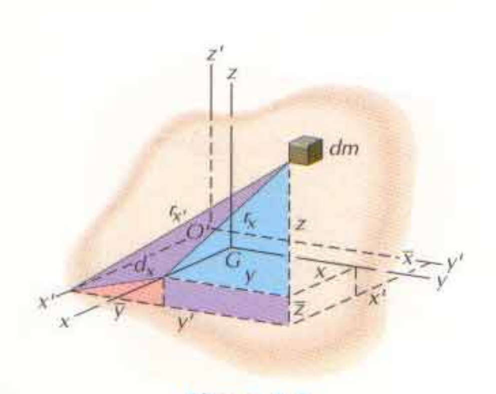


Figura A-3

$$x' = \bar{x} + x$$
$$y' = \bar{y} + y$$
$$z' = \bar{z} + z$$

La distancia d_x que separa los ejes x' y x es

$$d_x = \sqrt{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}$$

El momento de inercia del cuerpo respecto a un eje x' paralelo al eje x que pasa por el centro de masa es por definición

$$I_{x'} = \int_m r_{x'}^2\, dm = \int_m [\,(\bar{y} + y)^2 + (\bar{z} + z)^2\,]\, dm$$
$$= \int_m (y^2 + z^2)\, dm + \bar{y}^2 \int_m dm + 2\bar{y} \int_m y\, dm + \bar{z}^2 \int_m dm + 2\bar{z} \int_m z\, dm$$

Sin embargo,

$$\int_m (y^2 + z^2)\, dm = I_{xG}$$

y como los ejes x e y pasan por el centro de masa G del cuerpo,

$$\int_m y\, dm = 0 \qquad \int_m z\, dm = 0$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} I_{x'} &= I_{xG} + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)\, m = I_{xG} + d_x^2 m \\ I_{y'} &= I_{yG} + (\bar{z}^2 + \bar{x}2)\, m = I_{yG} + d_y^2 m \\ I_{z'} &= I_{zG} + (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\, m = I_{zG} + d_z^2 m \end{aligned} \qquad \text{(A-4)}$$

La ecuación A-4 expresa el teorema de Steiner para momentos de inercia. El subíndice G indica que el eje x pasa por el centro de masa G del cuerpo. Así pues, si se conoce el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje que pasa por su centro de masa, podrá hallarse el momento de inercia del cuerpo respecto a un eje paralelo cualquiera sin necesidad de integrar, utilizando las ecuaciones A-4.

Entre los radios de giro relativos a los dos ejes existe una relación análoga. Así, si representamos por k_x y $k_{x'}$ los radios de giro relativos a los dos ejes paralelos, podremos escribir la ecuación anterior en la forma

$$k_{x'}^2 m = k_{xG} m^2 + d_x^2 m$$

Luego

$$\begin{aligned} k_{x'}^2 &= k_{xG}^2 + d_x^2 \\ k_{y'}^2 &= k_{yG}^2 + d_y^2 \\ k_{z'}^2 &= k_{zG}^2 + d_z^2 \end{aligned} \qquad \text{(A-5)}$$

Nota: Las ecuaciones A-4 y A-5 sólo son válidas para pasar de ejes xyz que pasen por el centro de masa del cuerpo a otros ejes paralelos o al revés. *No son válidas para dos ejes cualesquiera.*

A.1.3 Momentos de inercia obtenidos por integración

Cuando para determinar el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje se utilicen métodos de integración, la masa del cuerpo se podrá dividir de diversas maneras. Según sea la manera de elegir el elemento, será necesaria una integración simple, doble o triple. La geometría del cuerpo suele determinar si se utilizan coordenadas cartesianas o polares. En uno y otro caso, los elementos de masa deberán tomarse de manera que

1. Todas las partes del elemento se hallen a la misma distancia del eje respecto al cual hay que determinar el momento de inercia, o
2. Si no se cumple la condición 1, el elemento deberá tomarse de manera que se conozca su momento de inercia respecto al eje al cual hay que buscar el momento de inercia del cuerpo. Este momento de inercia se podrá hallar entonces sumando los momentos de inercia de los elementos.
3. Si se conoce la situación del centro de masa del elemento y el momento de inercia del elemento respecto a un eje que pase por el centro de masa y sea paralelo al eje dado, se podrá determinar el momento de inercia del elemento utilizando el teorema de Steiner. Después podrá hallarse el momento de inercia del cuerpo sumando los momentos de inercia de los elementos.

Cuando se utilice una integración triple, el elemento siempre cumple el primer requisito, si bien esta condición no la satisfacen necesariamente los elementos que se utilizan en una integración simple o doble.

En algunos casos, el cuerpo se puede considerar como sistema de puntos materiales. El momento de inercia de un sistema de puntos materiales respecto a una recta de interés es la suma de los momentos de inercia, respecto a dicha recta, de los mencionados puntos. Así pues, si representamos por $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ las masas de los puntos y por $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ sus distancias a una recta dada, el momento de inercia del sistema se podrá expresar en la forma

$$I = \Sigma mr^2 = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots + m_nr_n^2$$

Es relativamente fácil determinar los momentos de inercia de placas delgadas. Por ejemplo, consideremos la placa delgada representada en la figura A-4. Tiene una densidad uniforme ρ, un grosor uniforme t y una superficie de área A. Los momentos de inercia respecto a los ejes x, y, y z son, por definición,

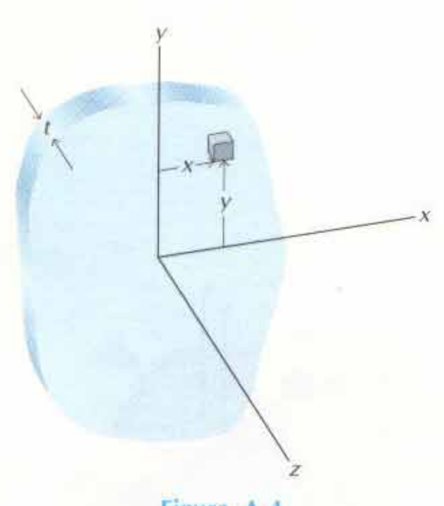


Figura A-4

$$I_{xm} = \int_m y^2\,dm = \int_V y^2\rho\,dV = \int_A y^2\rho\,t\,dA = \rho t\int_A y^2\,dA = \rho t\,I_{xA}$$

$$I_{ym} = \int_m x^2\,dm = \int_V x^2\rho\,dV = \int_A x^2\rho t\,dA = \rho t\int_A x^2\,dA = \rho t\,I_{yA} \qquad \text{(A-6)}$$

$$I_{zm} = \int_m (x^2+y^2)\,dm = \rho t\,I_{yA} + \rho t\,I_{xA} = \rho t\,(I_{yA} + I_{xA})$$

donde los subíndices m y A indican momentos de inercia y segundos momentos de superficie, respectivamente. Como las ecuaciones de los momentos de inercia de placas delgadas contienen las expresiones de los segundos momen-

tos de superficie, se podrán utilizar los resultados consignados en el Apéndice B (tabla B-3) para segundos momentos de superficie y aplicarlos a los momentos de inercia sin más que multiplicarlos por ρt.

Para un cuerpo tridimensional cualquiera, los momentos de inercia respecto a los ejes x, y y z son

$$
\begin{aligned}
I_x &= \int_m r_x^2\, dm = \int_m (y^2 + z^2)\, dm \\
I_y &= \int_m r_y^2\, dm = \int_m (z^2 + x^2)\, dm \\
I_z &= \int_m r_z^2\, dm = \int_m (x^2 + y^2)\, dm
\end{aligned}
\qquad \text{(A-2)}
$$

Si la densidad del cuerpo es uniforme, se podrá expresar el elemento de masa dm en función del elemento de volumen dV mediante la expresión $dm = \rho\, dV$. Las ecuaciones A-2 quedan entonces en la forma

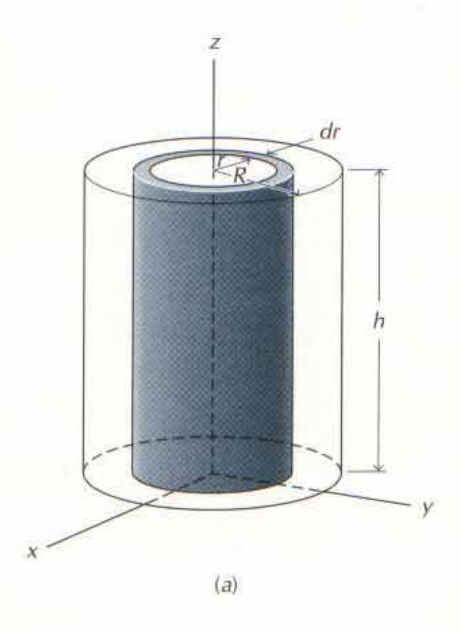
$$
\begin{aligned}
I_x &= \rho \int_V (y^2 + z^2)\, dV \\
I_y &= \rho \int_V (z^2 + x^2)\, dV \\
I_z &= \rho \int_V (x^2 + y^2)\, dV
\end{aligned}
\qquad \text{(A-7)}
$$

Si la densidad del cuerpo no fuese uniforme, debería expresarse en función de la posición y mantenerse dentro del signo integral.

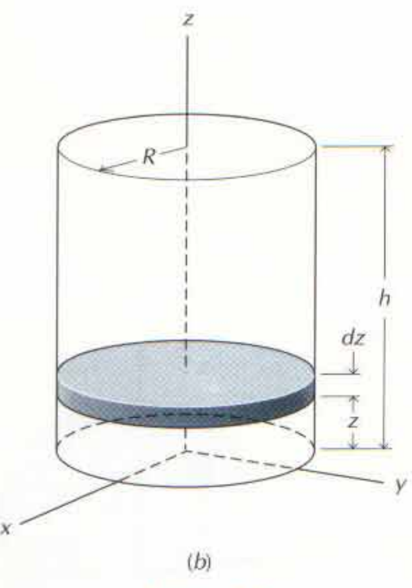
El elemento de volumen concreto que se utilice depende de la geometría del cuerpo. Para un cuerpo tridimensional cualquiera, suele utilizarse el elemento diferencial $dV = dx\, dy\, dz$, el cual exige una integración triple. En el caso de cuerpos con simetría de revolución, pueden utilizarse elementos que sean placas circulares, los cuales sólo precisan una integración simple. En algunos problemas resultan útiles elementos cilíndricos y coordenadas polares. En los ejemplos que siguen se ilustran procedimientos para determinar momentos de inercia.

PROBLEMA EJEMPLO A.1

Determinar el momento de inercia de un cilindro de revolución homogéneo respecto a su eje.



(a)



(b)

Figura A-5

SOLUCIÓN

El momento de inercia del cilindro se puede determinar a partir de la definición de momento de inercia (ec. A-1) considerando una capa cilíndrica elemental como la indicada en la figura A-5*a*. Así,

$$dI_{zm} = r^2\, dm = r^2\,(\rho\, dV) = r^2\rho\,(2\pi rh\, dr) = 2\pi\rho hr^3\, dr$$

Por tanto,

$$I_z = \int_m dI_{zm} = \int_0^R 2\pi\rho hr^3\, dr = \left[\frac{\pi\rho hr^4}{2}\right]_0^R = \frac{1}{2}\pi\rho hR^4$$

De otra manera, se puede considerar un disco elemental como el representado en la figura A-5*b*. El momento de inercia de este tipo de elemento viene dado por la ecuación A-6 y es

$$dI_{zm} = \rho t(I_{yA} + I_{xA})$$

Sustituyendo los momentos segundos de una superficie circular por los valores consignados en la tabla B-3 se tiene

$$dI_{zm} = \rho\left(\frac{\pi R^4}{4} + \frac{\pi R^4}{4}\right)dz = \frac{1}{2}\pi\rho R^4\, dz$$

Por tanto,

$$I_z = \int_m dI_{zm} = \int_0^h \frac{1}{2}\pi\rho R^4\, dz = \left[\frac{1}{2}\pi\rho R^4 z\right]_0^h = \frac{1}{2}\pi\rho hR^4$$

La masa del cilindro es

$$m = \rho V = \rho(\pi R^2 h) = \rho\pi R^2 h$$

Por tanto,

$$I_z = \frac{1}{2}(\rho\pi R^2 h)R^2 = \frac{1}{2}mR^2 \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO A.2

Determinar el momento de inercia del paralelepípedo rectángulo homogéneo respresentado en la figura A-6*a* respecto al

a. Eje y que pasa por su centro de masa.
b. Eje y' dirigido según una arista.
c. Eje x que pasa por el centroide de una cara.

SOLUCIÓN

a. Considérese una placa rectangular elemental como la representada en la figura A-6*b*. El momento de inercia de este tipo de elemento viene dado por la ecuación A-6 y es

$$dI_{ym} = \rho t(I_{zA} + I_{xA})$$

Sustituyendo los momentos segundos de una superficie rectangular por los consignados en la tabla B-3 se tiene

$$dI_{ym} = \rho\left(\frac{hb^3}{12} + \frac{bh^3}{12}\right) dy = \rho\frac{bh}{12}(b^2 + h^2)\, dy$$

Por tanto,

$$I_y = \int_m dI_{ym} = \int_0^L \rho\frac{bh}{12}(b^2 + h^2)\, dy$$

$$= \left[\rho\frac{bh}{12}(b^2 + h^2)y\right]_0^L = \frac{\rho bhL}{12}(b^2 + h^2)$$

La masa del paralelepípedo es

$$m = \rho V = \rho(bhL) = \rho bhL$$

Por tanto,

$$I_y = \frac{\rho bhL}{12}(b^2 + h^2) = \frac{1}{12}m\,(b^2 + h^2) \qquad \text{Resp.}$$

b. Para determinar el momento de inercia respecto al eje y' dirigido según una arista se puede aplicar el teorema de Steiner (ec. A-4). Así,

$$I_{y'} = I_{yG} + (\bar{x}^2 + \bar{z}^2)\, m$$

$$= \frac{1}{12}m(b^2 + h^2) + \left(\frac{b^2}{4} + \frac{h^2}{4}\right)m$$

$$= \frac{1}{3}m(b^2 + h^2) \qquad \text{Resp.}$$

c. El momento de inercia respecto a un eje x que pase por el centro de masa de la placa rectangular elemental representada en la figura A-6*b* viene dado por la ecuación A-6 y es

$$dI_{xm} = \rho t I_{xA}$$

Sustituyendo el momento segundo de una superficie rectangular por el consignado en la tabla B-3 se tiene

$$dI_{xG} = \rho\frac{bh^3}{12}\, dy = \frac{\rho bh^3}{12}\, dy$$

El teorema de Steiner (ec. A-4), al hacer $d_x = y$ da el momento de inercia de la placa rectangular elemental respecto al eje x indicado en la figura A-6*b:*

$$dI_x = dI_{xG} + d_x^2 m = \frac{\rho bh^3}{12}\, dy + y^2(\rho bh\, dy) = \frac{\rho bh}{12}(h^2 + 12y^2)\, dy$$

$$I_x = \int_m dI_x = \int_0^L \frac{\rho bh}{12}(h^2 + 12y^2)\, dy$$

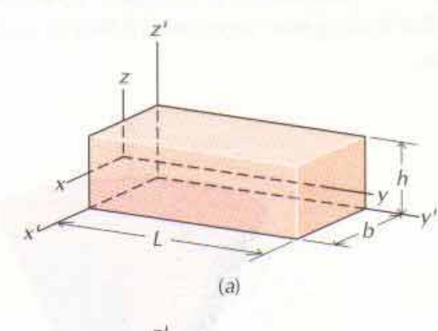
$$= \frac{\rho bh}{12}\,[h^2 y + 4y^3\,]_0^L = \frac{\rho bhL}{12}(h^2 + 4L^2)$$

Pero

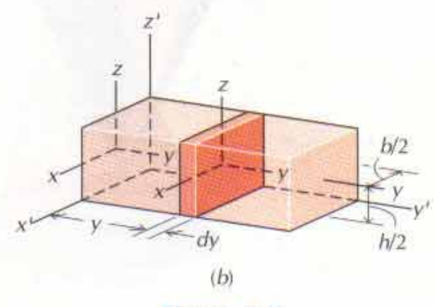
$$m = \rho bhL$$

Por tanto,

$$I_x = \frac{\rho bhL}{12}(h^2 + 4L^2) = \frac{1}{12}m(h^2 + 4L^2) \qquad \text{Resp.}$$



(a)



(b)

Figura A-6

PROBLEMAS

A-1* Determinar el momento de inercia del cono de revolución homogéneo representado en la figura PA-1 respecto a su eje.

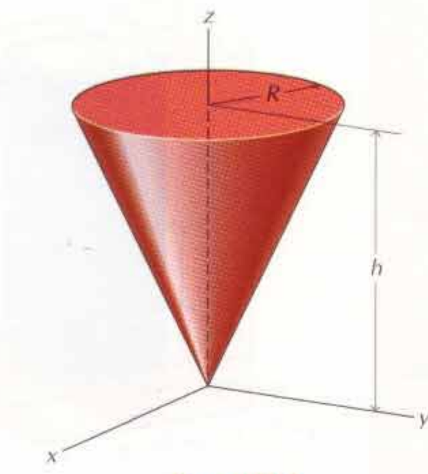


Figura PA-1

A-2* Determinar el momento de inercia del cono de revolución homogéneo representado en la figura PA-1 respecto a un eje que pase por su vértice y sea perpendicular al eje de simetría.

A-3 Determinar el momento de inercia del cono de revolución homogéneo representado en la figura PA-1 respecto a un eje contenido en la base y perpendicular al eje de simetría.

A-4 Determinar el momento de inercia de una esfera homogénea maciza de radio R respecto a uno de sus diámetros.

A-5* Determinar el momento de inercia de un cilindro macizo y homogéneo de radio R y longitud de generatriz L respecto a un diámetro de la base del cilindro.

A-6* Determinar el momento de inercia de la semiesfera maciza y homogénea representada en la figura PA-6 respecto al eje x que se indica en la figura.

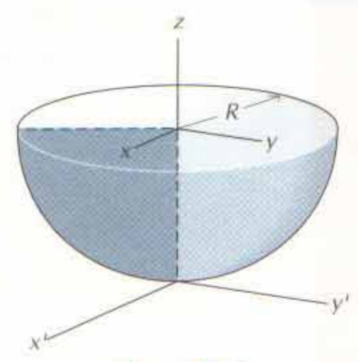


Figura PA-6

A-7 Determinar el momento de inercia de la semiesfera maciza y homogénea representada en la figura PA-6 respecto al eje x' que se indica en la figura.

A-8 Determinar el momento de inercia del prisma triangular macizo y homogéneo representado en la figura PA-8 respecto al eje x que se indica en la figura.

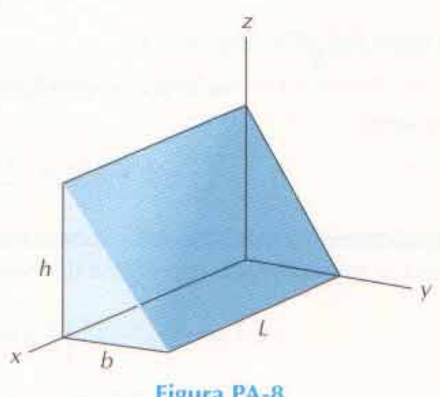


Figura PA-8

A-9* Determinar el momento de inercia del prisma triangular macizo y homogéneo representado en la figura PA-8 respecto a un eje y que pase por su centro de masa.

A-10* Determinar el momento de inercia del tetraedro macizo y homogéneo representado en la figura PA-10 respecto al eje x que se indica en la figura.

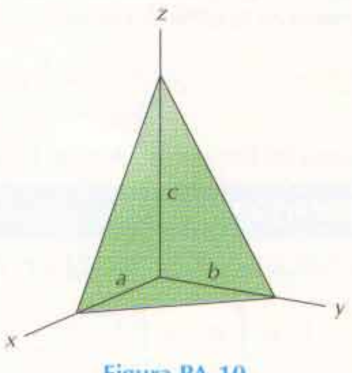


Figura PA-10

A-11 Determinar el momento de inercia del tetraedro macizo y homogéneo representado en la figura PA-10 respecto a un eje y que pase por el centro de masa del cuerpo.

A-12 Se forma un sólido de revolución haciendo girar la superficie representada en la figura PA-12 en torno al eje y. Determinar el momento de inercia del cuerpo respecto al eje y.

14. Determinar el momento de inercia del cuerpo respecto a un eje y que pase por su centro de masa.

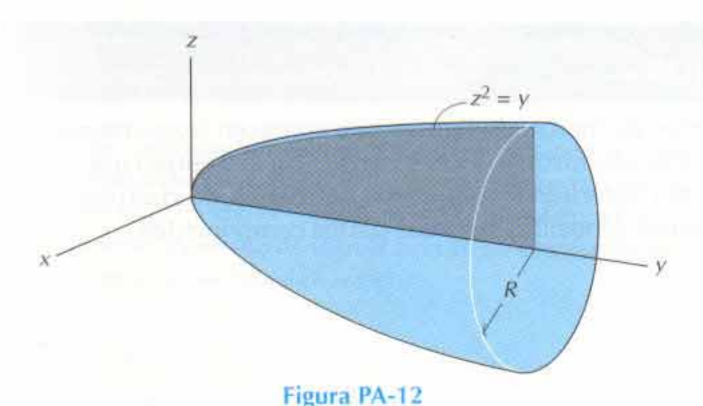


Figura PA-12

A-13* Se forma un sólido de revolución haciendo girar la superficie representada en la figura PA-12 en torno al eje y. Determinar el momento de inercia del cuerpo respecto al eje x.

A-14* Se forma un octante esférico haciendo girar 90° alrededor del eje z el cuadrante circular representado en la figura PA-14. Determinar el momento de inercia del cuerpo respecto a un eje y que pase por su centro de masa.

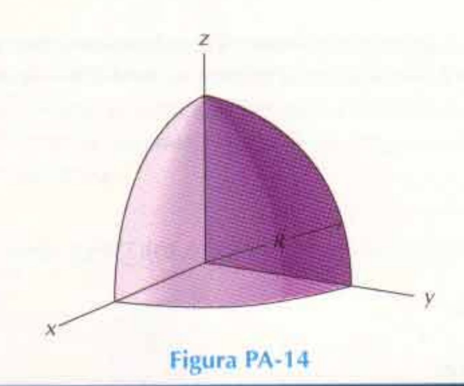


Figura PA-14

A-15 Se forma un octante de cono haciendo girar 90° alrededor del eje z el triángulo representado en la figura PA-15. Determinar el momento de inercia del cuerpo respecto al eje y que se indica en la figura.

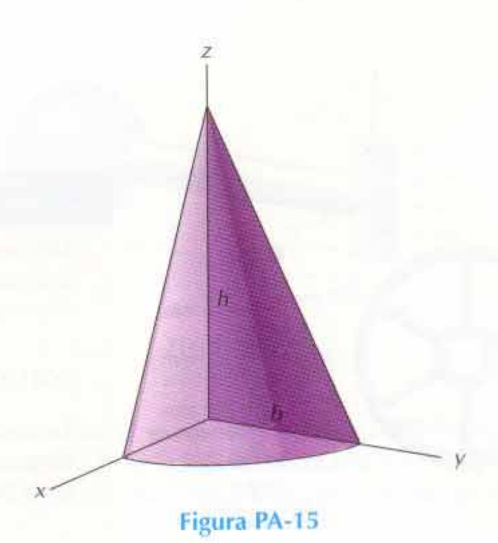


Figura PA-15

A-16 Se forma un octante de cono haciendo girar 90° alrededor del eje z el triángulo representado en la figura PA-15. Determinar el momento de inercia del cuerpo respecto a un eje x que pase por su centro de masa.

A.1.4 Momentos de inercia de cuerpos compuestos

En la práctica de ingeniería, es frecuente que el cuerpo en cuestión pueda descomponerse en varias formas sencillas, tales como cilindros, esferas, placas y varillas, cuyos momentos de inercia han sido calculados y tabulados. El momento de inercia del cuerpo compuesto, respecto a un eje cualquiera, es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a dicho eje de las distintas partes del cuerpo. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} I_x &= \int_m (y^2 + z^2)\, dm \\ &= \int_{m_1} (y^2 + z^2)\, dm_1 + \int_{m_2} (y^2 + z^2)\, dm_2 + \ldots + \int_{m_n} (y^2 + z^2)\, dm_n \\ &= I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} + \ldots + I_{xn} \end{aligned}$$

Cuando una de las partes componentes sea un hueco, su momento de inercia deberá restarse del momento de inercia de la parte total para obtener el momento de inercia del cuerpo compuesto. En el apéndice B (tabla B-5) puede verse una lista de momentos de inercia de figuras que aparecen frecuentemente, tales como varillas, placas, cilindros, esferas y conos. En el ejemplo que sigue se ilustran métodos para determinar momentos de inercia de cuerpos compuestos utilizando valores conocidos para sus partes componentes.

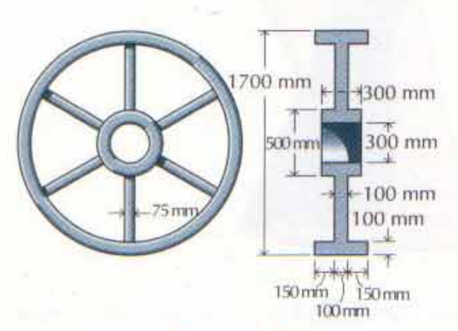


Figura A-7

PROBLEMA EJEMPLO A.3

Determinar el momento de inercia del volante de hierro colado representado en la figura A-7 respecto a su eje de rotación. La densidad del hierro colado es $\rho = 7369\ \text{kg/m}^3$.

SOLUCIÓN

La llanta y el cubo del volante son cilindros huecos y los radios son prismas rectangulares. Poniendo en metros todas las dimensiones, el momento de inercia de la llanta es

$$I_L = \frac{1}{2}m_e R_e^2 - \frac{1}{2}m_i R_i^2$$
$$= \frac{1}{2}[\pi(0{,}85)^2(0{,}40)(7369)]\ (0{,}85)^2 - \frac{1}{2}[\pi(0{,}75)^2(0{,}40)(7369)]\ (0{,}75)^2$$
$$= 2416{,}9 - 1464{,}9 = 952\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

El momento de inercia del cubo es

$$I_C = \frac{1}{2}m_e R_e^2 - \frac{1}{2}m_i R_i^2$$
$$= \frac{1}{2}[\pi(0{,}25)^2(0{,}30)(7369)]\ (0{,}30)^2 - \frac{1}{2}[\pi(0{,}15)^2(0{,}30)(7369)]\ (0{,}15)^2$$
$$= 20{,}25 - 1{,}76 = 18{,}49\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

El momento de inercia de cada radio es

$$I_R = I_G + d^2 m$$
$$= \frac{1}{12}[\,(0{,}075)\,(0{,}100)(0{,}500)(7369)]\ [\,(0{,}075)^2 + (0{,}500)\,]$$
$$+ (0{,}500)^2\ [\,(0{,}075)\,(0{,}100)(0{,}500)(7369)]$$
$$= (0{,}59 + 6{,}91) = 7{,}50\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

El momento de inercia total del volante es

$$I = I_L + I_C + 6I_R$$
$$= 952 + 18{,}49 + 6(7{,}50) = 1015\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

A-17* Se construye un cuerpo compuesto uniendo una semiesfera de acero ($w = 77\ \mathrm{kN/m^3}$) a un cono de revolución de aluminio ($w = 27{,}5\ \mathrm{kN/m^3}$), según se indica en la figura PA-17. Determinar el momento de inercia del cuerpo compuesto respecto al eje y que se indica en la figura.

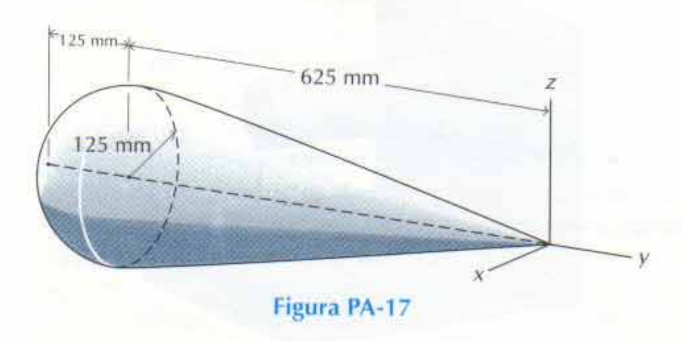


Figura PA-17

A-18* Un cuerpo compuesto consiste en un bloque rectangular de latón ($\rho = 8{,}75\ \mathrm{Mg/m^3}$) unido a un cilindro de acero ($\rho = 7{,}87\ \mathrm{Mg/m^3}$), según se indica en la figura PA-18. Determinar el momento de inercia del cuerpo compuesto respecto al eje y que se indica en la figura.

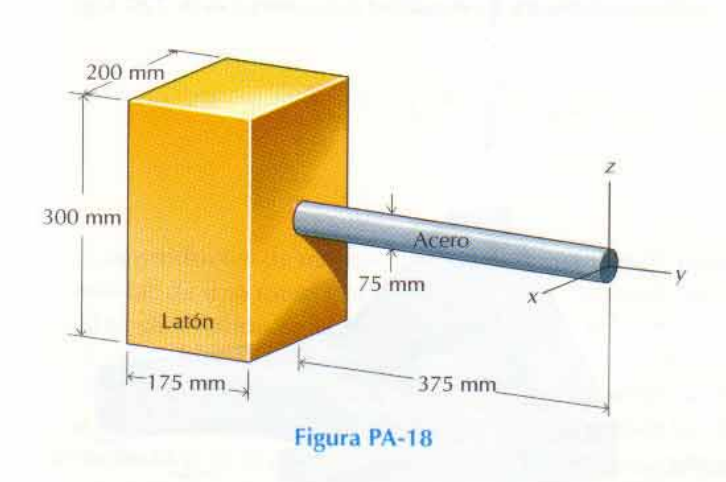


Figura PA-18

A-19 Se construye un cuerpo compuesto uniendo una semiesfera de acero ($w = 77\ \mathrm{kN/m^3}$) con un cono de revolución de aluminio ($w = 27{,}5\ \mathrm{kN/m^3}$), según se indica en la figura PA-17. Determinar el momento de inercia del cuerpo compuesto respecto al eje x que se indica en la figura.

A-20 Un cuerpo compuesto consiste en un cilindro unido a un bloque rectangular, según se indica en la figura PA-18. Determinar el momento de inercia del cuerpo compuesto respecto al eje x que se indica en la figura, si todo el cuerpo es de hierro colado ($\rho = 7{,}37\ \mathrm{Mg/m^3}$).

A-21* Dos cilindros de acero ($\rho = 77\ \mathrm{kN/m^3}$) y una esfera de latón ($w = 85{,}8\ \mathrm{kN/m^3}$) forman el cuerpo compuesto representado en la figura PA-21. Determinar el momento de inercia del cuerpo compuesto respecto al eje x que se indica en la figura.

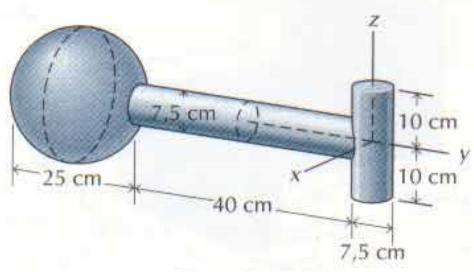


Figura PA-21

A-22* Determinar el momento de inercia del cuerpo compuesto representado en la figura PA-22 respecto al eje x que se indica en la figura. La densidad del material es de $7{,}87\ \mathrm{Mg/m^3}$.

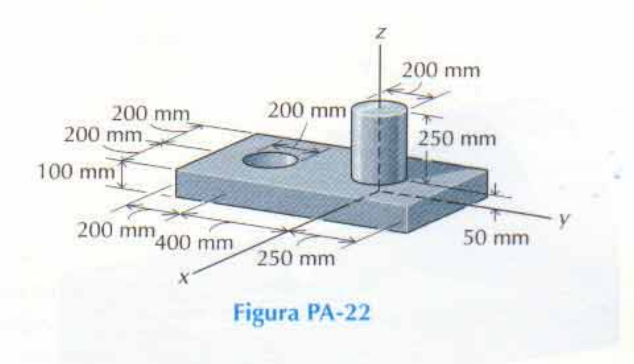


Figura PA-22

A-23 Dos cilindros de latón ($w = 85{,}8\ \mathrm{kN/m^3}$) y una esfera de bronce ($w = 86{,}8\ \mathrm{kN/m^3}$) forman el cuerpo compuesto representado en la figura PA-21. Determinar su momento de inercia respecto al eje y que se indica en la figura.

A-24 Determinar el momento de inercia del cuerpo compuesto representado en la figura PA-22 respecto al eje y que se indica en la figura. La densidad del material es de $2{,}80\ \mathrm{Mg/m^3}$.

A-25 Dos cilindros de acero ($w = 77\ \mathrm{kN/m^3}$) y una esfera de aluminio ($w = 27{,}2\ \mathrm{kN/m^3}$) forman el cuerpo compuesto de la figura PA-21. Determinar su momento de inercia respecto al eje z que se indica en la figura.

A-26 Determinar el momento de inercia del cuerpo compuesto representado en la figura PA-22 respecto al eje z que se indica en la figura. La densidad del material es de $7{,}87\ \mathrm{Mg/m^3}$.

A-27* Determinar el momento de inercia del cuerpo compuesto representado en la figura PA-27 respecto al eje y que se indica en la figura. El peso específico del material es de 27,5 kN/m^3.

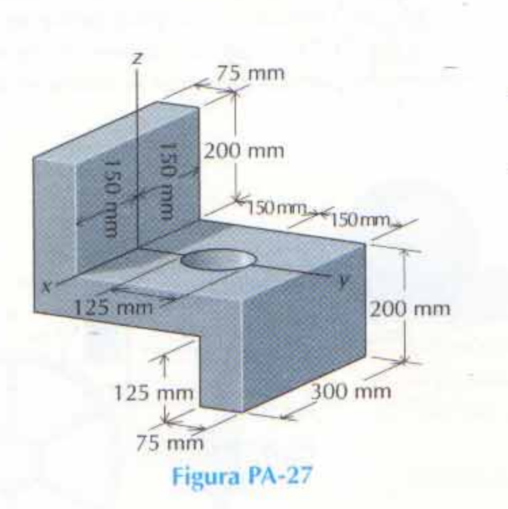


Figura PA-27

A-28* Determinar el momento de inercia del cuerpo compuesto representado en la figura PA-28 respecto al eje y que se indica en la figura. La densidad del material es de 7,37 Mg/m^3.

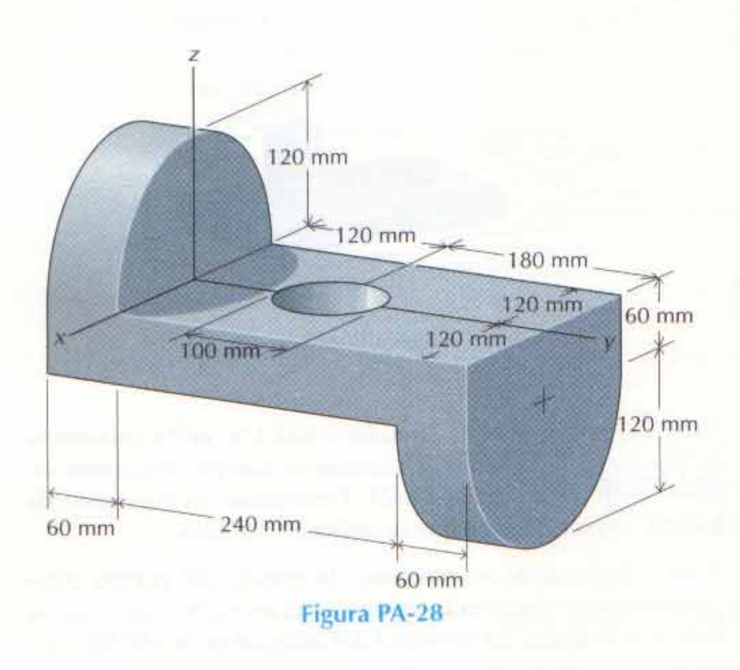


Figura PA-28

A-29 Determinar el momento de inercia del cuerpo compuesto representado en la figura PA-27 respecto al eje x que se indica en la figura. El peso específico del material es de 85,8 kN/m^3.

A-30 Determinar el momento de inercia del cuerpo compuesto representado en la figura PA-28 respecto al eje x que se indica en la figura. La densidad del material es de 2,77 Mg/m^3.

A-31* Determinar el momento de inercia del cuerpo compuesto representado en la figura PA-31 respecto al eje x que se indica en la figura. El peso específico del material es de 86,9 kN/m^3.

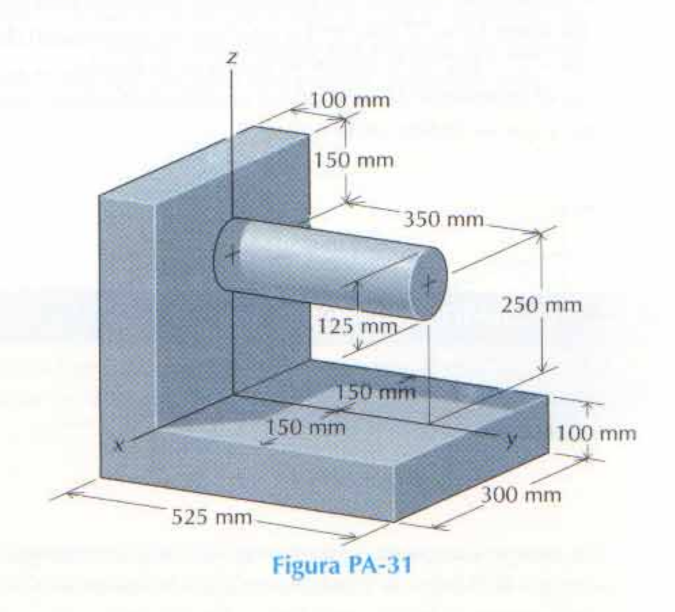


Figura PA-31

A-32* Determinar el momento de inercia del cuerpo compuesto representado en la figura PA-32 respecto al eje y que se indica en la figura. La densidad del material es de 7,87 Mg/m^3.

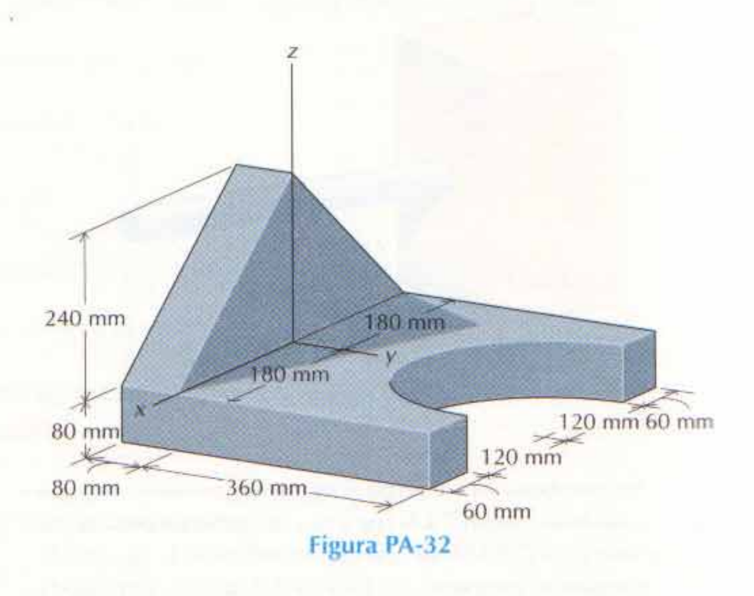


Figura PA-32

A-33 Determinar el momento de inercia del cuerpo compuesto representado en la figura PA-31 respecto al eje x que se indica en la figura. El peso específico del material es de 77 kN/m^3.

A-34 Determinar el momento de inercia del cuerpo compuesto representado en la figura PA-32 respecto al eje x que se indica en la figura. La densidad del material es de 8,75 Mg/m^3.

A.2 PRODUCTO DE INERCIA

En el análisis del movimiento de cuerpos rígidos aparecen, a veces, expresiones que contienen el producto de la masa de un pequeño elemento por las distancias a dos planos coordenados ortogonales. Este producto, que es análogo al momento segundo mixto de superficie, se denomina *producto de inercia* del elemento. Por ejemplo, el producto de inercia del elemento representado en la figura A-8 respecto a los planos xz e yz es, por definición,

$$dI_{xy} = xy\, dm \tag{A-8}$$

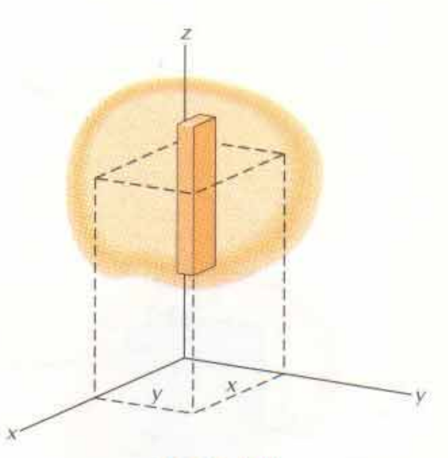


Figura A-8

La suma de los productos de inercia de todos los elementos de masa del cuerpo respecto a los mismos planos ortogonales se denomina producto de inercia del cuerpo. Los tres productos de inercia del cuerpo representado en la figura A-8 son

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_m xy\, dm \\ I_{yz} &= \int_m yz\, dm \\ I_{zx} &= \int_m zx\, dm \end{aligned} \tag{A-9}$$

Los productos de inercia, como los momentos de inercia, tienen por dimensiones las de una masa multiplicada por el cuadrado de una longitud, ML^2. Su unidad de medida en el sistema SI es el kg · m^2. En el U.S. Customary system es el slug · ft^2.

El producto de inercia de un cuerpo puede ser positivo, negativo o nulo, ya que las dos coordenadas tienen signos independientes. El producto de inercia será positivo en el caso en que las coordenadas sean de igual signo y negativo si sus signos son opuestos. El producto de inercia será nulo cuando uno de los planos sea plano de simetría, ya que los elementos a uno y otro lado de dicho plano tendrán, dos a dos, productos de inercia de signos opuestos e igual valor absoluto que darán una suma nula.

Los métodos de integración utilizados para la determinación de momentos de inercia son igualmente aplicables a la de productos de inercia. Según sea la manera de tomar los elementos, podrá ser necesaria una integración simple, doble o triple.

Los momentos de inercia de placas delgadas estaban relacionados con los segundos momentos de superficie de las mismas placas. Análogamente, los productos de inercia se pueden relacionar con los segundos momentos mixtos de superficie de dichas placas. Si la placa tiene una densidad uniforme ρ, un

grosor uniforme t y una sección de área A, los productos de inercia serán, por definición,

$$I_{xym} = \int_m xy\ dm = \int_V xy\ \rho\ dV = \int_A xy\ \rho\ t\ dA = \rho t \int_V xy\ dA = \rho t\ I_{xyA}$$

$$I_{yzm} = \int_m yz\ dm = 0 \qquad \text{(A-10)}$$

$$I_{zxm} = \int_m zx\ dm = 0$$

donde los subíndices m y A representan productos de inercia de masa y segundos momentos mixtos de superficie, respectivamente. Los productos de inercia I_{yzm} e I_{zxm} de una placa delgada son nulos porque se supone que los ejes x e y se hallan en el plano medio de la placa (plano de simetría).

Podemos desarrollar un teorema de Steiner para productos de inercia muy parecido al desarrollado para segundos momentos mixtos de superficie en el apartado 10.2.5. Consideremos el cuerpo representado en la figura A-9, que tiene un sistema de coordenadas xyz con origen en el centro de masa G del cuerpo y un sistema de coordenadas $x'y'z'$ con origen en el punto O'. En la figura vemos que

$$x' = \bar{x} + x$$
$$y' = \bar{y} + y$$
$$z' = \bar{z} + z$$

Figura A-9

El producto de inercia $I_{x'y'}$ del cuerpo respecto a los planos $x'y'$ e $y'z'$ es, por definición,

$$I_{x'y'} = \int_m x'y'\ dm = \int_m (\bar{x} + x)(\bar{y} + y)\ dm$$
$$= \int_m \bar{x}\bar{y}\ dm + \int \bar{x}y\ dm + \int_m \bar{y}x\ dm + \int_m xy\ dm$$

Como $\bar{x}$ e $\bar{y}$ son iguales para todo elemento de masa dm,

$$I_{x'y'} = \bar{x}\bar{y}\int_m dm + \bar{x}\int_m y\ dm + \bar{y}\int_m x\ dm + \int_m xy\ dm$$

Ahora bien,

$$\int_m xy\ dm = I_{xy}$$

y como los ejes x e y pasan por el centro de masa G del cuerpo,

$$\int_m y\ dm = 0 \qquad \int_m z\ dm = 0$$

Por tanto,

$$I_{x'y'} = I_{xyG} + \bar{x}\bar{y}\ m$$
$$I_{y'z'} = I_{yzG} + \bar{y}\bar{z}\ m \qquad \text{(A-11)}$$
$$I_{z'x'} = I_{zxG} + \bar{z}\bar{x}\ m$$

Las ecuaciones A-11 constituyen el teorema de Steiner para productos de inercia. El subíndice G indica que los ejes x e y pasan por el centro de masa G del cuerpo. Así pues, si se conoce el producto de inercia de un cuerpo respecto a un par de planos ortogonales que pasen por su centro de masa, podrá hallarse el producto de inercia del cuerpo respecto a cualquier otro par de planos paralelos a los primeros, sin necesidad de integrar, utilizando las ecuaciones A-11.

En los ejemplos que siguen se ilustran métodos para la determinación de productos de inercia.

PROBLEMA EJEMPLO A.4

Determinar el producto de inercia I_{xy} del cuarto de cilindro homogéneo representado en la figura A-19*a*.

SOLUCIÓN

Todas las partes del elemento de masa dm, representado en la figura A-10*b*, se hallan a iguales distancias x e y de los planos xz e yz; por tanto, el producto de inercia dI_{xy} del elemento será, por definición,

$$dI_{xy} = xy\ dm$$

Sumando los de todos los elementos que integran el cuerpo, se tiene

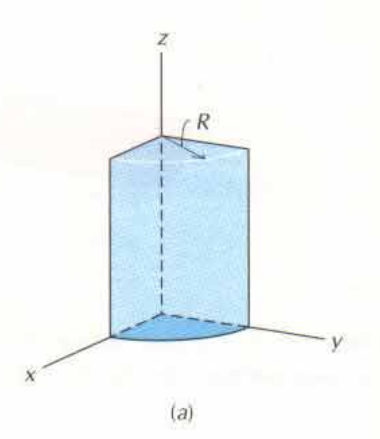
$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_m dI_{xy} = \int_m xy\ dm = \int_V xy\ \rho dV \\ &= \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \rho xy\,(h\ dy\ dx) \\ &= \int_0^R \rho hx \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx \\ &= \int_0^R \frac{1}{2}\rho h(R^2x - x^3)\ dx \\ &= \frac{1}{2}\rho h\left[\frac{R^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^R = \frac{1}{2}\rho h\left(\frac{R^4}{4}\right) = \frac{1}{8}\rho R^4 h \end{aligned}$$

De otra manera, para determinar I_{xy} se podría utilizar la placa delgada que se indica en la figura A-10*c*. De la ecuación A-10 y los datos de la tabla B-5,

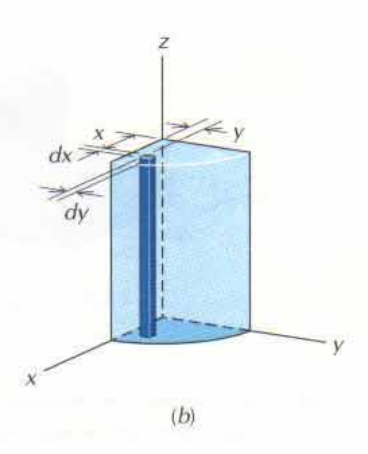
$$dI_{xym} = \rho t\ dI_{xyA} = \frac{1}{8}\rho R^4\ dz$$

Por tanto,

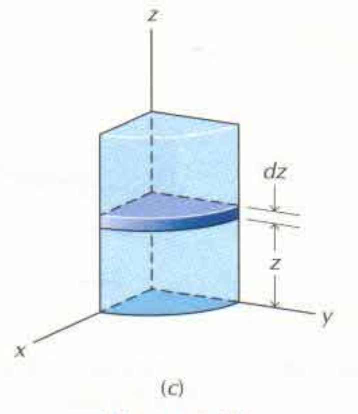
$$I_{xym} = \rho t \int_A dI_{xyA} = \int_0^h \frac{1}{8}\rho R^4\ dz = \frac{1}{8}\rho R^4 h$$



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Figura A-10

Como la masa del cuerpo es

$$m = \rho V = \rho\left(\frac{1}{4}\pi R^2 h\right) = \frac{1}{4}\rho\pi R^2 h$$

el producto de inercia I_{xy} podrá escribirse en la forma

$$I_{xy} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{4}\rho\pi R^2 h\right)R^2 = \frac{1}{2\pi}\, mR^2 \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMA EJEMPLO A.5

Determinar los productos de inercia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} de la placa horadada homogénea de acero ($\rho = 7870$ kg/m^3) representada en la figura A-11. El orificio está situado en el centro de la placa.

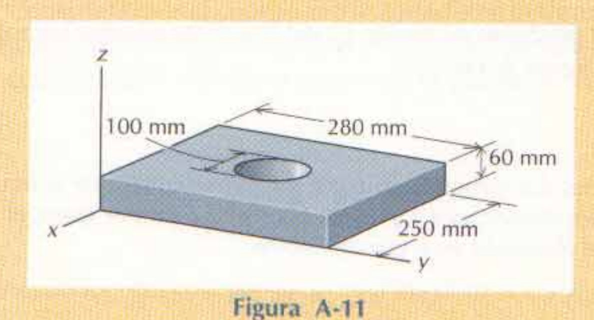


Figura A-11

SOLUCIÓN

Los productos de inercia para los planos de simetría que pasen por los centros de masa de la placa y del orificio, son nulos. Como los planos xy, yz y zx representados en la figura A-11 son paralelos a dichos planos de simetría, para determinar los productos de inercia pedidos podremos utilizar el teorema de Steiner (ecs. A-11). Las masas de placa, orificio y placa horadada son

$$m_P = \rho V = \rho bht = 7870(0{,}280)(0{,}250)(0{,}060) = 33{,}05 \text{ kg}$$

$$m_H = \rho V = \rho\pi R^2 t = 7870\pi(0{,}050)^2(0{,}060) = 3{,}71 \text{ kg}$$

$$m_W = m_P - m_H = 33{,}05 - 3{,}71 = 29{,}34 \text{ kg}$$

Según las ecuaciones A-11,

$$I_{xy} = I_{xyG} + \bar{x}\bar{y}m$$
$$= 0 + (-0{,}125)(0{,}140)(29{,}34) = -0{,}513 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \qquad \text{Resp.}$$

$$I_{yz} = I_{yzG} + \bar{y}\bar{z}m$$
$$= 0 + (0{,}140)(0{,}030)(29{,}34) = 0{,}1232 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \qquad \text{Resp.}$$

$$I_{zx} = I_{zxG} + \bar{z}\bar{x}m$$
$$= 0 + (0{,}030)(-0{,}125)(29{,}34) = -0{,}1100 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \qquad \text{Resp.}$$

PROBLEMAS

A-35* Determinar el producto de inercia I_{xy} del bloque rectangular homogéneo representado en la figura PA-35.

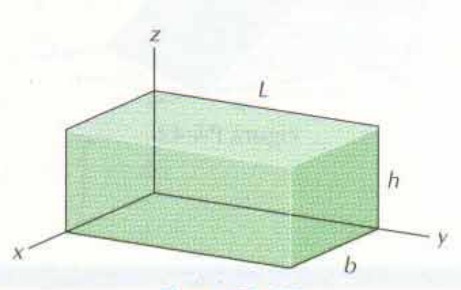


Figura PA-35

A-36* Determinar el producto de inercia I_{xy} del octante de esfera homogéneo representado en la figura PA-36.

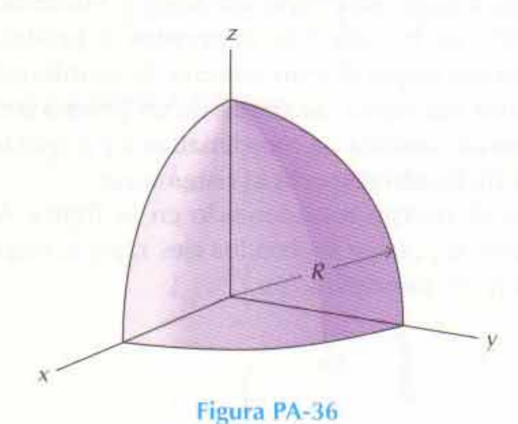


Figura PA-36

A-37 Determinar los productos de inercia I_{xy} e I_{yz} del bloque triangular homogéneo representado en la figura PA-37.

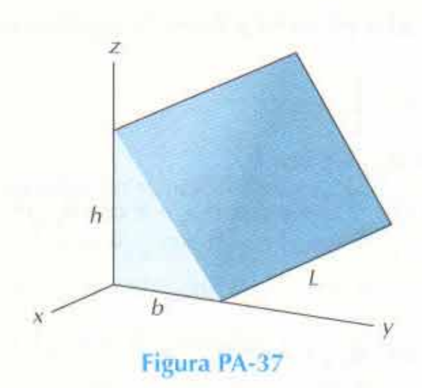


Figura PA-37

A-38 Determinar los productos de inercia I_{yz} e I_{zx} del semicilindro homogéneo representado en la figura PA-38.

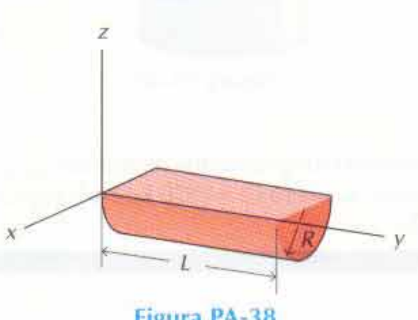


Figura PA-38

A-39* Determinar los productos de inercia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} del ángulo homogéneo de acero ($w = 77$ kN/m^3) representado en la figura PA-39.

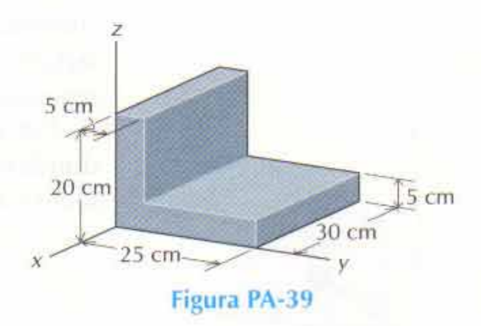


Figura PA-39

A-40* Determinar los productos de inercia I_{xy} e I_{zx} del cuarto de cono de revolución homogéneo representado en la figura PA-40.

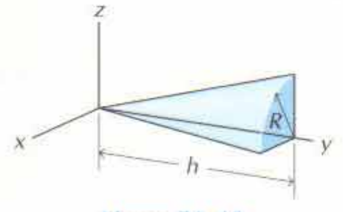


Figura PA-40

A-41 Determinar los productos de inercia I_{yz} e I_{zx} del cuerpo homogéneo representado en la figura PA-41.

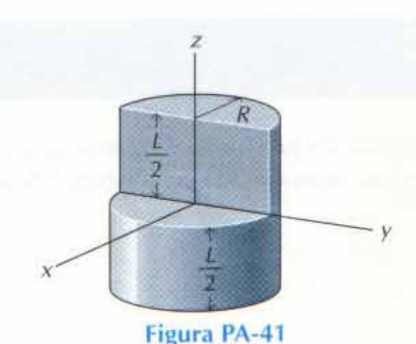


Figura PA-41

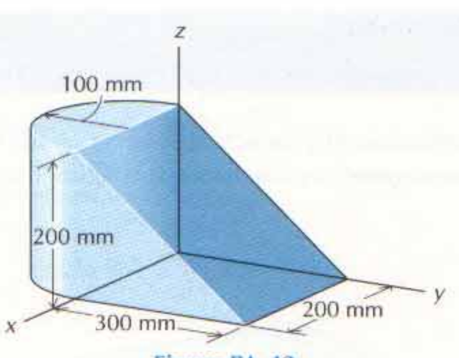


Figura PA-42

A-42 Determinar los productos de inercia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} del bloque homogéneo de acero ($\rho = 7870$ kg/m^3) representado en la figura PA-42.

A.3 MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA

En algunos casos, en el análisis dinámico de cuerpos, hay que determinar ejes principales de inercia y momentos de inercia máximos y mínimos, que son semejantes a los momentos segundos de superficie máximos y mínimos. También ahora, el problema estriba en transformar momentos y productos de inercia conocidos o de fácil cálculo respecto a un sistema de coordenadas (tal como un sistema de coordenadas xyz según las aristas de un prisma rectangular) en otros relativos a un segundo sistema de coordenadas $x'y'z'$ que tenga el mismo origen O pero que está inclinado respecto al sistema xyz.

Por ejemplo, consideremos el cuerpo representado en la figura A-12 en donde el eje x' forma los ángulos $\theta_{x'x}$, $\theta_{x'y}$ y $\theta_{x'z}$ con los ejes x, y y z, respectivamente. El momento de inercia $I_{x'}$ es, por definición,

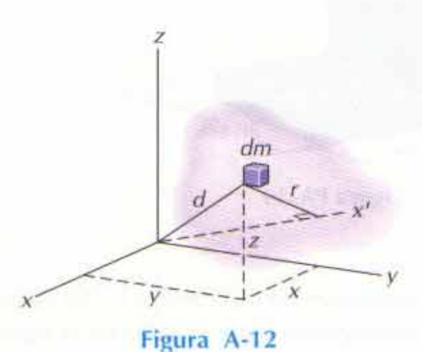


Figura A-12

$$I_{x'} = \int_m r^2\, dm$$

La distancia d del elemento dm al origen de coordenadas viene dada por la expresión

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = x'^2 + t^2$$

Por tanto,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - x'^2$$

y como

$$x' = x \cos \theta_{x'x} + y \cos \theta_{x'y} + z \cos \theta_{x'z}$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \theta_{x'x} + y \cos \theta_{x'y} + z \cos \theta_{x'z})^2$$

Teniendo presente que

$$\cos^2 \theta_{x'x} + \cos^2 \theta_{x'y} + \cos^2 \theta_{x'z} = 1$$

se puede escribir

$$r^2 = (x^2+y^2+z^2)(\cos^2\theta_{x'x}+\cos^2\theta_{x'y}+\cos^2\theta_{x'z}) \\ -(x\cos\theta_{x'z}+y\cos\theta_{z'y}+z\cos\theta_{x'z})^2$$

que se reduce a

$$r^2 = (y^2+z^2)\cos^2\theta_{x'x}+(z^2+x^2)\cos^2\theta_{x'y}+(x^2+y^2)\cos^2\theta_{x'z} \\ -2xy\cos\theta_{x'x}\cos\theta_{x'y}-2yz\cos\theta_{x'y}\cos\theta_{x'z}-2zx\cos\theta_{x'z}\cos\theta_{x'x}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \int_m r^2\,dm \\ &= \cos^2\theta_{x'x}\int_m (y^2+z^2)\,dm+\cos^2\theta_{x'y}\int_m (z^2+x^2)\,dm \\ &\quad+\cos^2\theta_{x'z}\int_m (x^2+y^2)\,dm-\cos\theta_{x'x}\cos\theta_{x'y}\int_m 2xy\,dm \\ &\quad+\cos\theta_{x'y}\cos\theta_{x'z}\int_m 2yz\,dm-\cos\theta_{x'z}\cos\theta_{x'x}\int_m 2zx\,dm \end{aligned}$$

De las ecuaciones A-2 y A-9

$$I_x = \int_m (y^2+z^2)\,dm \qquad I_{xy} = \int_m xy\,dm$$

$$I_y = \int_m (z^2+x^2)\,dm \qquad I_{yz} = \int_m yz\,dm$$

$$I_z = \int_m (x^2+y^2)\,dm \qquad I_{zx} = \int_m zx\,dm$$

Por tanto,

$$I_{x'} = I_x\cos^2\theta_{x'x}+I_y\cos^2\theta_{x'y}+I_z\cos^2\theta_{x'z}-2I_{xy}\cos\theta_{x'x}\cos\theta_{x'y} \\ -2I_{yz}\cos\theta_{x'y}\cos\theta_{x'z}-2I_{zx}\cos\theta_{x'z}\cos\theta_{x'x} \qquad \textbf{(A-12}\textbf{\textit{a}}\textbf{)}$$

De manera análoga, el producto de inercia

$$I_{x'y'} = \int_m x'y'\,dm$$

se puede escribir en función de I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} en la forma

$$\begin{aligned} I_{x'y'} &= -I_x\cos\theta_{x'x}\cos\theta_{y'x}-I_y\cos\theta_{x'y}\cos\theta_{y'y}-I_z\cos\theta_{x'z}\cos\theta_{y'z} \\ &\quad+I_{xy}(\cos\theta_{x'x}\cos\theta_{y'y}+\cos\theta_{x'y}\cos\theta_{y'x}) \\ &\quad+I_{yz}(\cos\theta_{x'y}\cos\theta_{y'z}+\cos\theta_{x'z}\cos\theta_{y'y}) \\ &\quad+I_{zx}(\cos\theta_{x'z}\cos\theta_{y'x}+\cos\theta_{x'x}\cos\theta_{y'z}) \qquad \textbf{(A-12}\textbf{\textit{b}}\textbf{)} \end{aligned}$$

Si los ejes *xyz* originales son ejes principales (como los representados en las figuras de la tabla B-5),

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$$

y las ecuaciones A-12 se reducen a

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \theta_{x'x} + I_y \cos^2 \theta_{x'y} + I_z \cos^2 \theta_{x'z} \qquad \text{(A-13}a\text{)}$$

y

$$\begin{aligned} I_{x'y'} = &- I_x \cos \theta_{x'x} \cos \theta_{y'x} - I_y \cos \theta_{x'y} \cos \theta_{y'y} \\ &- I_z \cos \theta_{x'z} \cos \theta_{y'z} \end{aligned} \qquad \text{(A-13}b\text{)}$$

La ecuación A-12*a* para los momentos de inercia es la equivalente tridimensional de la ecuación 10-14 para los segundos momentos de superficie. Utilizando un método similar, si bien mucho más complicado, al utilizado con la ecuación 10-14 para localizar los ejes principales y determinar los segundos momentos de superficie máximos y mínimos, se pueden localizar los ejes principales y determinar los momentos de inercia máximo y mínimo. El método conduce a las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} (I_x - I_p) \cos \theta_{Px} - I_{xy} \cos \theta_{Py} - I_{zx} \cos \theta_{Pz} &= 0 \\ (I_y - I_p) \cos \theta_{Py} - I_{yz} \cos \theta_{Pz} - I_{xy} \cos \theta_{Px} &= 0 \\ (I_z - I_p) \cos \theta_{Pz} - I_{zx} \cos \theta_{Px} - I_{yz} \cos \theta_{Py} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(A-14)}$$

Este sistema de ecuaciones tendrá solución no trivial si es nulo el determinante de los coeficientes de los cosenos directores. El desarrollo del determinante conduce a la siguiente ecuación cúbica para determinar los momentos principales de inercia del cuerpo correspondientes al origen de coordenadas particular que se utiliza:

$$\begin{aligned} I_P^3 - (I_x + I_y + I_z) I_P^2 + (I_x I_y + I_y I_z + I_z I_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2) I_P \\ - (I_x I_y I_z - I_x I_{yz}^2 - I_y I_{zx}^2 - I_z I_{xy}^2 - 2 I_{xy} I_{yz} I_{zx}) = 0 \end{aligned} \qquad \text{(A-15)}$$

La ecuación A-15 nos da tres valores I_1, I_2 e I_3 para los momentos principales de inercia. Uno de ellos es el momento de inercia máximo del cuerpo para el origen de coordenadas que se utiliza, un segundo valor es el momento de inercia mínimo del cuerpo para el mencionado origen de coordenadas y el tercer valor es un momento de inercia intermedio que no tiene un significado especial.

Los cosenos directores de los ejes principales de inercia se pueden obtener aplicando en las ecuaciones A-14 los tres valores I_1, I_2 e I_3 que se obtienen de la ecuación A-15 y utilizando la relación adicional

$$\cos^2 \theta_{Px} + \cos^2 \theta_{Py} + \cos^2 \theta_{Pz} = 1$$

Las ecuaciones A-14 y A-15 son válidas para cuerpos de forma cualquiera. En el ejemplo que sigue se ilustra el método para localizar los ejes principales y determinar los momentos de inercia máximo y mínimo.

PROBLEMA EJEMPLO A.6

Localizar los ejes principales y determinar los momentos de inercia máximo y mínimo del bloque rectangular de acero ($\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$) representado en la figura A-13.

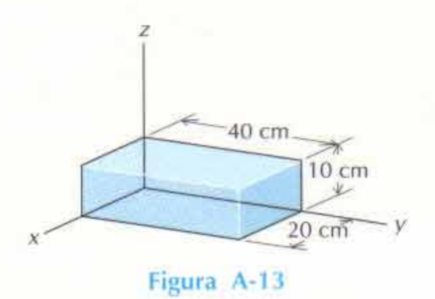


Figura A-13

SOLUCIÓN

Los momentos y productos de inercia del bloque vienen dados por las ecuaciones A-4 y A-11:

$$I_x = I_{xG} + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)\,m \qquad I_{xy} = I_{xyG} + \bar{x}\bar{y}m$$
$$I_y = I_{yG} + (\bar{z}^2 + \bar{x}^2)\,m \qquad I_{yz} = I_{yzG} + \bar{y}\bar{z}m$$
$$I_z = I_{zG} + (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\,m \qquad I_{zx} = I_{zxG} + \bar{z}\bar{x}m$$

La masa del bloque es

$$m = \rho V = 7850(0{,}20)(0{,}10)(0{,}40) = 62{,}80 \text{ kg}$$

Así pues, según los resultados consignados en la tabla B-5,

$$I_x = \frac{1}{12}m(b^2+h^2) + \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]m$$
$$= \frac{1}{3}(b^2+h^2) = \frac{1}{3}(62{,}80)\,[\,(0{,}20)^2 + (0{,}10)^2\,] = 1{,}047 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_y = \frac{1}{12}m(b^2+L^2) + \left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right]m$$
$$= \frac{1}{3}(b^2+L^2) = \frac{1}{3}(62{,}80)\,[\,(0{,}20)^2 + (0{,}40)^2\,] = 4{,}187 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_z = \frac{1}{12}m(h^2+L^2) + \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right]m$$
$$= \frac{1}{3}(h^2+L^2) = \frac{1}{3}(62{,}80)\,[\,(0{,}10)^2 + (0{,}40)^2\,] = 3{,}559 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_{xy} = 0 + \left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{h}{2}\right)m = \frac{1}{4}mLh = \frac{1}{4}(62{,}80)\,(0{,}40)\,(0{,}10) = 0{,}628 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_{yz} = 0 + \left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)m = \frac{1}{4}mhb = \frac{1}{4}(62{,}80)\,(0{,}10)\,(0{,}20) = 0{,}314 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_{zx} = 0 + \left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)m = \frac{1}{4}mbL = \frac{1}{4}(62{,}80)\,(0{,}20)\,(0{,}40) = 1{,}256 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Una vez determinados los momentos y productos de inercia, se podrán determinar los momentos de inercia principales mediante la ecuación A-15. Así,

$$I_P^3 - (I_x + I_y + I_z)\,I_P^2 + (I_xI_y + I_yI_z + I_zI_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)\,I_P$$
$$-(I_xI_yI_z - I_xI_{yz}^2 - I_yI_{xy}^2 - 2I_{xy}I_{yz}I_{zx}) = 0$$

Sustituyendo por los valores de los momentos y productos de inercia, se tiene

$$I_P^3 - (8{,}793I_P^2 + 20{,}94I_P - 6{,}995) = 0$$

cuya solución es

$$I_1 = I_{máx} = 4{,}331 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad \text{Resp.}$$
$$I_2 = I_{int} = 4{,}064 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_3 = I_{mín} = 0{,}399 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad \text{Resp.}$$

Las direcciones principales se obtienen aplicando en las ecuaciones A-14, uno tras otro, los momentos principales. Tomando $I_P = I_1 = I_{máx} = 4{,}331 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$:

$$(I_x - I_P) \cos \theta_{Px} - I_{xy} \cos \theta_{Py} - I_{zx} \cos \theta_{Pz} = 0$$
$$(I_y - I_P) \cos \theta_{Py} - I_{yz} \cos \theta_{Pz} - I_{xy} \cos \theta_{Px} = 0$$
$$(I_z - I_P) \cos \theta_{Pz} - I_{zx} \cos \theta_{Px} - I_{yz} \cos \theta_{Py} = 0$$
$$-3{,}284 \cos \theta_{1x} - 0{,}628 \cos \theta_{1y} - 1{,}256 \cos \theta_{1z} = 0$$
$$-0{,}628 \cos \theta_{1x} - 0{,}144 \cos \theta_{1y} - 0{,}314 \cos \theta_{1z} = 0 \qquad (a)$$
$$-0{,}256 \cos \theta_{1x} - 0{,}314 \cos \theta_{1y} - 0{,}772 \cos \theta_{1z} = 0$$

Las ecuaciones *a*, junto con la relación que guardan los cosenos directores

$$\cos^2 \theta_{1x} + \cos^2 \theta_{1y} + \cos^2 \theta_{1z} = 1$$

dan por solución

$$\cos \theta_{1x} = 0{,}0912 \quad \text{o sea} \quad \theta_{1x} = 84{,}8°$$
$$\cos \theta_{1y} = -0{,}9652 \quad \text{o sea} \quad \theta_{1y} = 164{,}8° \qquad \text{Resp.}$$
$$\cos \theta_{1z} = 0{,}2443 \quad \text{o sea} \quad \theta_{1x} = 75{,}9°$$

Tomando $I_P = I_2 = I_{int} = 4{,}064 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$:

$$-3{,}017 \cos \theta_{2x} - 0{,}620 \cos \theta_{2y} - 0{,}256 \cos \theta_{2z} = 0$$
$$-0{,}628 \cos \theta_{2x} + 0{,}123 \cos \theta_{2y} - 0{,}314 \cos \theta_{2z} = 0$$
$$-1{,}256 \cos \theta_{2x} - 0{,}314 \cos \theta_{2y} - 0{,}505 \cos \theta_{2z} = 0$$
$$\cos^2 \theta_{2x} + \cos^2 \theta_{2y} + \cos^2 \theta_{2z} = 1$$

dan por solución

$$\cos \theta_{2x} = -0{,}4189 \quad \text{o sea} \quad \theta_{2x} = 114{,}8°$$
$$\cos \theta_{2y} = 0{,}1779 \quad \text{o sea} \quad \theta_{2x} = 79{,}8° \qquad \text{Resp.}$$
$$\cos \theta_{2z} = 0{,}8591 \quad \text{o sea} \quad \theta_{2z} = 30{,}8°$$

Tomando $I_P = I_3 = I_{mín} = 0{,}3985 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$:

$$0{,}649 \cos \theta_{3x} - 0{,}628 \cos \theta_{3y} - 1{,}256 \cos \theta_{3z} = 0$$
$$-0{,}628 \cos \theta_{3x} + 3{,}789 \cos \theta_{3y} - 0{,}314 \cos \theta_{3z} = 0$$
$$-1{,}256 \cos \theta_{3x} - 0{,}314 \cos \theta_{3y} + 3{,}161 \cos \theta_{3z} = 0$$
$$\cos^2 \theta_{3x} + \cos^2 \theta_{3y} + \cos^2 \theta_{3z} = 1$$

dan por solución

$$\cos\theta_{3x} = 0{,}9077 \quad \text{o sea} \quad \theta_{3x} = 24{,}8°$$
$$\cos\theta_{3y} = 0{,}1815 \quad \text{o sea} \quad \theta_{3y} = 79{,}8° \qquad \text{Resp.}$$
$$\cos\theta_{3z} = 0{,}3782 \quad \text{o sea} \quad \theta_{3z} = 67{,}8°$$

Así pues, los vectores unitarios asociados a las tres direcciones principales son

$$\mathbf{n}_1 = 0{,}0912\mathbf{i} - 0{,}9652\mathbf{j} + 0{,}2243\mathbf{k} \qquad \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$$
$$\mathbf{n}_2 = -0{,}4189\mathbf{i} + 0{,}1779\mathbf{j} + 0{,}8591\mathbf{k} \qquad \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = 0$$
$$\mathbf{n}_3 = 0{,}9077\mathbf{i} + 0{,}1815\mathbf{j} + 0{,}3782\mathbf{k} \qquad \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}_1 = 0$$

lo que verifica que los tres ejes principales son ortogonales entre sí.

PROBLEMAS

A-43* Localizar los ejes principales y determinar los momentos de inercia máximo y mínimo del prisma triangular de acero ($\rho = 7850$ kg/m^3) representado en la figura PA-37 (pág. 517) si $b = 20$ cm, $h = 15$ cm y $L = 25$ cm.

A-44* Localizar los ejes principales y determinar los momentos de inercia máximo y mínimo del semicilindro de acero ($\rho = 7870$ kg/m^3) representado en la figura PA-38 (pág. 517) si $R = 100$ mm y $L = 150$ mm.

A-45 Localizar los ejes principales y determinar los momentos de inercia máximo y mínimo del ángulo de acero ($\rho = 7850$ kg/m^3) representado en la figura PA-39.

A-46* Localizar los ejes principales y determinar los momentos de inercia máximo y mínimo de la placa horadada de acero ($\rho = 7870$ kg/m^3) representada en la figura PA-11 (pág. 508).

A-47 Localizar los ejes principales y determinar los momentos de inercia máximo y mínimo del cilindro de aluminio ($\rho = 2800$ kg/m^3) representado en la figura PA-41 (pág. 518) si $R = 10$ cm y $L = 15$ cm.

A-48* Localizar los ejes principales y determinar los momentos de inercia máximo y mínimo del bloque de latón ($\rho = 8750$ kg/m^3) representado en la figura PA-42 (pág. 518).

A-49 Localizar los ejes principales y determinar los momentos de inercia máximo y mínimo del tetraedro de hierro colado ($\rho = 7370$ kg/m^3) representado en la figura PA-10 (pág. 508) si $a = 15$ cm, $b = 20$ cm y $c = 25$ cm.

A-50 Localizar los ejes principales y determinar los momentos de inercia máximo y mínimo de la esfera de latón ($\rho = 8750$ kg/m^3) representada en la figura PA-50. El radio de la esfera vale 200 mm. La superficie de la esfera es tangente a los tres planos de coordenadas.

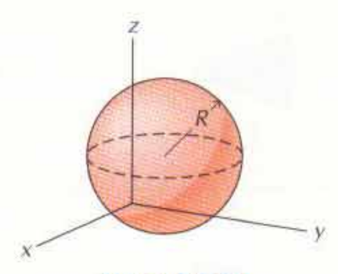
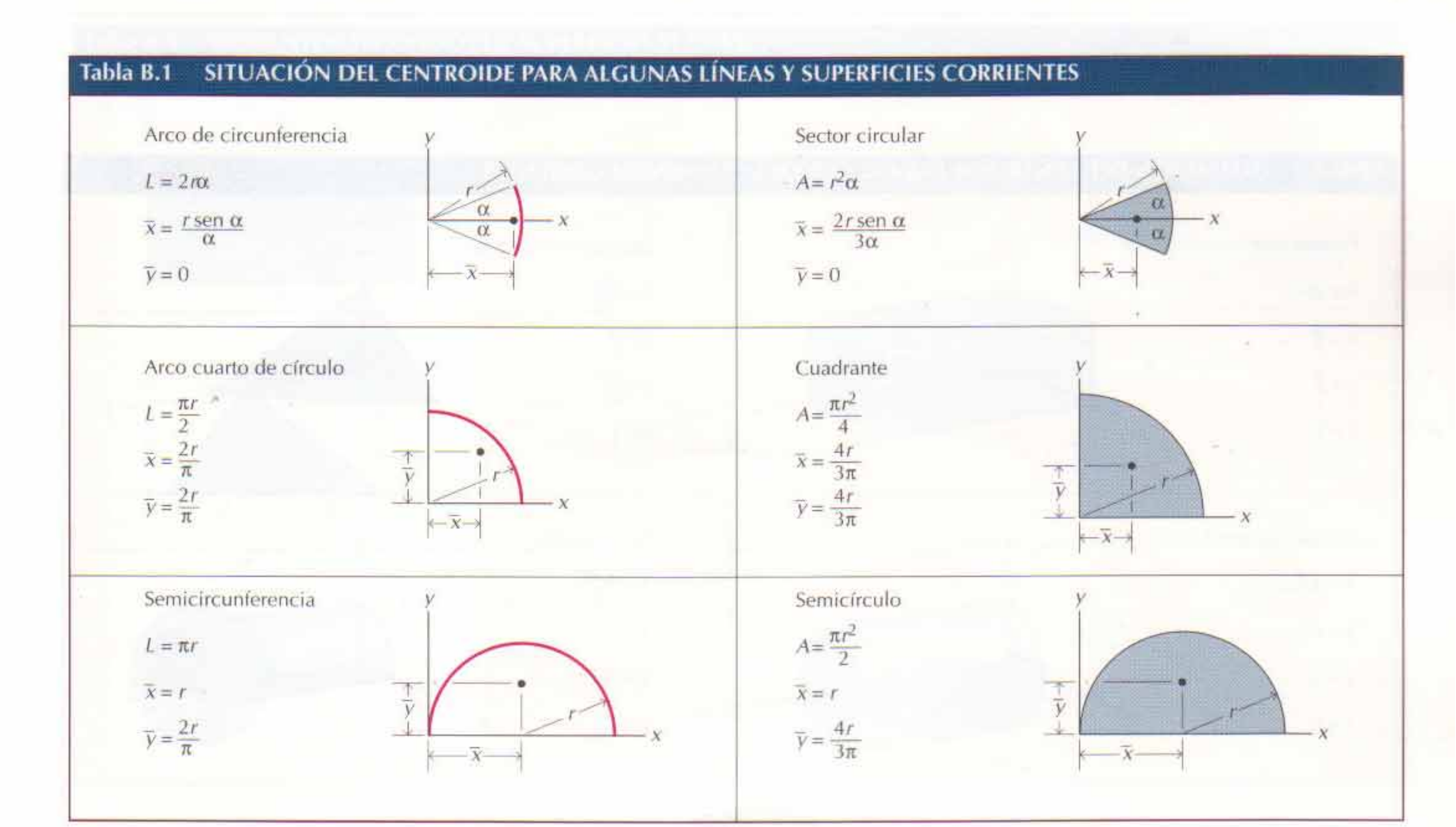


Figura PA-50

APÉNDICE B

CENTROIDES
CENTROS DE MASA
MOMENTOS SEGUNDOS DE SUPERFICIES PLANAS
MOMENTOS DE INERCIA

Tabla B.1 SITUACIÓN DEL CENTROIDE PARA ALGUNAS LÍNEAS Y SUPERFICIES CORRIENTES



Arco de circunferencia $L = 2r\alpha$ $\bar{x} = \dfrac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$ $\bar{y} = 0$	Sector circular $A = r^2\alpha$ $\bar{x} = \dfrac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$ $\bar{y} = 0$
Arco cuarto de círculo $L = \dfrac{\pi r}{2}$ $\bar{x} = \dfrac{2r}{\pi}$ $\bar{y} = \dfrac{2r}{\pi}$	Cuadrante $A = \dfrac{\pi r^2}{4}$ $\bar{x} = \dfrac{4r}{3\pi}$ $\bar{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$
Semicircunferencia $L = \pi r$ $\bar{x} = r$ $\bar{y} = \dfrac{2r}{\pi}$	Semicírculo $A = \dfrac{\pi r^2}{2}$ $\bar{x} = r$ $\bar{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$

Tabla B.1 SITUACIÓN DEL CENTROIDE PARA ALGUNAS LINEAS Y SUPERFICIES CORRIENTES (continuación)



Superficie rectangular

$A = bh$

$\bar{x} = \dfrac{b}{2}$

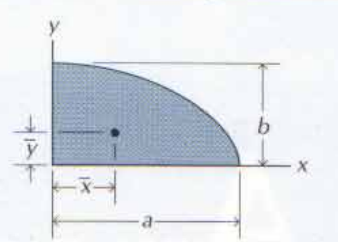
$\bar{y} = \dfrac{h}{2}$

Cuadrante de elipse

$A = \dfrac{\pi ab}{4}$

$\bar{x} = \dfrac{4a}{3\pi}$

$\bar{y} = \dfrac{4b}{3\pi}$

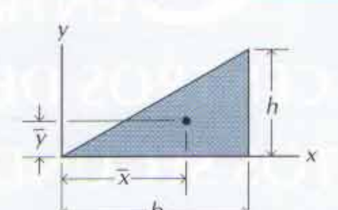


Superficie triangular

$A = \dfrac{bh}{2}$

$\bar{x} = \dfrac{2b}{3}$

$\bar{y} = \dfrac{h}{3}$

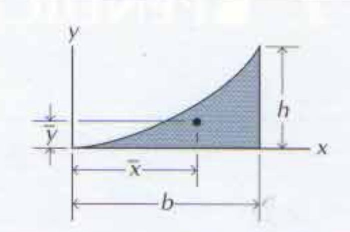


Enjuta parabólica

$A = \dfrac{bh}{3}$

$\bar{x} = \dfrac{3b}{4}$

$\bar{y} = \dfrac{3h}{10}$

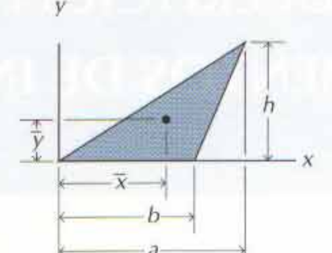


Superficie triangular

$A = \dfrac{bh}{2}$

$\bar{x} = \dfrac{a+b}{3}$

$\bar{y} = \dfrac{h}{3}$



Cuadrante de parábola

$A = \dfrac{2bh}{3}$

$\bar{x} = \dfrac{5b}{8}$

$\bar{y} = \dfrac{2h}{5}$

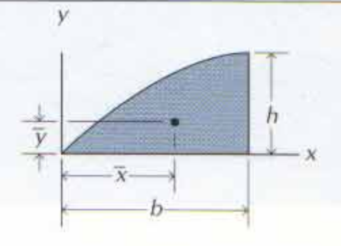


Tabla B.2 SITUACIÓN DEL CENTROIDE PARA ALGUNOS VOLÚMENES CORRIENTES

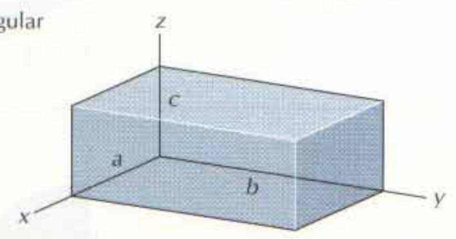
Paralelepípedo rectangular

$V = abc$

$\bar{x} = \dfrac{a}{2}$

$\bar{y} = \dfrac{b}{2}$

$\bar{z} = \dfrac{c}{2}$



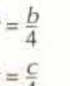
Tetraedro rectangular

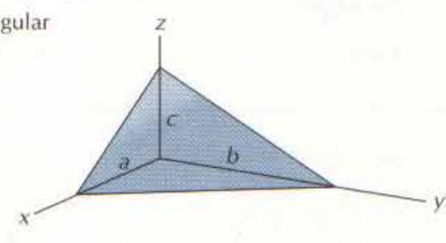
$V = \dfrac{abc}{6}$

$\bar{x} = \dfrac{a}{4}$

$\bar{y} = \dfrac{b}{4}$

$\bar{z} = \dfrac{c}{4}$





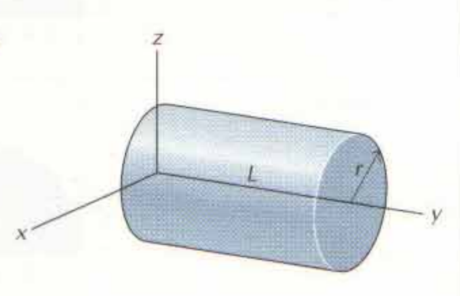
Cilindro de revolución

$V = \pi r^2 L$

$\bar{x} = 0$

$\bar{y} = \dfrac{L}{2}$

$\bar{z} = 0$



Semicilindro

$V = \dfrac{\pi r^2 L}{2}$

$\bar{x} = 0$

$\bar{y} = \dfrac{L}{2}$

$\bar{z} = \dfrac{4r}{3\pi}$

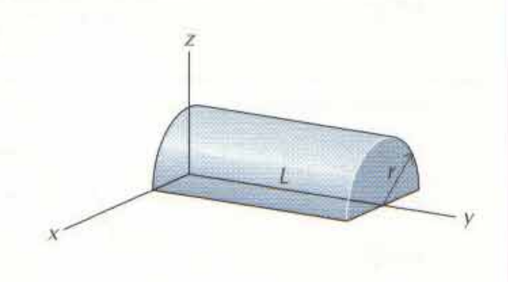


Tabla B.2 SITUACIÓN DEL CENTROIDE PARA ALGUNOS VOLÚMENES CORRIENTES (continuación)

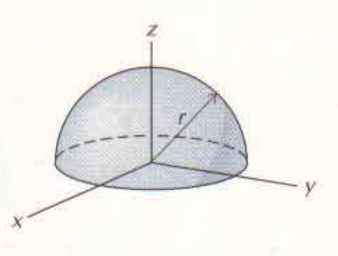
Semiesfera

$V = \frac{2\pi r^3}{3}$

$\bar{x} = 0$

$\bar{y} = 0$

$\bar{z} = \frac{3r}{8}$



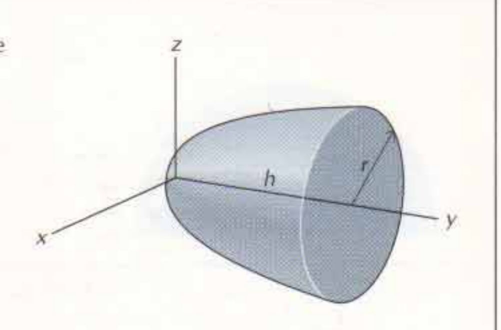
Paraboloide

$V = \frac{\pi r^2 h}{2}$

$\bar{x} = 0$

$\bar{y} = \frac{2h}{3}$

$\bar{z} = 0$



Cono de revolución

$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

$\bar{x} = 0$

$\bar{y} = \frac{3h}{4}$

$\bar{z} = 0$

Semicono

$V = \frac{\pi r^2 h}{6}$

$\bar{x} = 0$

$\bar{y} = \frac{3h}{4}$

$\bar{z} = \frac{r}{\pi}$

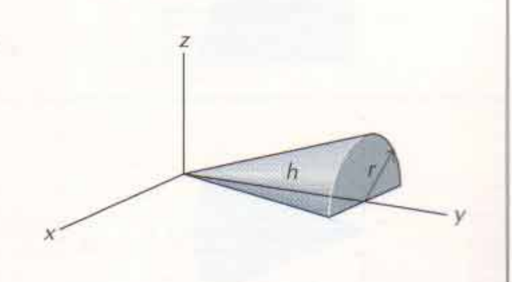


Tabla B.3 MOMENTOS SEGUNDOS DE SUPERFICIES PLANAS

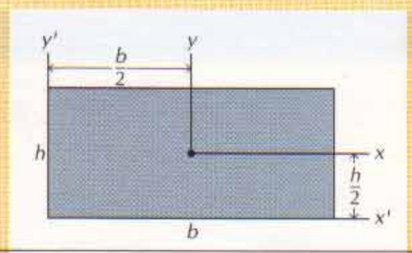
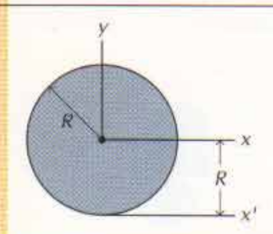
	$I_x = \frac{bh^3}{12}$	$I_{x'} = \frac{bh^3}{3}$ $A = bh$
	$I_x = \frac{bh^3}{36}$	$I_{x'} = \frac{bh^3}{12}$ $A = \frac{1}{2}bh$
	$I_x = \frac{\pi R^4}{4}$	$I_{x'} = \frac{5\pi R^4}{4}$ $A = \pi R^2$

Tabla B.3 MOMENTOS SEGUNDOS DE SUPERFICIES PLANAS (continuación)

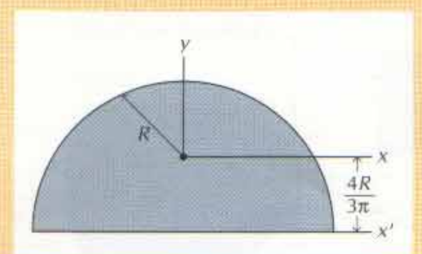
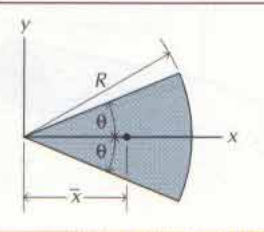
	$I_x = \dfrac{\pi R^4}{8} - \dfrac{8R^4}{9\pi}$ $I_y = \dfrac{\pi R^4}{8}$	$I_{x'} = \dfrac{\pi R^4}{8}$ $A = \dfrac{1}{2}\pi R^2$
	$I_x = \dfrac{\pi R^4}{16} - \dfrac{8R^4}{9\pi}$	$I_{x'} = \dfrac{\pi R^4}{16}$ $A = \dfrac{1}{4}\pi R^2$
	$I_x = \dfrac{R^4}{4}\left(\theta - \dfrac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta\right)$ $I_y = \dfrac{R^4}{4}\left(\theta + \dfrac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta\right)$	$\bar{x} = \dfrac{2}{3}\dfrac{R\,\text{sen}\,\theta}{\theta}$ $A = \theta R^2$

Tabla B.4 MOMENTOS SEGUNDOS MIXTOS DE SUPERFICIES PLANAS

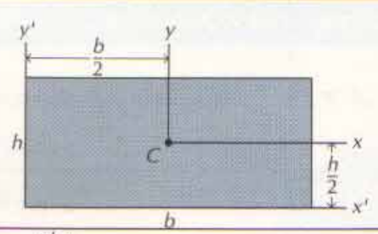
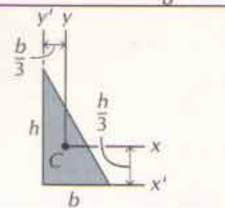
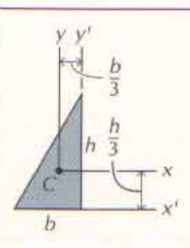
	$I_{xy} = 0$	$I_{x'y'} = \dfrac{b^2h^2}{4}$
	$I_{xy} = -\dfrac{b^2h^2}{72}$	$I_{x'y'} = \dfrac{b^2h^2}{24}$
	$I_{xy} = \dfrac{b^2h^2}{72}$	$I_{x'y'} = -\dfrac{b^2h^2}{24}$

Tabla B.4	MOMENTOS SEGUNDOS MIXTOS DE SUPERFICIES PALANAS (continuación)	
	$I_{xy} = \frac{(9\pi - 32)R^4}{72\pi}$	$I_{x'y'} = \frac{R^4}{8}$
	$I_{xy} = -\frac{(9\pi - 32)R^4}{72\pi}$	$I_{x'y'} = -\frac{R^4}{8}$
	$I_{xy} = 0$	$I_{x'y'} = \frac{2R^4}{3}$

Tabla B.5	MOMENTOS DE INERCIA DE FIGURAS CORRIENTES	
	Varilla	$I_x = 0$ $I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$
	Placa rectangular	$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + h^2)$ $I_y = \frac{1}{12}mb^2$ $I_z = \frac{1}{12}mh^2$
	Placa circular	$I_x = \frac{1}{2}mR^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4}mR$

Tabla B.5 MOMENTOS DE INERCIA DE FIGURAS CORRIENTES (continuación)

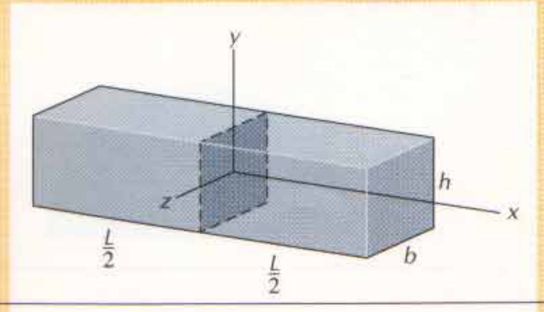
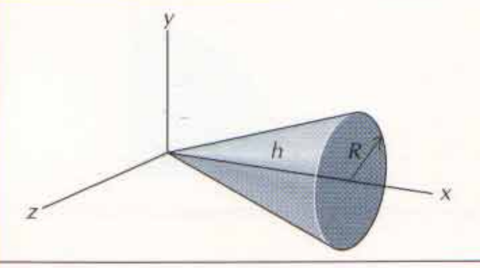
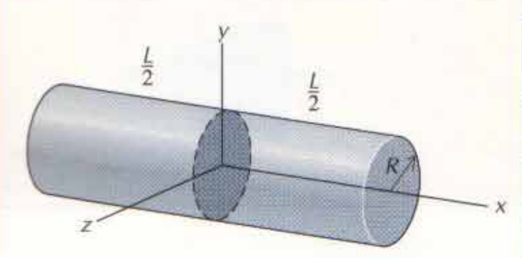
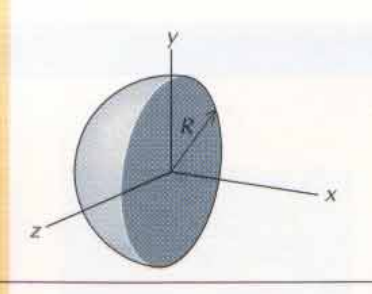
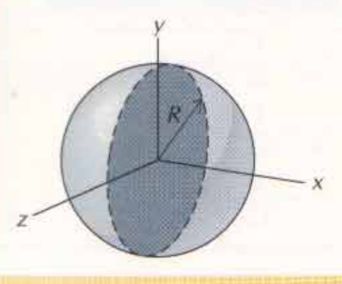
	Prisma rectangular $V = bhL$ $I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + h^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m(b^2 + L^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m(h^2 + L^2)$
	Cono de revolución $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ $\bar{x} = \frac{3}{4}h$ $I_x = \frac{3}{10}mR^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{20}m(R^2 + 4h^2)$ $I_{yG} = I_{xG} = \frac{3}{80}m(4R^2 + h^2)$
	Cilindro de revolución $V = \pi R^2 L$ $I_x = \frac{1}{2}mR^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3R^2 + L^2)$
	Semiesfera $V = \frac{2}{3}\pi R^3$ $\bar{x} = \frac{3}{8}R$ $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mR^2$ $I_{yG} = I_{zG} = \frac{83}{320}mR^2$
	Esfera $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mR^2$

Tabla B.6 DENSIDAD ρ DE ALGUNOS MATERIALES	kg/m^3	$slug/ft^3$
Sólidos		
Acero	7870	15,21
Aluminio	2770	5,35
Cobre	8910	17,21
Hierro colado	7370	14,24
Hormigón	2410	4,66
Latón	8750	16,91
Madera (pino blando)	480	0,93
(roble duro)	800	1,55
Oro	19 300	37,29
Plomo	11 370	21,97
Tierra (húmeda)	1760	3,40
(seca)	1280	2,47
Vidrio	2590	5,00
Líquidos		
Aceite	900	1,74
Agua (dulce)	1000	1,94
(salada)	1030	1,99
Hielo	900	1,74
Mercurio	13 570	26,22
Gases		
Aire	1,225	$2{,}377(10^{-3})$

Tabla B.7 FACTORES DE CONVERSIÓN Y DEFINICIONES

Longitud
- 1 ft= 12 in.
- 1 mi = 5280 ft
- 1 milla marina = 6080 ft
- 1 in. = 25,40 mm
- 1 mi =1, 609 km

Volumen
- 1 cup = 8 fl oz (fluid ounce, onza líquida)
- 1 pint (pinta) = 2 cup = 16 fl oz
- 1 quart (cuarto de galón)= 2 pint = 32 fl oz
- 1 gal (galón) = 4 quart = 231 $in.^3$
- 1 ft^3= 7,48 gal
- 1 barril (petróleo) = 42 gal
- 1 litro = $10^{-3}m^3$

Masa
- 1 tonelada métrica = 1000 kg
- 1 slug = 14,59 kg

Fuerza
- 1 lb = 16 oz
- 1 kip (kilo-pound, kilolibra) = 1000 lb
- 1 ton = 2000 lb
- 1 lb = 4,448 Newton

Energía
- 1 BTU (British Thermal Unit) = 778 ft · lb

Potencia
- 1 hp (caballo de vapor) = 530 ft · lb/s
- 1 ft · lb/ s =1,356 watt

Tabla B.8 DATOS ASTRONÓMICOS

Constante de Gravitación Universal		
$G = 6{,}673\ (10^{-11})\text{m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2) = 3{,}439\ (10^{-8})\ \text{ft}^4/(\text{lb}\cdot\text{s}^4)$		
Sol		
Masa	$1{,}990(10^{30})$kg	$1{,}364(10^{29})\ \text{lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft}$
Radio medio	696 000 km	432 000 mi
Tierra		
Masa	$5{,}976(10^{24})$ kg	$4{,}095(10^{23})\ \text{lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft}$
Radio medio	6370 km	3960 mi
Periodo de rotación	23,93 h	
Luna		
Masa	$7{,}350(10^{22})$kg	$5{,}037(10^{21})\ \text{lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft}$
Radio medio	1740 km	1080 mi
Distancia media a la Tierra (entre centros)	384 000 km	239 000 mi
Excentricidad (e)	0,055	
Sistema Solar		

Planeta	Distancia media al Sol U.A.[a]	e	Diámetro medio (relativo a la Tierra)	Masa (relativa a la Tierra)
Mercurio	0,387	0,206	0,380	0,05
Venus	0,723	0,007	0,975	0,81
La Tierra	1,000	0,017	1,000	1,00
Marte	1,524	0,093	0,532	0,11
Júpiter	5,203	0,048	11,27	317,8
Saturno	9,539	0,056	9,49	95,2

[a] La Unidad Astronómica (U.A.) es igual a la distancia media de la Tierra al Sol = $149{,}6\ (10^6)$ km = $92{,}96(10^6)$ mi.

APÉNDICE C MÉTODOS DE CÁLCULO

C.1 INTRODUCCIÓN

La finalidad de este apéndice es proporcionar algunos métodos numéricos sencillos que ayuden a resolver (haciendo menos farragosa la tarea de resolución) los problemas de Mecánica. No se ha pretendido dar una colección de programas de ordenador para ser utilizados en los diversos tipos de problemas que se encuentran en un curso de Dinámica. Los problemas que se designan como problemas para resolver con ordenador son, básicamente, aplicaciones sencillas de los principios elementales. Sólo exigen resolver el mismo problema una y otra vez variando algún parámetro del mismo. Aun cuando podrían resolverse a mano o con ayuda de una calculadora programable, lo más conveniente es resolver estos problemas utilizando un ordenador —bien sea un microordenador programado en BASIC o un ordenador programado en FORTRAN. En todo caso, se pretende que el estudio paramétrico exponga las características del problema que no pueden verse resolviéndolo para un valor particular. Por ejemplo, el problema C13-170 examina el efecto de un ángulo inicial sobre lanzamientos de la pelota en el baloncesto.

Este apéndice no está destinado a enseñar al estudiante todo lo que hay que saber acerca de métodos numéricos. Los métodos numéricos que presentamos se han tomado, a propósito, muy sencillos —tanto de comprensión como de utilización. Existen métodos mucho más elaborados. Los estudiantes a quienes puedan interesar éstos deberán seguir un curso de métodos numéricos y / o ver algunas de las referencias bibliográficas que se consignan al final de este apéndice.

Este apéndice trata cuatro tipos de problemas que aparecen frecuentemente en diversos problemas de Mecánica:

1. Ecuaciones alineales (búsqueda de raíces)
2. Sistemas de ecuaciones lineales.
3. Integración numérica.
4. Ecuaciones diferenciales ordinarias.

Para la resolución de cada uno de estos tipos de problemas se presentan uno o dos métodos sencillos. Los métodos que se presentan se han tomado sencillos

expresamente, a fin de que se puedan resolver a mano o utilizando una calculadora de bolsillo programable o no, tanto como utilizando un ordenador.

En cada caso, se incluye un programa sencillo a fin de poner de manifiesto la utilización del método numérico. Se dan las versiones en BASIC y en FORTRAN. No se incluye el disquete correspondiente ya que los programas son suficientemente cortos para escribirlos sin demasiado esfuerzo. Los programas no son elegantes; al igual que los métodos numéricos que ilustran, se han hecho lo más sencillos posible para que sean fáciles de comprender, fáciles de modificar y fáciles de personalizar, y también que puedan funcionar en una gama de ordenadores lo más amplia posible. Probablemente, a los estudiantes les gustará modificar y reforzar estos programas a fin de mejorar tanto su entrada de datos como el formato de salida de los resultados. También podrán querer modificar dichos programas para aprovechar características especiales de sus ordenadores, tales como salidas gráficas.

C.2 ECUACIONES ALINEALES

Los problemas de Mecánica (Dinámica) exigen a menudo resolver ecuaciones alineales, tales como

$$x^3 - 7{,}014x^2 + 13{,}324x - 3{,}548 = 0 \qquad \text{(C-1}a\text{)}$$

Estos problemas se enuncian a veces en la forma: Hallar los ceros o raíces de la función

$$f(x) = x^3 - 7{,}014x^2 + 13{,}324x - 3{,}548 \qquad \text{(C-1}b\text{)}$$

[es decir, hallar los valores de x que hacen $f(x) = 0$]. Por tanto, a veces se dice que son problemas de *despejar raíces*. La ecuación C-1 es de un tipo que se encuentra frecuentemente en el problema de hallar el momento de inercia máximo de un cuerpo (la ecuación C-1 se ha sacado directamente del problema ejemplo A-6).

Aun cuando tales ecuaciones se pueden resolver por tanteo (ensayando valores hasta que el primer miembro de la ecuación sea casi nulo), existen procedimientos de resolución sistemáticos y sencillos. Vamos a estudiar dos de ellos: el método de *Newton-Raphson* y el *Método de la falsa posición,*

C.2.1 Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson de obtención de raíces es un método iterativo que, para la mayoría de las funciones, converge rápidamente. En realidad, si el ensayo inicial es razonablemente próximo al valor correcto, el método de Newton-Raphson suele converger tras tres o cuatro iteraciones. Dada su rápida convergencia y su facilidad de uso, el método de Newton-Raphson es el que se elige en la mayoría de los casos.

En cada paso n del proceso de iteración, el método de Newton-Raphson utiliza la tangente a la curva en el punto x_n (fig. C-1) para estimar la situación de la raíz. La pendiente de la tangente en x_n es la derivada de la función, calculada en x_n

$$\text{pendiente} = f'(x_n)$$

Ahora bien, según la geometría de la figura C-1, la pendiente también viene dada por

$$\text{pendiente} = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}}$$

Igualando estas dos expresiones y despejando x_{n+1} tenemos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{(C-2)}$$

La ecuación C-2 se utiliza iterativamente para obtener estimaciones más aproximadas de la situación de la raíz. Para obtener la primera estimación x_0 de la situación de la raíz se puede utilizar una gráfica groseramente aproximada de la función $f(x)$.

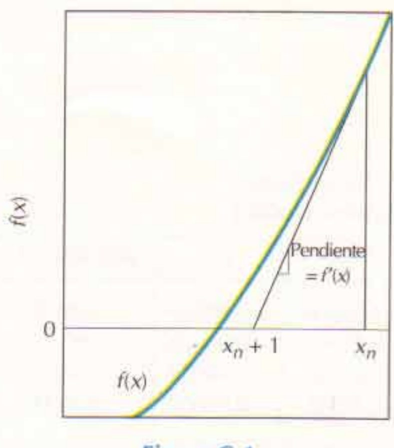


Figura C-1

PROBLEMA EJEMPLO C.1

Resolver la ecuación C-1

$$x^3 - 7{,}014x^2 + 13{,}324x - 3{,}548 = 0$$

utilizando el método de Newton-Raphson con una precisión relativa del 0,0001%.

SOLUCIÓN

La función

$$f(x) = x^3 - 7{,}014x^2 + 13{,}324x - 3{,}548$$

es un polinomio de tercer grado por lo que la ecuación $f(x) = 0$ tendrá tres raíces. La gráfica a ojo (fig. C-2) de la función indica que dichas raíces están próximas a los puntos $x = 0$, $x = 3$ y $x = 3{,}5$. Partiendo del punto inicial $x_0 = 3{,}5$ se utilizará la ecuación C-3 para generar los puntos siguientes

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - 7{,}014x_0^2 + 13{,}324x_0 - 3{,}548}{3x_0^2 - 14{,}028x_0 + 13{,}324}$$

$$= 3{,}5 - \frac{0{,}0395}{0{,}9760} = 3{,}4595$$

$$x_2 = 3{,}4595 - \frac{0{,}0056}{0{,}6986} = 3{,}4514$$

y así sucesivamente. Se repite el proceso hasta que el error relativo

$$\left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}\right|$$

(razón de la diferencia entre aproximaciones sucesivas y aproximación en curso) sea inferior a 0,00001 (0,001%). En la figura C-3*a* puede verse el resultado de este

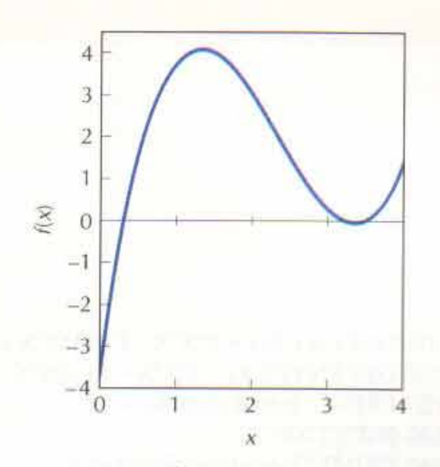


Figura C-2

proceso. La columna rotulada DL no es sino el segundo término de la fórmula de iteración

$$DL = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1} - x_n$$

Al cabo de tres iteraciones, la raíz está localizada en $x = 3{,}4511$. Con iteraciones análogas para valores de partida $x = 0$ y $x = 3{,}0$ dan las otras dos raíces $x = 0{,}31670$ (fig. C-3*b*) y $x = 3{,}24619$ (fig. C-3*c*), respectivamente.

Xo =3,50000
Error = 0,00001

Xn	DL	ABS(DL/X1)
3,50000	− 0,04047	0,01170
3,45953	− 0,00808	0,00234
3,45145	− 0,00034	0,00010
3,45111	− 0,00000	0,00000

La raíz es 3,45111

(*a*)

Xo = 0,00000
Error = 0,00001

Xn	DL	ABS(DL/X1)
0,00000	0,26629	1,00000
0,26629	0,04882	0,15492
0,31510	0,00160	0,00504
0,31670	0,00000	0,00001

La raíz es 0,031670

(*b*)

Xo = 3,00000
Error = 0,00001

Xn	DL	ABS(DL/X1)
3,00000	0,16932	0,05342
3,16932	0,06170	0,01910
3,23102	0,01426	0,00439
3,24528	0,00090	0,00028
3,24619	0,00000	0,00000

La raíz es 3,24619

(*c*)

Figura C-3

En los Programas C-1*a* y C-1*b* se dan programas sencillos en BASIC y FORTRAN, respectivamente, para resolver ecuaciones alineales mediante el método de Newton-Raphson. Las instrucciones que definen la función y su derivada en las líneas 100 y 110 deberán cambiarse para el problema particular que se quiera resolver.

```
100 DEF FNY (X) = X*X*X – 7.014*X*X + 13.324*X – 3.548
110 DEF FNYP ( X) = 3*X*X – 14.028*X + 13.324
120 PRINT "Introduzca Xo = ";
130 INPUT X0
140 PRINT "Introduzca Error = ";
150 INPUT ER
160 CLS
170 PRINT USING "    Xo = # # #, # # # . # # # # #"; X0
180 PRINT USING " Error =           # # . # # # # #"; ER
190 PRINT"——————————————————————————"
200 PRINT"    Xn           DL           ABS(DL/X1) "
210 PRINT"——————————————————————————"
220  DL = – FNY(X0) / FNYP(X0)
230  X1 = X0 + DL
240  PE = ABS(DL / X1)
250  PRINT USING "# # #, # # # . # # # # #    # # #, # # # . # # # # #    # # # . # # # # #"; X0; DL; PE
260  IF ABS(DL / X1) < ER THEN 290
270    X0 = X1
280    GOTO 220
290 PRINT "——————————————————————————"
300 PRINT USING "La raíz es # # #, # # # . # # # # #"; X1
310 END
```

Programa C-1a Listado de un programa en BASIC del método de Newton-Raphson.

```
100 Y(X) = X*X*X - 7.14*X*X + 13.324*X - 3.548
110 YP(X) = 3*X*X - 14.028*X + 13.324
    PRINT *, ' Introduzca Xo ='
    READ *, X0
    PRINT * ,' Introduzca el error = '
    READ *, ER
    PRINT
    PRINT 1, X0
  1 FORMAT ('        Xo = ',F13.5)
    PRINT 2, ER
  2 FORMAT ('    Error =         ',F8.5)
    PRINT *,'-------------------------------'
    PRINT *,'     Xn          DL          ABS(DL/X1) '
    PRINT *,'-------------------------------'
220    DL = - Y(X0) / YP(X0)
       X1 = X0 + DL
       PE = ABS(DL/X1)
       PRINT 3, X0, DL, PE
  3 FORMAT (1X, F13.5,4X, F13.5, 4X,F9.5)
       IF (ABS(DL/X1) .LT. ER ) THEN
          GOTO 290
        ELSE
          X0 = X1
          GOTO 220
        END IF
290 PRINT *,'-------------------------------"
    PRINT 4, X1
  4 FORMAT ('La raíz es ',F13.5)
    CALL EXIT
    END
```

Programa C-1*b* Listado de un programa en FORTRAN del método de Newton-Raphson.

C.2.2 Método de la falsa posición

Aun cuando no sea tan elaborado como el método de Newton–Raphson, el método de la falsa posición es bueno para ser utilizado con funciones para las cuales el método de Newton–Raphson presente dificultades, como sucede cuando la derivada $f'(x)$ tienda a cero en el punto donde esté la raíz o en sus proximidades. Esto sucede corrientemente cuando la función tenga dos raíces para un mismo valor de x como, por ejemplo, $f(x) = (x + 1)(x - 1)^2$. También puede resultar difícil aplicar el método de Newton-Raphson en el caso de funciones complicadas cuya derivada $f'(x)$ no sea fácil de calcular. Por tanto, convendrá disponer de otro método y el de la falsa posición constituye una buena alternativa.

El método de la falsa posición es un método sistemático de estrechamiento de la región en la cual exista una raíz. Por ejemplo, en la figura C-4 tenemos la gráfica de una función $f(x)$ en la que en abscisas se representa x. El punto L se halla a la izquierda del punto en que $f(x) = 0$ y el punto R se halla a la derecha. Notemos que entre dichos dos puntos, L y R, entre los cuales se encuentra una raíz simple, $f(x_L)f(x_R) < 0$, siempre. Para hallar los puntos iniciales L y R puede ser necesario disponer de una gráfica groseramente aproximada de $f(x)$.

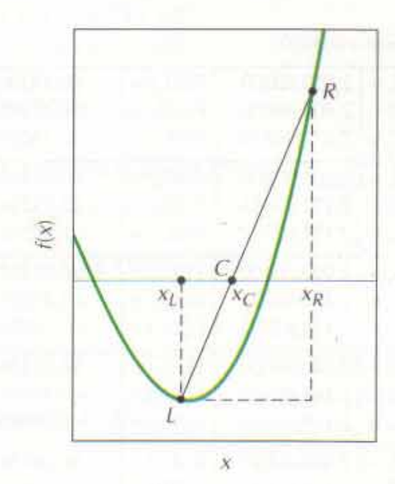


Figura C-4

Construyamos el punto C —punto de intersección con el eje de abscisas de la recta que pasa por los puntos L y R— y tomémoslo como estimación de la raíz. El punto C se puede hallar por triángulos semejantes

$$\frac{f(x_R)}{x_R - x_C} = \frac{f(x_R) - f(x_L)}{x_R - x_L} \tag{C-3}$$

Despejando x_C tenemos

$$x_C = x_R - \frac{f(x_R)(x_R - x_L)}{f(x_R) - f(x_L)} \tag{C-4}$$

Ahora bien, como $f(x)$ no es una recta, $f(x_C)$ no será igual a cero. Si $f(x_C)f(x_R) < 0$, x_C estará a la izquierda de la raíz. En tal caso, se traslada el punto L al punto C y se repite el proceso. Si $f(x_C)f(x_L) < 0$, x_C estará a la derecha de la raíz. En este caso, se traslada el punto R al punto C y se repite el proceso. El proceso termina cuando el punto C coincida con uno de los puntos extremos (dentro de los límites del error del redondeo numérico). Entonces, el punto C será la raíz buscada.

PROBLEMA EJEMPLO C.2

Resolver

$$200 = \frac{T_0}{5}\left[\cosh\frac{5(800)}{2T_0} - 1\right]$$

utilizando el método de la falsa posición con una precisión del 0,001%.

SOLUCIÓN

En primer lugar, se escribirá la ecuación en la forma de la ecuación C-1:

$$f(x) = x\left[\cosh\frac{2000}{x} - 1\right] - 1000 = 0$$

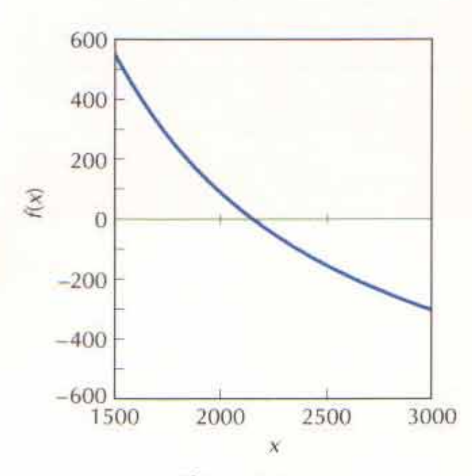


Figura C-5

Una gráfica, trazada a ojo, de $f(x)$ (fig. C-5) sugiere tomar los puntos de partida $x_L = 2000$ y $x_R = 2500$. Obsérvese que $f(x_L) = 86{,}1614$, $f(x_R) = -156{,}4125$ y $f(x_L)f(x_R) < 0$. Se construye el punto C utilizando la ecuación C-4 y se tiene

$$x_C = 2500 - \frac{(-156{,}4125)\,(2500 - 2000)}{(-156{,}4125) - (86{,}1614)} = 2177{,}5982$$

Como $f(x_C) = -15{,}1522$, el producto $f(x_C)f(x_R) > 0$ y el producto $f(x_C)f(x_L) < 0$. Por tanto, se pasa el punto R al punto C y se repite el proceso. Éste terminará cuando el error relativo, sea

$$\frac{x_R - x_C}{x_C} \quad \text{o bien} \quad \frac{x_C - x_L}{x_C}$$

resulte ser menor o igual a 0,00001 (0,001%). En la figura C-6 puede verse el resultado de este proceso. Al cabo de cinco iteraciones, la raíz resulta ser $x = 2148{,}642$.

Error = 0,00001

XL =	2 500,00000	F(XL) =	86,16138
XR =	2 500,00000	F(XR) =	−156,41248
XC =	2 177,59814	F(XC) =	−15,15216
XL =	2 000,00000	F(XL) =	86,16138
XR =	2 177,59814	F(XR) =	−15,15216
XC =	2 151,03711	F(XC) =	−1,27262
XL =	2 000,00000	F(XL) =	86,16138
XR =	2 151,03711	F(XR) =	−1,27262
XC =	2 148,83862	F(XC) =	−0,10550
XL =	2 000,00000	F(XL) =	86,16138
XR =	2 148,83862	F(XR) =	−0,10550
XC =	2 148,65649	F(XC) =	−0,00865
XL =	2 000,00000	F(XL) =	86,16138
XR =	2 148,65649	F(XR) =	−0,00865
XC =	2 148,64160	F(XC) =	−0,00072

La raíz es 2148,642

Figura C-6

En los programas C-2*a* y C-2*b* se dan programas sencillos en BASIC y FORTRAN, respectivamente, para resolver ecuaciones alineales. La instrucción de la función de la línea 100 deberá cambiarse para el problema particular que se quiera resolver.

```
 90 DEF FNCOSH(X) = (EXP(X)+ EXP(–X))/2
100 DEF FNY(X) = X*(FNCOSH(2000/X) – 1) – 1000
110 PRINT "Introduzca XL = ";
120 INPUT XL
130 PRINT " Introduzca XR = ";
140 INPUT XR
150 PRINT "Introduzca Error = ";
160 INPUT ER
170 CLS
180 PRINT USING "    Error = # # # , # # # . # # # # #"; ER
190 PRINT "-------------------------------"
200 XC = XR – FNY(XR)*(XR-XL)/(FNY(XR)-FNY(XL))
210 PRINT USING " XL = # # # , # # # . # # # # #        F(XL) = # # # , # # # . # # # # #"; XL; FNY(XL)
220 PRINT USING " XR = # # # , # # # . # # # # #        F(XR) = # # # , # # # . # # # # # "; XR; FNY(XR)
230 PRINT USING " XC = # # # , # # # . # # # # #        F(XC) = # # # , # # # . # # # # #."; XC; FNY(XC)
240     IF FNY(XC)*FNY(XL) < = 0 THEN 320
250     IF FNY(XC)*FNY(XR) < = 0 THEN 290
260 PRINT
270 PRINT "**** ERROR ****"
280 END
290 IF ABS((XC-XL)/XC < ER THEN 350
300     XL = XC
310     GOTO 190
320 IF ABS((XC – XR)/XC) < ER THEN 350
330     XR = XC
340     GOTO 190
350 PRINT "-------------------------------------"
360 PRINT USING "          La raíz es # # # , # # # . # # # # #"; XC
370 END
```

Programa C-2a Listado de un programa en BASIC para realizar el método de la falsa posición.

```
100 Y(x) = X*(COSH(2000/X) – 1) – 1000
    PRINT*, ' Introduzca XL = '
    READ *, XL
    PRINT *, 'Introduzca XR = '
    READ *, XR
    PRINT*, 'Introduzca error = '
    READ *, ER
    PRINT 1, ER
  1 FORMAT (' Error = ',F13.5)
190 PRINT *,'-------------------------------'
      XC = XR – Y(XR)*(XR – XL)/(Y(XR) – Y(XL))
      PRINT 2, XL, Y(XL)
  2 FORMAT ('    XL = ', F13.5,'   F(XL) = ',F13.5)
      PRINT 3, XR, Y(XR)
  3 FORMAT ('    XR= ', F13.5,'   F(XR) = ',F13.5)
    PRINT 4, XC, Y(XC)
  4 FORMAT ('    XC = ',    F13.5,' F(XC) = ',F13.5)
      IF (Y(XC)*Y(XL) .LE. 0) GOTO 320
      IF (Y(XC)*Y(XR) .LE. 0) GOTO 290
    PRINT
    PRINT *, "**** ERROR ****"
    CALL EXIT
290 IF (ABS((XC-XL)/XC) .LT. ER) GOTO 350
      XL = XC
      GOTO 190
320 IF (ABS((XC-XR)/XC) .LT. ER) GOTO 350
      XR = XC
      GOTO 190
350 PRINT *,' -------------------------------'
    PRINT 5, XC
  5 FORMAT ('      La raíz es ' ,F13.5)
    CALL EXIT
    END
```

Programa C-2*b* Listado de un programa en FORTRAN para realizar el método de la falsa posición.

C.3 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Muchos problemas de Mecánica exigen la solución de un sistema de ecuaciones lineales, tales como

$$5x + 3y + 4z = 23 \quad \text{(C-5a)}$$

$$2x + 1y + 1z = 7 \quad \text{(C-5b)}$$

$$1x + 3y + 5z = 22 \quad \text{(C-5c)}$$

Un esquema posible de resolución de este sistema sería:

Primero, utilizar la ecuación C-5*a* para eliminar la *x* de las ecuaciones C-5*b* y C-5*c*. Por ejemplo, multiplicar por 2/5 la ecuación C-5*a* y restarla de la C-5*b* y multiplicar por 1/5 la ecuación C-5*a* y restarla de la C-5*c*. (Si el coeficiente de *x* en la ecuación C-5*a* fuese nulo, se reordenarían primero las ecuaciones de manera que dicho coeficiente fuese distinto de cero.)

A continuación, utilizar la ecuación C-5*b* que resulte para eliminar *y* de las ecuaciones C-5*a* y C-5*c*.

Por último, utilizar la ecuación C-5*c* para eliminar *z* de las ecuaciones C-5*a* y C-5*b*.

En este punto, la ecuación C-5*a* dará el valor de *x;* la C5-*b* dará el valor de *y;* y la C-5*c*, el valor de *z*.

El procedimiento que acabamos de describir es el llamado método de Gauss-Jordan de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Como las letras representativas de las incógnitas (x,y,z) no representan, en el esquema de solución, más papel que el de mantener los coeficientes en sus sitios, el procedimiento se puede llevar a cabo con una matriz de los coeficientes

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 23 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 22 \end{vmatrix} \quad \text{(C-6)}$$

donde las filas de la matriz representan las ecuaciones del sistema. La primera columna de cada fila contiene los coeficientes de *x*, la segunda columna contiene los coeficientes de *y*, la tercera columna contiene los coeficientes de *z* y la última columna contiene los segundos miembros de las ecuaciones. Las filas de la matriz se han de multiplicar por constantes y sumarse con las otras filas de la misma manera que se ha hecho con las ecuaciones en el procedimiento descrito anteriormente.

PROBLEMA EJEMPLO C.3

Resolver el sistema de ecuaciones lineales (ecs. C-5*a*, C-5*b* y C-5*c*) utilizando el método de Gauss-Jordan.

SOLUCIÓN

Primeramente, se escriben las ecuaciones en forma matricial, según indica la ecuación C-6. A continuación, la primera fila (ecuación) multiplicada por 2/5 se

resta de la segunda fila (ecuación) y la primera fila (ecuación) multiplicada por 1/5 se resta de la tercera fila (ecuación) y se tiene

$$\left|\begin{array}{cccc} 5 & 3 & 4 & 23 \\ 0 & -0{,}2 & -0{,}6 & -2{,}2 \\ 0 & 2{,}4 & 4{,}2 & 17{,}4 \end{array}\right|$$

A continuación, la segunda fila multiplicada por 15 se suma a la primera fila y la segunda multiplicada por 12 se suma a la tercera, con lo que se tiene

$$\left|\begin{array}{cccc} 5 & 0 & -5{,}0 & -10{,}0 \\ 0 & -0{,}2 & -0{,}6 & -2{,}2 \\ 0 & 0 & -3{,}0 & -9{,}0 \end{array}\right|$$

Por último, la tercera fila multiplicada por 5/3 se resta de la primera y la tercera fila multiplicada por 2/10 se resta de la segunda. Resulta así

$$\left|\begin{array}{cccc} 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -0{,}2 & 0 & -0{,}4 \\ 0 & 0 & -3{,}0 & -9{,}0 \end{array}\right|$$

La respuesta es más fácil de interpretar si se divide por 5 la primera fila; se divide por −2/10 la segunda y por −3 la tercera. Con ello se tiene la matriz

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right|$$

Las filas de esta matriz representan las ecuaciones

$$x = 1 \qquad y = 2 \qquad z = 3$$

que constituyen la solución del sistema de ecuaciones original.

En los Programas C-3*a* y C-3*b* se dan programas sencillos en BASIC y FORTRAN, respectivamente, para resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss-Jordan. El número de ecuaciones del sistema y los coeficientes de la matriz se incluyen en las instrucciones DATA (líneas 100-130) y deberán cambiarse para el problema particular que se quiera resolver. Una modificación conveniente de estos programas consistiría en introducir estos valores directamente desde el teclado, cuando el número de ecuaciones no sea grande o leerlos desde un fichero cuando sea grande el número de ecuaciones.

```
100 DATA 3
110 DATA 5, 3, 4, 23
120 DATA 2, 1, 1,  7
130 DATA 1, 3, 5, 22
140 DIM A(20,21)
150 GOSUB 310
160 FOR  I = 1 TO N
170     GOSUB 500
180     GOSUB 720
190     NEXT I
200 PRINT
210 PRINT
220 PRINT "La solución es "
230 PRINT
240 FOR I = 1 TO N
250     PRINT "x(";I;") = "; A(I,N+1)
260     NEXT I
270 END
```

Programa C-3a Listado de un programa en BASIC que resuelve un sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de eliminación de Gauss- Jordan. (Continúa en la página siguiente.)

```
280 REM
290 REM   Lectura de los elementos de la matriz
300 REM
310 READ N
320 FOR I = 1 TO N
330     FOR J = 1 TO N+1
340         READ A(I,J)
350         NEXT J
360     NEXT I
370 CLS
380 PRINT "La matriz de entrada es: "
390 PRINT
400 FOR I = 1 TO N
410     FOR J = 1 TO N+1
420         PRINT A(I,J)
430         NEXT J
440     PRINT
450     NEXT I
460 RETURN
470 REM
480 REM   Búsqueda por filas del elemento más grande
490 REM   de la columna I
500 TEMP = ABS(A(I,I))
510 KT = I
520 FOR K = I TO N
530     TT = ABS(A(K,I))
540     IF TT < = TEMP THEN 570
550         KT = K
560         TEMP = TT
570     NEXT K
580 IF KT = I THEN 680
590 REM
600 REM   Intercambio de filas, si es necesario pivotar
610 REM   el elemento más grande posible
620 REM
630 FOR K = 1 TO N+1
640     TEMP = A(I,K)
650     A(I,K) = A(KT,K)
660     A(KT,K) = TEMP
670     NEXT K
680 RETURN
690 REM
700 REM   'Normalizar' la fila del pivote
710 REM
720 PV = A(I,I)
730 FOR K = I TO N+1
740     A (I,K) = A(I,K)/PV
750     NEXT K
760 REM
770 REM   Eliminación de todos los elementos de la
780 REM   I-ésima columna excepto el elemento pivote
790 REM   que ha sido normalizado a 1
800 REM
810 FOR K = 1 TO N
820     IF K = I THEN 870
830     PV = A(K,I)
840     FOR KK = I TO N+1
850         A(K,KK) = A(K,KK) – PV*A(I,KK)
860         NEXT KK
870     NEXT K
880 RETURN
```

Programa C-3*a* Continuación.

```
    REAL A(20,21)
100 DATA N/3/
110 DATA A(1,1),A(1,2),A(1,3),A(1,4)/5, 3, 4, 23/
120 DATA A(2,1),A(2,2),A(2,3),A(2,4)/2, 1, 1,  7/
130 DATA A(3,1),A(3,2),A(3,3),A(3,4)/1, 3, 5, 22/
    PRINT *,' La matriz de entrada es: '
    PRINT *,' '
    DO 450 I = 1, N
        PRINT *, (A(I,J), J = 1, N+1)
450     CONTINUE
    DO 190 I = 1, N
        CALL PIVOT(N,A,I)
        CALL ELIM(N,A,I)
190     CONTINUE
    PRINT *,' '
    PRINT *,' '
    PRINT *,' La solución es :'
    PRINT *,' '
    DO 260 I = 1, N
        PRINT *, 'X(', I, ') = ', A(I,N+1)
260     CONTINUE
    CALL EXIT
    END
    SUBROUTINE PIVOT(N,A,I)
    REAL A(20,21)
C       Búsqueda por filas del elemento más grande de la
C       columna I
    TEMP = ABS(A(I,I))
    KT = I
    DO 570 K = I, N
        TT = ABS(A(K,I))
        IF (TT .GT. TEMP) THEN
            KT = K
            TEMP = TT
            END IF
570     CONTINUE
```

Programa C-3*b* Listado de un programa en FORTRAN que resuelve un sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de eliminación de Gauss–Jordan. (Continúa en la página siguiente.)

```
      IF (KT .EQ. I) GOTO 680
C        Intercambio si fuese necesario para hacer el ele-
C        mento 'pivote' lo más grande posible
      DO 670 K = 1, N+1
         TEMP = A(I,K)
         A(I,K) = A(KT,K)
         A(KT,K) = TEMP
670   CONTINUE
680 RETURN
      END
      SUBROUTINE ELIM(N,A,I)
      REAL A(20,21)
C        'Normalizar' la fila pivote
      PV = A(I,I)
      DO 750 K = I, N+1
         A(I,K) = A(I,K)/PV
750   CONTINUE
C        Eliminaciónde todos los valores de la I-ésima
C        columna excepto el elemento pivote el cual ha
C        sido normalizado a 1
      DO 870 K = 1, N
         IF (K .NE. I) THEN
            PV = A (K,I)
            DO 860 KK = I, N+1
               A(K,KK) = A(K,KK) - PV*A(I,KK)
860         CONTINUE
         END IF
870   CONTINUE
880 RETURN
      END
```

Programa C-3*b* Continuación.

C.4 INTEGRACIÓN NUMÉRICA

La mayoría de las funciones que hay que integrar en los problemas de Dinámica son polinómicas u otras funciones sencillas y son fáciles de calcular analíticamente. Sin embargo, a veces, la función a integrar puede ser suficientemente complicada como para que sean necesarias técnicas de integración adelantadas. En otras ocasiones, la función a integrar no se da en forma explícita. En vez de ello, la función puede venir dada por valores determinados experimentalmente en algunos puntos. En estos dos últimos casos, para evaluar las integrales pueden resultar útiles ciertos métodos numéricos.

En la forma más sencilla, la integración numérica resulta de la interpretación física de la integral como área encerrada bajo una curva. El área se puede aproximar mediante rectángulos, trapecios u otras formas simples cuya área sea de fácil determinación. El valor aproximado de la integral se obtiene sumando las áreas de las distintas partes. El método que vamos a describir utiliza trapecios para aproximar el área encerrada bajo la curva; de aquí su nombre: regla de los trapecios.

Por ejemplo, el valor de la integral

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{(C-7)}$$

está representado por el área sombreada de la figura C-7*a*. Si aproximamos esta área a un gran trapezoide de anchura $h = b - a$, como en la figura C-7*b*, tenemos

$$I \cong T_1 = \frac{h}{2}[f_a + f_b] \qquad \text{(C-8)}$$

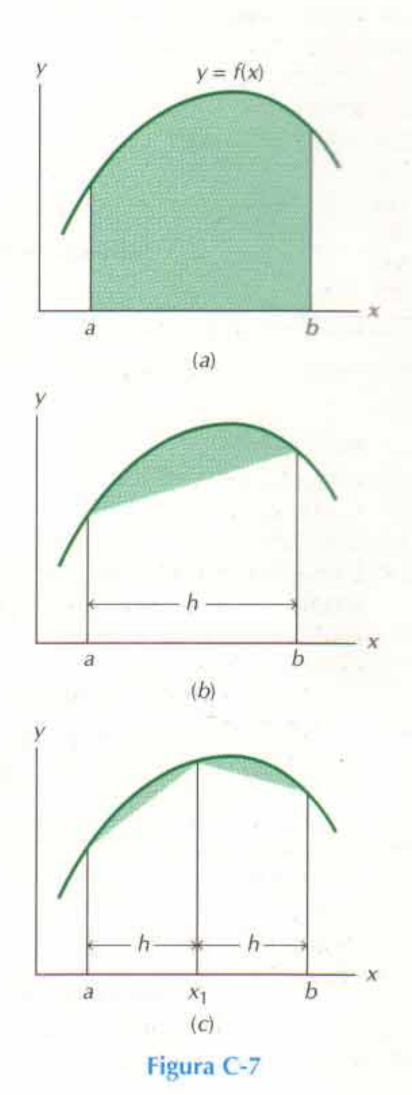


Figura C-7

donde $f_a = f(a)$ y $f_b = f(b)$. Esta aproximación tendrá por error el área de la superficie sombreada de la figura C-7*b*, que está comprendida entre la parte superior del trapecio y la curva. No obstante, podemos reducir el error utilizando dos trapecios de anchura $h = (b - a)/2$, como en la figura C-7*c*, y sumando sus áreas

$$I \cong T_2 = \frac{h}{2}[f_a + f_1] + \frac{h}{2}[f_1 + f_b] = \frac{h}{2}[f_a + f_b + 1 f_1] \qquad \text{(C-9)}$$

donde $f_1 = f(x_1)$ y $x_1 = a + h$. Las partes altas de los dos trapecios siguen más fielmente la curva que el trapecio único anterior. El error de la aproximación T_2 (representado por el área sombreada de la figura C-7*c*) es menor que el de la aproximación T_1.

Continuando con esta lógica y dividiendo el intervalo en N trapecios de igual anchura h tenemos la aproximación de la regla de los trapecios

$$I \cong T_n = \frac{h}{2}[f_0 + f_n + 2\Sigma\, f_i] \qquad \text{(C-10)}$$

donde

$$f_0 = f(a) \qquad f_n = f(b) \qquad h = \frac{b-a}{n}$$
$$f_i = f(x_i) = f(a + ih) \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

Al ir aumentando el número de tramos, disminuirá la anchura de éstos, las partes altas de los trapecios se ajustarán más a la función que se integra y se reducirá el error total de la aproximación. Puede demostrarse que el error que se comete al utilizar la regla de los trapecios es aproximadamente proporcional a h^2. Por tanto, si reducimos h a la mitad, reducimos el error a la cuarta parte. Ordinariamente, la integral se calcula varias veces utilizando tramos cada vez más estrechos hasta que el valor correspondiente a dos anchuras de tramo diferentes sea prácticamente el mismo. Entonces se toma este valor como valor de la integral.

En el caso de datos experimentales dados solamente en puntos discretos (que posiblemente no estén igualmente separados), la regla de los trapecios se aplica a cada par de puntos y luego se suman los valores obtenidos. Sin embargo, en este caso, puede no ser posible variar el número de tramos y obtener una estimación del error. En su lugar, puede utilizarse una gráfica de la función para obtener una burda estimación de lo bien que se aproxima la función con la regla de los trapecios (v. Problema Ejemplo C-5). Si parece que esta no representa satisfactoriamente la función, o bien podrá utilizarse un método de interpolación para generar puntos adicionales en un número grande de valores igualmente espaciados según exige la regla, o bien habrá que emplear un método de integración más preciso.

En los Programas C-4*a* y C-4*b* se dan listados de programas en BASIC y FORTRAN, respectivamente, para generar el resultado de la figura C-8. La instrucción de la función y los límites de integración de las líneas 100-120 deberán cambiarse para cada función que se quiera integrar.

```
100 DEF FNY (X) = X* EXP(– X*X)
110 A = 0
120 B = 2
130 CLS
140 N = 1
150 H = B – A
160 T = H*(FNY(A) + FNY(B))/2
170 PRINT "––––––––––––––––"
180 PRINT "N° de      Valores de  Error"
190 PRINT "tramos     la integral  % rel "
200 PRINT "––––––––––––––––"
210 PRINT USING " ####        ###.#####"; N, T
220 FOR K = 1 TO 7
230    TOLD = T
240    H = H/2
250    T = FNY(A) + FNY(B)
260    N = (B – A)/H
270    FOR I = 1 TO N-1
280       X1 = A + I*H
290       T = T + 2*FNY(X1)
300       NEXT I
310    T = T*H/2
320    ER = 100 * ABS((T – TOLD)/T)
330    PRINT USING " ####     ###.#####       ###.#####"; N, T, ER
340    NEXT K
350 PRINT "––––––––––––––––"
```

Program C-4*a* Listado de un programa en BASIC que evalúa integrales utilizando la regla de los trapecios.

```
100 Y(X) = X* EXP(– X*X)
110 A = 0
120 B = 2
    N = 1
    H = B – A
    T = H*(Y(A) + Y(B))/2
    PRINT *, "––––––––––––––––"
    PRINT *, " N° de      Valores de    Error"
    PRINT *, " tramos     la integral    % rel "
    PRINT *, "––––––––––––––––"
    PRINT 210, N, T
210 FORMAT (3X,I4,2(3X,F10.6))
    DO 340 K = 1, 7
       TOLD = T
       H = H/2
       T = Y(A) + Y(B)
       N = (B – A)/H
       DO 300 I = 1, N-1
          X1 = A + I*H
          T = T + 2*Y(X1)
300       CONTINUE
       T = T*H/2
       ER = 100*ABS((T – TOLD)/T)
       PRINT 210, N, T, ER
340    CONTINUE
    PRINT *, '––––––––––––––––'
    CALL EXIT
    END
```

Program C-4*b* Listado de un programa en FORTRAN que evalúa integrales utilizando la regla de los trapecios.

PROBLEMA EJEMPLO C.4

Calcular la integral

$$\int_0^2 x\, e^{-x^2}\, dx$$

mediante la regla de los trapecios con un error relativo estimado del 0,1%.

SOLUCIÓN

El cálculo de la integral utilizando la ecuación C-6 y un solo tramo da

$$T_1 = \frac{2}{2}[0 + 2e^{-4}] = 0{,}0366$$

mientras que utilizando dos tramos da

$$T_2 = \frac{1}{2}[0 + 2e^{-4} + 2(e^{-1})] = 0{,}3862$$

El error absoluto (diferencia entre la estimación en curso y el valor correcto) se *estima* que es

$$E_{abs} = |T_2 - T_1| = 0{,}3496$$

y el error relativo (cociente entre el error absoluto y el valor correcto) se *estima* que es

$$E_{rel} = \left|\frac{T_2 - T_1}{T_2}\right| \times 100 = 90{,}5\%$$

Utilizando cuatro tramos se tiene

$$T_4 = \frac{0{,}5}{2}[0 + 2e^{-4} + 2(0{,}5e^{-0{,}25} + e^{-1} + 1{,}5e^{-2{,}25})] = 0{,}4688$$

y el error relativo se estima que es

$$E_{rel} = \left|\frac{0{,}4688 - 0{,}3862}{0{,}4688}\right| \times 100 = 17{,}28\%$$

Se sigue utilizando más y más tramos hasta alcanzar la precisión deseada y se alcanzan los resultados de la figura C-8. Utilizando 64 tramos, se calcula que la integral vale 0,4908 con un error estimado del 0,06%. (Obsérvese en la figura C-8 que al reducir la anchura de los tramos a la mitad se reduce el error a la cuarta parte, aproximadamente, de acuerdo con la estimación del error antes mencionada).

Nº de tramos	Valor de la integral	Error % rel
1	0,036631	
2	0,386195	90,514820
4	0,466847	17,275900
8	0,484937	3,730329
16	0,489371	0,906150
32	0,490475	0,224978
64	0,490750	0,056155
128	0,490819	0,014032

Nota: El resultado es 0,4908 con un error esimado de 0,1 por ciento

Figura C-8. Evaluación de la integral $\int_0^2 xe^{-x^2}\, dx$ empleando la regla de los trapecios y variando el número de tramos.

PROBLEMA EJEMPLO C.5

Alrededor de los pilares de un puente se colocan, a veces, barriles que absorban parte de la energía y reduzcan la severidad de los accidentes de automóvil. En un ensayo de una tal barrera, se lanza un automóvil contra los barriles y los ins-

trumentos situados en el auto miden su aceleración en función del tiempo. Estos datos se pueden manipular para obtener la fuerza del auto en función de su posición:

x, m	F, N
0,0000	0
0,8833	20 029
1,5962	32 034
2,0358	31 207
2,2092	17 877
2,2299	0

Determinar la energía total absorbida por los barriles en este ensayo.

SOLUCIÓN

La energía absorbida es igual al trabajo efectuado sobre el auto

$$E = \int F\,dx$$

Ahora bien, la fuerza no se da a intervalos iguales de la posición, ya que los datos se han tomado a intervalos de tiempo iguales y no a intervalos de posición iguales. Por tanto, la regla de los trapecios deberá aplicarse a cada uno de los cinco intervalos por separado y luego sumar:

$$E \cong \frac{1}{2}(0,8833 - 0)(20\,029 + 0) + \frac{1}{2}(1,5962 - 0,8833)(32\,034 + 20\,029)$$
$$+ \frac{1}{2}(2,0358 - 1,5962)(31\,307 + 32\,034) + \frac{1}{2}(2,2092 - 2,0358)(17\,877 + 31\,207)$$
$$+ \frac{1}{2}(2,2299 - 2,2092)(0 + 17\,877) = 45\,244 \text{ J}$$

Como los datos se han obtenido experimentalmente, no es posible estimar el error volviendo a calcular la integral con tramos menores. En vez de ello, en la figura C-9 se ha representado F en función de x. La línea continua indica el área utilizada en la regla de los trapecios . El error esperado es la región sombreada comprendida entre las dos líneas. Se ve que la regla ha subestimado la integral muy poco (quizá un 3 ó 4%). Si se deseara un valor más preciso de la integral, habría que utilizar un método de integración de precisión mayor.

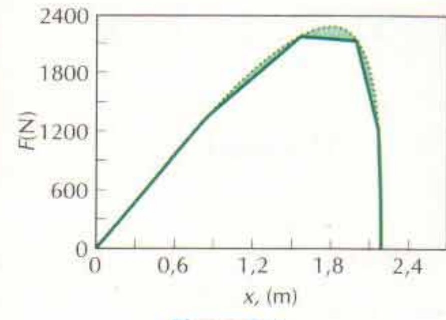


Figura C-9

C.5 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Muchos fenómenos de Mecánica exigen la integración de ecuaciones diferenciales. Muchos de estos problemas son ecuaciones corrientes, sencillas, que tienen soluciones conocidas. Sin embargo, algunas ecuaciones diferenciales tienen difícil resolución analítica pero se pueden resolver numéricamente con facilidad utilizando un procedimiento sencillo que lleva el nombre de *método de Euler*. Describiremos el procedimiento en tres apartados:

1. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
2. Problemas de *valores iniciales* genéricos en los que el orden de la ecuación diferencial ordinaria es superior al primero, pero para los cuales todos los datos se dan en un solo punto.

3. Problemas de *condiciones de contorno* en los que el orden de la ecuación diferencial ordinaria es superior al primero y los datos se dan en dos o más puntos.

C.5.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

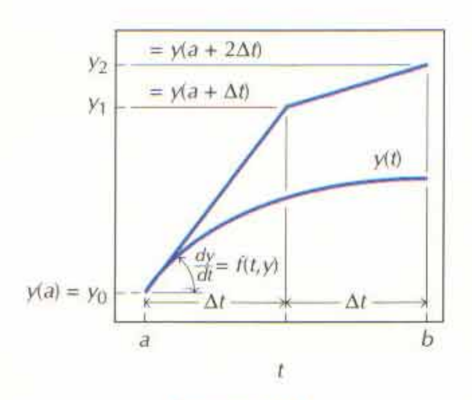


Figura C-10

Un problema regido por una ecuación diferencial ordinaria de primer orden tiene la forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad a \le t \le b \tag{C-11a}$$

$$y(a) = y_0 \tag{C-11b}$$

La solución de la ecuación diferencial es la función $y(t)$ que satisface la ecuación C-11. Pero como $f(t, y) = dy/dt$ es la pendiente de la función $y(t)$, parece razonable esperar que pueda utilizarse $f(a, y_0)$ para predecir el valor de $y_1 = y(t_1)$ donde $t_1 = a + \Delta t$ (v. fig. C-10). Ahora, conociendo el valor y_1, podemos utilizar $f(t_1, y_1)$ para predecir $y_2 = y(t_2)$ donde $t_2 = a + 2\Delta t$ y así sucesivamente. La solución $y(t)$ se genera en forma recurrente:

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)\Delta t \tag{C-12}$$

donde $t_n = a + n\Delta t$ e $y_n = y(t_n)$. Podríamos obtener una justificación más teórica de la ecuación C-12 mediante el desarrollo de $y(t)$ en serie de Taylor. En efecto, escribiendo la ecuación C-12 en la forma

$$y(t_n + \Delta t) = y(t_n) + y'(t_n)\Delta t$$

vemos que son los dos primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de $y(t)$ en torno del punto t_n.

El método de Euler para resolver la ecuación diferencial C-11 consiste en utilizar la relación recurrente definida por la ecuación C-12 para generar los puntos (t_n, y_n) partiendo de (a, y_0) y siguiendo a lo largo de la curva solución hasta $t = b$. Los puntos generados se unen mediante segmentos rectilíneos para definir la función $y(t)$. Se puede generar un número de puntos suficiente para que la curva resultante parezca lisa.

Además de generar un número de puntos suficiente para que la curva parezca lisa, los puntos deben generarse suficientemente próximos para que el método no nos aparte demasiado de la curva solución. Si el tamaño Δt del tramo fuese demasiado grande, el método de Euler no nos haría seguir la curva solución muy de cerca (v. Problema Ejemplo C-6). Cuanto menor sea el tamaño del tramo mejor funciona el método de Euler, pero ello requiere mayor número de tramos y mayor tiempo de cálculo para generar la solución.

Puede demostrarse que el error que se comete al utilizar el método de Euler es proporcional al tamaño del tramo. Por tanto, al reducir este tamaño a la mitad, reducimos el error también a la mitad. El procedimiento normal consiste en resolver el problema con tamaños de tramo sucesivamente menores hasta que la solución ya no varíe.

PROBLEMA EJEMPLO C.6

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^2 e^{-t}$$

para $y(t)$, $1 \le t \le 5$ e $y(t) = 0{,}5$.

SOLUCIÓN

Partiendo de la condición inicial, $t_0 = 1$ e $y_0 = 0{,}5$, se utiliza la ecuación C-12 y $\Delta t = 1$ para generar los puntos

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + (y_0^2 e^{-t_0})\,\Delta t \\
&= 0{,}5 + (0{,}5)^2 e^{-1}(1) = 0{,}5920 \\
t_1 &= t_0 + \Delta t = 1 + 1 = 2 \\
y_2 &= y_1 + (y_1^2 e^{-t_1})\,\Delta t \\
&= 0{,}5920 + (0{,}5920)^2 e^{-2}(1) = 0{,}6394 \\
t_2 &= t_1 + \Delta t = 2 + 1 = 3 \\
y_3 &= y_2 + (y_2^2 e^{-t_2})\,\Delta t \\
&= 0{,}6394 + (0{,}6394)^2 e^{-3}(1) = 0{,}6597 \\
t_3 &= t_2 + \Delta t = 3 + 1 = 4 \\
y_4 &= y_3 + (y_3^2 e^{-t_3})\,\Delta t \\
&= 0{,}6597 + (0{,}6597)^2 e^{-4}(1) = 0{,}6677 \\
t_4 &= t_3 + \Delta t = 4 + 1 = 5
\end{aligned}$$

En la figura C-11 se han representado estos puntos y se han unido mediante segmentos rectilíneos. La línea resultante es un tanto burda y es probable que no siga muy fielmente la solución real. Se repetirán los cálculos utilizando tamaños menores de los tramos ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{16}$) hasta que la curva llegue a ser lisa y ya no cambie. Estos resultados también se indican en la figura C-11.

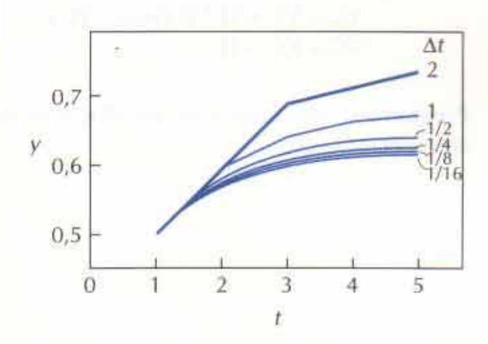
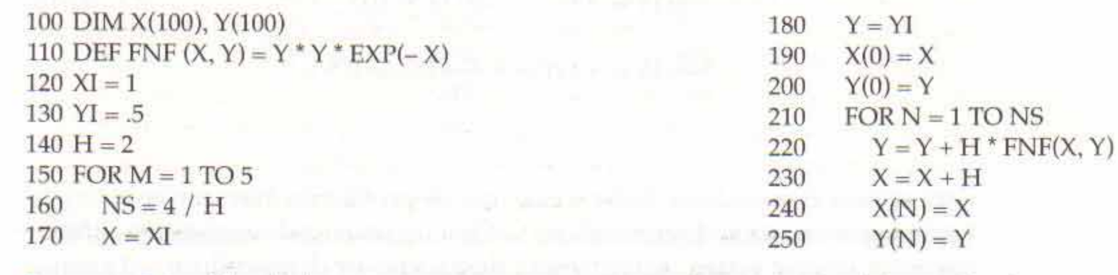
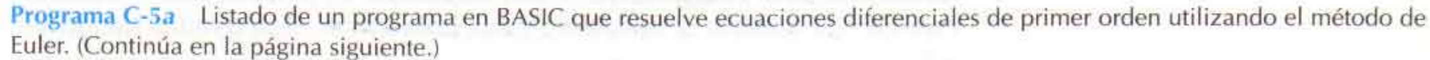


Figura C-11

Los programas C-5*a* y C-5*b* son los programas en BASIC y FORTRAN, respectivamente, utilizados para generar los datos que se emplean para trazar la figura C-11. La función $f(t, y)$ que define el problema y los datos iniciales, t_0 e y_0, en las instrucciones 110-130 deberán cambiarse en cada problema particular que se quiera resolver.



```
100 DIM X(100), Y(100)
110 DEF FNF (X, Y) = Y * Y * EXP(- X)
120 XI = 1
130 YI = .5
140 H = 2
150 FOR M = 1 TO 5
160     NS = 4 / H
170     X = XI
180     Y = YI
190     X(0) = X
200     Y(0) = Y
210     FOR N = 1 TO NS
220         Y = Y + H * FNF(X, Y)
230         X = X + H
240         X(N) = X
250         Y(N) = Y
```



Programa C-5a Listado de un programa en BASIC que resuelve ecuaciones diferenciales de primer orden utilizando el método de Euler. (Continúa en la página siguiente.)

```
260        NEXT N
270    PRINT
280    PRINT
290    PRINT
300    A$ = " ###.####    ##.#####"
310    FOR N = 0 TO NS
320        PRINT USING A$; X (N); Y (N)
330        NEXT N
340    H = H / 2
350    NEXT M
360 END
```

Programa C-5a Continuación.

```
      REAL X (100), Y (100)
      FNF (X, Y) = Y * Y * EXP(–X)
      XI = 1
      YI = .5
      H = 2
      DO 350 M = 1, 5
         NS = 4 / H
         XC = XI
         YC = YI
         X(0) = XC
         Y(0) = YC
         DO 260 N = 1, NS
            YC = YC + H * FNF(XC, YC)
            XC = XC + H
            X(N) = XC
            Y(N) = YC
260         CONTINUE
         PRINT
         PRINT
         PRINT
300 FORMAT (3X,2F10.4)
         DO 330 N = 0, NS
            PRINT 300, X(N),Y(N)
330         CONTINUE
         H = H / 2
350      CONTINUE
      STOP
      END
```

Programa C-5b Listado de un programa en FORTRAN que resuelve ecuaciones diferenciales de primer orden utilizando el método de Euler.

C.5.2 Problemas de valores iniciales

El método de Euler puede aplicarse también a ecuaciones diferenciales de orden superior tales como

$$\frac{d^4y}{dt^4} + t\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + y^2\frac{dy}{dt} = t \text{ sen } y$$
$$y(1) = 1{,}0 \qquad \frac{dy}{dt}(1) = 0{,}0 \tag{C-13}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}(1) = -1{,}0 \qquad \frac{d^3y}{dt^3}(1) = 0{,}5$$

Para aplicar el método de Euler a este tipo de problemas, hay que reducir previamente la ecuación diferencial (ec. C-13) a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Una manera de hacerlo es definiendo $n - 1$ nuevas variables (la variable dependiente y sus primeras $n - 1$ derivadas siendo n el orden de la ecuación diferencial)

$$x_1 = y$$
$$x_2 = \frac{dy}{dt} = \frac{dx_1}{dt}$$
$$x_3 = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt}$$
$$x_4 = \frac{d^3y}{dt^3} = \frac{dx_3}{dt}$$

Las tres últimas ecuaciones son tres ecuaciones diferenciales de primer orden que relacionan las variables t, x_1, x_2, x_3 y x_4. La ecuación diferencial original (ec. C-13) nos proporciona una cuarta ecuación. Así pues

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 = f_1(t, x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad \text{(C-14}a\text{)}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3 = f_2(t, x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad \text{(C-14}b\text{)}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_4 = f_3(t, x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad \text{(C-14}c\text{)}$$

$$\frac{dx_4}{dt} = t \operatorname{sen} x_1 - t x_3^2 + x_1^2 x_2 = f_4(t, x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad \text{(C-14}d\text{)}$$

En función de estas cuatro nuevas variables, las condiciones iniciales son

$$x_1(1) = 1{,}0 \qquad x_2(1) = 0{,}0$$
$$x_3(1) = -1{,}0 \qquad x_4(1) = 0{,}5$$

Una vez reducida la ecuación diferencial de orden n (ec. C-13) a un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden (ecs. C-14), se aplica el método de Euler (ec. C-12) a cada una de las ecuaciones diferenciales de primer orden, una tras otra, generando la sucesión de puntos

$$x_{11} = x_{10} + f_1(t_0, x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})\Delta t$$
$$x_{21} = x_{20} + f_2(t_0, x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})\Delta t$$
$$x_{31} = x_{30} + f_3(t_0, x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})\Delta t$$
$$x_{41} = x_{40} + f_4(t_0, x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})\Delta t$$
$$x_{12} = x_{11} + f_1(t_1, x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41})\Delta t$$
$$x_{22} = x_{21} + f_2(t_1, x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41})\Delta t$$

y así sucesivamente, donde $x_{mn} = x_m(t_n)$. Una vez completada la solución del sistema de ecuaciones de primer orden (ecs. C-14), la solución de la ecuación diferencial original (ec. C-13) se obtiene simplemente en la forma

$$y(t) = x_1(t)$$

PROBLEMA EJEMPLO C.7

Supóngase que se lanza una pelota hacia arriba con una celeridad inicial v_0 y un ángulo inicial θ_0 respecto a la horizontal. La resistencia del aire se traduce en una fuerza resistiva sobre la bola que es proporcional al cuadrado de la celeridad

$$D = C_D \frac{1}{2} \rho v^2 A$$

donde C_D es el coeficiente de forma (C_D puede tomarse aproximadamente igual a 1 en el caso de una esfera que vaya a velocidad moderada), ρ es la densidad del aire por donde pasa la pelota y $A = \pi r^2$ es el área de la sección recta de la pelota. Si se lanza una pelota de tenis de mesa ($m = 4{,}5$ g, $r = 19$ mm) con una celeridad inicial $v_0 = 6$ m/s y $\theta_0 = 40°$ a través del aire ($\rho = 1{,}293$ kg/m^3):

a. Representar gráficamente la trayectoria de la pelota de tenis de mesa desde $t = 0$ hasta que vuelva a su nivel inicial.
b. Determinar su alcance (distancia horizontal total recorrida por la pelota).

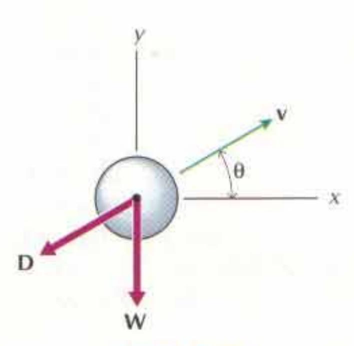


Figura C-12

SOLUCIÓN

a. En la figura C-12 puede verse el diagrama de sólido libre de la pelota en un cierto instante de su movimiento. La fuerza de resistencia tiene siempre sentido opuesto al de la velocidad. La segunda ley de Newton da, para la pelota, el par de ecuaciones diferenciales

$$-D \cos\theta = m\ddot{x} \qquad (a)$$

$$-D \operatorname{sen}\theta - W = m\ddot{y} \qquad (b)$$

Las ecuaciones *a* y *b* pueden reducirse a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden introduciendo las nuevas variables $v_x = \dot{x}$ y $v_y = \dot{y}$. Entonces, las cuatro ecuaciones diferenciales son

$$\dot{x} = v_x$$

$$\dot{v}_x = -\frac{D \cos\theta}{m}$$

$$\dot{y} = v_y$$

$$\dot{v}_y = -\frac{D \operatorname{sen}\theta + W}{m}$$

donde $m = 4{,}500(10^{-3})$ kg, $D = (1)(0{,}5)(1{,}293)v^2\pi(0{,}019)^2 = 7{,}33(10^{-4})v^2$, $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, $\operatorname{sen}\theta = v_y/v$ y $\cos\theta = v_x/v$. Estas ecuaciones se resuelven sometidas a las condiciones iniciales

$$x = y = 0$$

$$v_x = 6 \cos 40° \qquad v_y = 6 \operatorname{sen} 40°$$

cuando $t = 0$.

Aplicando el método de Euler con un tamaño de tramo $\Delta t = 0{,}01$ s se tiene la sucesión de puntos inicial

$$x_0 = y_0 = 0 \qquad \theta_0 = 40°$$

$$v_{x0} = 4{,}596 \text{ m/s} \qquad v_{y0} = 3{,}857 \text{ m/s}$$

$$v^2 = 4{,}596^2 + 3{,}857^2 = 35{,}9996 \text{m}^2/\text{s}^2$$
$$x_1 = 0 + (4{,}596)(0{,}01) = 0{,}04596 \text{ m}$$
$$v_{x1} = 4{,}596 - \frac{7{,}330(10^{-4})(35{,}9996)\cos 40°}{4{,}500(10^{-3})}(0{,}01)$$
$$= 4{,}551 \text{ m/s}$$
$$y_1 = 0 + (3{,}857)(0{,}01) = 0{,}03857 \text{ m}$$
$$v_{y1} = 3{,}857 - \frac{7{,}330(10^{-4})(35{,}9996)\,\text{sen}\, 40°}{4{,}500(10^{-3})}(0{,}01)$$
$$= 3{,}819 \text{ m/s}$$
$$v^2 = 4{,}551^2 + 3{,}819^2 = 35{,}296 \text{ m}^2/\text{s}^2$$
$$\text{sen}\,\theta = 3{,}819/(35{,}296)^{1/2} = 0{,}6428$$
$$\cos\theta = 4{,}551/(35{,}296)^{1/2} = 0{,}7660$$
$$t_1 = 0 + 0{,}01 = 0{,}01 \text{ s}$$
$$x_2 = 0{,}04596 + (4{,}551)(0{,}01) = 0{,}09147 \text{ m}$$
$$v_{x2} = 4{,}551 - \frac{7{,}330(10^{-4})(35{,}9996)(0{,}7669)}{4{,}500(10^{-3})}(0{,}01)$$
$$= 4{,}507 \text{ m/s}$$
$$y_2 = 0{,}03857 + (3{,}819)(0{,}01) = 0{,}07676 \text{ m}$$
$$v_{y2} = 3{,}819 - \frac{7{,}330(10^{-4})(35{,}9996)(0{,}6428)}{4{,}500(10^{-3})}(0{,}01)$$
$$= 3{,}860 \text{ m/s}$$

y así sucesivamente. Se repite la iteración hasta que $y_2 = 0$. Desde luego, el proceso completo de iteración deberá repetirse con tamaños de tramo cada vez menores hasta que la solución ya no varíe al disminuir éstos. Estas ecuaciones se han resuelto utilizando los programas en BASIC y FORTRAN consignados como programas C-6*a* y C-6*b*, respectivamente, con un tamaño de tramo $\Delta t = 1/256$ s. La solución (y en función de x) está representada en la figura C-13. En ésta se ha incluido, a fines de comparación, la trayectoria de la pelota de tenis de mesa correspondiente al caso en que se despreciara la resistencia del aire.

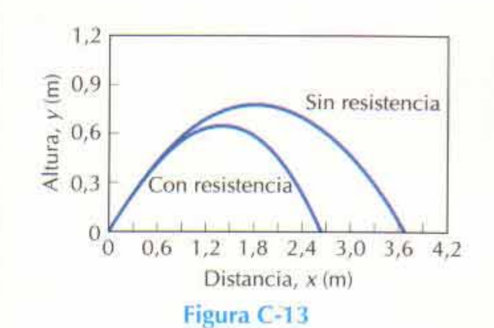


Figura C-13

b. El alcance de la pelota es la coordenada x cuando y vuelve a anularse. En la figura C-13 se ve que el alcance es

$R = 2{,}63$ m (cuando se incluye la resistencia)
$R = 3{,}66$ m (cuando se desprecia la resistencia)

(Obsérvese que la trayectoria no es parabólica cuando se incluye la resistencia del aire. Si lo fuese, su cumbre estaría en el punto medio $2{,}63/2 = 1{,}315$ m mientras que el la figura C-13 se ve que se halla mucho más cerca de 1,5 m).

```
100 PI = 4 * ATN(1)
110 G = 32.2
120 W = .01
130 M = W /G
140 R = 0.75/12
150 RHO = .002377
160 A = PI * R * R
170 VO = 20
180 T1 = 40
190 DT = 1 / 256
200 T = 0
210 X = 0
220 T = 0
230 VX = VO * COS(T1 * PI / 180)
240 VY = VO * SIN(T1 * PI / 180)
250 FM$="###.###  #,###.###  #,###.###  #,###.###  #,###.###  ###.##"
260 REM
270 REM Cálculo de la solución sin resistencia del aire
280 REM
290 TI = 0
300 XI = VX * TI
310    YI = VY * TI - G * TI * TI / 2
320    PRINT USING FM$; TI; XI; YI
330    TI = TI + DT
340    IF YI > = 0 THEN 300
350 REM
360 REM Cálculo de la solución con resistencia del aire
370 REM
380 TH = ATN(VY / VX)
390    VS = VX * VX + VY * VY
400 DR = RHO * VS * A / 2
410 X = X + VX * DT
420 Y = Y + VY * DT
430 VX = VX - (DR * COS(TH) / M) * DT
440 VY = VY - ((DR * SIN(TH) / M) + G) * DT
450 T = T + DT
460 PRINT USING FM$; T; X; Y; VX; TH * 180 / PI
470 IF Y > = 0 THEN 380
```

Programa C-6*a* Listado de un programa en BASIC que resuelve un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden utilizando el método de Euler.

```
      REAL M
      PI = 4 * ATAN(1)
      G = 32.2
      W = 0.1
      M = W / G
      R = 0.75/12
      RHO = .00238
      A = PI * R * R
      VO = 20
      T1 = 40
```

Programa C-6*b* Listado de un programa en FORTRAN que resuelve un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden utlizando el método de Euler. (Continúa en la página siguiente.)

```
      DT = 1. / 256.
      VX = VO * COS(T1 * PI / 180)
      VY = VO * SIN(T1 * PI / 180)
250 FORMAT (3X,F6.3,5F12.3)
C     Cálculo de la solución sin resistencia del aire
      T = 0
300     X = VX * T
        Y = VY * T - G * T * T / 2
        T = T + DT
        PRINT 250, T, X, Y
        IF ( Y .GE. 0) GOTO 300
C     Cálculo de la solución con resistencia del aire
        T = 0
        X = 0
        Y = 0
370     TH = ATAN(VY / VX)
        VS = VX * VX + VY * VY
        DR = RHO * VS * A / 2
        X = X + VX * DT
        Y = Y + VY * DT
        VX = VX - (DT * COS (TH) / M) * DT
        VY = VY - ((DR * SIN(TH) / M) + G) * DT
        T = T + DT
        PRINT 250, T, X, Y, VX, VY, TH * 180 / PI
        IF (Y .GE. 0) GOTO 370
      STOP
      END
```

Programa C-6*b* Continuación.

C.5.3 Problemas de condiciones de contorno

Un problema de condiciones de contorno consiste en una ecuación diferencial de orden no inferior al segundo (tal como ec. C-13) que tenga fijados los datos en dos o más puntos. Como el método de Euler exige que todos los datos se fijen en el punto inicial de manera que se pueda seguir a lo largo de la solución, este método no se podrá seguir directamente.

Un procedimiento para resolver problemas de condiciones de contorno consiste en imaginar valores de las derivadas necesarias para aplicar el método de Euler, utilizar éste para resolver el problema y ver lo próxima que está la solución obtenida al segundo valor de contorno. Si es necesario, se ajustan los valores ensayados de las derivadas iniciales y se vuelve a resolver el problema hasta que la solución encuentre el segundo valor de contorno. A esto se le llama método de *tiro por aproximación* por analogía con el método que se emplea en Artillería: se ensaya un ángulo de tiro, se dispara el cañón, se mira si la granada ha sobrepasado el blanco o se ha quedado corta, se ajusta el ángulo, se vuelve a disparar, etc.

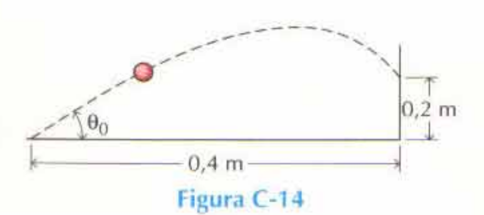


Figura C-14

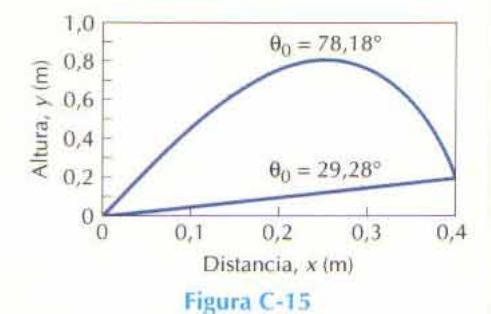


Figura C-15

PROBLEMA EJEMPLO C.8

Se utiliza una escopeta de aire comprimido para disparar una pelota de tenis de mesa contra un blanco, como se indica en la figura C-14. El ángulo de disparo puede variarse, pero la celeridad inicial de la pelota se mantiene fija en v_0 = 8 m/s. Determinar qué valor ha de tener el ángulo de disparo θ_0. Inclúyanse los efectos de la resistencia del aire como en el Problema Ejemplo C-7. Tómese ahora: masa = 5 g, diámetro =38 mm, C_D = 1 y densidad del aire = 1,225 kg/m^3.

SOLUCIÓN

Las ecuaciones diferenciales son las mismas que se dedujeron en el Problema Ejemplo C-7:

$$\dot{x} = v_x$$

$$\dot{v}_x = -\frac{D \cos\theta}{m}$$

$$\dot{y} = v_y$$

$$\dot{v}_y = -\frac{D \operatorname{sen}\theta + W}{m}$$

donde m = 0,005, $D = (1)(0,5)(1,225)v^2\pi(0,019)^2 = 6,946(10^{-4})v^2$, $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, sen $\theta = v_y/\text{v}$ y cos $\theta = l_x/\text{v}$. Hay que resolver estas ecuaciones sometidas a las condiciones iniciales $x = y = 0$ cuando $t = 0$ y también sometida a la segunda condición de contorno y = 0,2 m cuando x = 0,4 m.

La aplicación del método de Euler exige valores inciales de las cuatro variables. Los valores iniciales que faltan se obtendrán ensayando un valor para el ángulo inicial θ_0 y ajustando el ensayo lo que sea necesario para alcanzar la segunda condición de contorno. Como la recta que va de la posición inicial al blanco forma un ángulo de unos 27° con la horizontal, se efectuará un primer ensayo de $\theta_0 = 35°$. Entonces

$$v_{x0} = 8 \cos 35° = 6{,}553 \text{ m/s}$$

$$v_{y0} = 8 \operatorname{sen} 35° = 4{,}589 \text{ m/s}$$

y aplicando el método de Euler como en el Problema Ejemplo C-7 se tiene y = 0,253 m cuando x = 0,4 m. Como este ensayo da un resultado demasiado elevado, se efectuará un segundo ensayo de $\theta_0 = 30°$. Entonces

$$v_{x0} = 8 \cos 30° = 6{,}928 \text{ m/s}$$

$$v_{y0} = 8 \operatorname{sen} 30° = 4{,}000 \text{ m/s}$$

y aplicando el método de Euler se tiene y = 0,206 m cuando x = 0,4 m. Este ensayo sigue dando un resultado demasiado elevado, por lo que se efectuará un tercer ensayo de $\theta_0 = 29,5°$, etc. Al cabo de unos pocos ensayos más, se obtiene un valor de $\theta_0 = 29,28°$. En la figura C-15 se ha representado la trayectoria que corresponde a este ángulo inicial.

La solución así obtenida pasa por el punto x = 0,4 m e y = 0,2 m en camino ascendente. Es posible otra solución en la cual la pelota pase por x = 0,4 m e y = 0,2 m en camino descendente. Tras unos cuantos ensayos entre 70° y 80° se tiene la solución$\theta_0 = 78,18°$. También puede verse esta trayectoria en la figura C-15.

C.6 LECTURAS ADICIONALES

Los textos que se citan a continuación son sólo algunos de los libros disponibles que tratan de métodos numéricos elementales. Todos los textos consignados incluyen los métodos vistos en este apéndice, así como otros métodos más elaborados y otros métodos numéricos relacionados con ellos que pueden resultar útiles al estudiante.

1. Chapra, S.C. y R.P. Canale (1985). *Numerical Methods for Engineers with Personal Computer Applications*. McGraw-Hill, New York.
2. Cheney,W. y D. Kincaid (1980). *Numerical Mathematics and Computing*, Brookes/Cole, Monterey, Calif.
3. James, M.L., G.M. Smith y J.C. Wolford (1985). *Applied Numerical Methods for Digital Computation*, 3ª ed., Harper & Row, New York.
4. Johnston, R.L. (1982). *Numerical Methods: A Software Approach*, Wiley, New York.
5. Mathews, J.H. (1987). *Numerical Methods for Computer Science, Engineering and Mathematics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
6. Shoup, T.E. (1983). *Numerical Methods for the Personal Computer*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

RESPUESTAS A PROBLEMAS

Capítulo 13

13-1 $v(t) = 10t - 8$ m/s
$a(t) = 10$ m/s^2
91 m; 42 m/s; 10 m/s^2
91,4 m

13-2 $v(t) = -4$ m/s
$a(t) = 0$ m/s^2
-5 m; -4 m/s; 0 m/s^2
20 m

13-4 $v(t) = 4 \cos t$ m/s
$a(t) = -4 \operatorname{sen} t$ m/s^2
$-3,84$ m; 1,135 m/s; 3,84 m/s^2
12,16 m

13-7 $x(t) = 10 + 10t - 8t^2$ m
$a(t) = -16$ m/s^2
-422 m; $-118,0$ m/s; $-16,0$ m/s^2
282 m

13-8 $x(t) = -20\,873 + 8t^3/3 - 20t$ m
$a(t) = 16t$ m/s^2
$-19\,668$ m; 492 m/s; 128 m/s^2
972 m

13-11 $x(t) = 18,424 - 2t \cos 3t + (2/3) \operatorname{sen} 3t$ m
$a(t) = 18t \cos 3t + 6 \operatorname{sen} 3t$ m/s^2
11,03 m; $-43,47$ m/s; 55,65 m/s^2
74,76 m

13-13 $x(t) = 5 + 5t^2/2 - t^3/2$ m
$v(t) = 5t - 3t^2/2$ m/s
14,00 m; 1,500 m/s; $-4,00$ m/s^2
105,52 m

13-14 $x(t) = -37,62 + 31,62t - 4,905t^2$ m
$v(t) = 31,62 - 9,81t$ m/s
13,095 m; 2,190 m/s; $-9,81$ m/s^2
112,2 m

13-16 $x(t) = -86,25 + 9,081t - 5 \operatorname{sen} 2t$ m
$v(t) = 9,081 - 10 \cos 2t$ m/s
$-57,61$ m; $-0,521$ m/s; $-5,588$ m/s^2
45,93 m

13-19 3,00 m/s

13-22 $\sqrt{25/2} \operatorname{sen} (\sqrt{2}t - 3,229)$ m
$\sqrt{25} \cos (\sqrt{2}t - 3,229)$ m/s
$-\sqrt{50} \operatorname{sen} (\sqrt{2}t - 3,229)$ m/s^2

13-24 1 m

13-25 1953 km

13-27 $\sqrt{3270 - 333e^{2,28 - 0,006y}}$ m/s
$v = 57,2$ m/s

13-30 $15 - 0,5x$ m/s
5 m/s

13-32 $15e^{-0,50t}$ m/s
$30(1 - e^{-0,50t})$ m
10,2 s; 29,8 m

13-33 0,868 m/s^2

13-35 46,9 s

13-38 4,818 m

13-44

t	x	v	a
0	0	50	−5
10	250	0	−5
20	0	−50	−5/0
30	−500	−50	0/5
40	−750	0	5
50	−500	50	5/0
60	0	50	0

13-45

t	x	v	a
0	0	0	10
10	500	100	10
20	2000	200	10/−5
30	3750	150	−5/0
40	5250	150	0
50	6750	150	0
60	8250	150	0

13-49 222 km/h →; 222 km/h ←

13-50 35 m/s ↓ ; 35 m/s ↑

13-52 100 m/s ←; 300 m/s ←

13-55 21 km (del punto de partida de B)
12:30 pm

13-57 100 s; 750 m

13-58 4 s; 40 m

13-60 12,54 km (de la primera ciudad)
1:30 pm

13-63 2,217 min; 3,4 km

13-65 246,4 m

13-66 2 m/s ←; 1 m/s^2 →
1 m/s ←; 0,5 m/s^2 →

13-68 6 m/s ↓ ; 0,6 m/s^2 ↑
8 m/s ↓ ; 0,8 m/s^2 ↑

13-71 0,5 m/s →

13-73 0,45 m/s ↑; 0,09 m/s^2 ↑

13-74 3,333 m/s ↑; 0,1333 m/s^2 ↓

13-76 4 m/s ←; 1,2 m/s^2 →
3 m/s ←; 0,7 m/s^2 →
6 m/s ←; 1,4 m/s^2 →

13-79 0,2 m/s ←
0,5 m/s →; 0 m/s^2

13-80 1682,7 m

13-81 33,87° o bien 82,69°

13-84 2,219 m/s; 2,429 m/s

13-87 105,4 mm

13-89 $54{,}07° \leq \theta \leq 58{,}52°$
o bien $80{,}57° \leq \theta \leq 80{,}94°$

13-90 39,74 m/s; 3,332 s; 15,38 m

13-92 $(50/3t)\ [\mathbf{e}_r + \theta\mathbf{e}_\theta]$ mm/s
$(50/3t^2)\ [(-1(1+10\theta))\,\mathbf{e}_r + (20-\theta)\,\mathbf{e}_\theta]$ mm/s^2
$8{,}891\,\mathbf{e}_r + 55{,}867\,\mathbf{e}_\theta$ mm/s
$-302{,}8\,\mathbf{e}_r + 65{,}07\,\mathbf{e}_\theta$ mm/s^2

13-95 0,6921 m
− 0,202 m/s; 0,351 m/s
− 2,29 m/s^2; 3,99 m/s^2

13-97 24 rad/s

13-98 33,33 rad/s

13-100 5,477 rad/s

13-103 64,8 km/h

13-105 47,5 km/h

13-106 298,3 m

13-108 0,257 m/s^2; 5 m/s^2
2,95°

13-111 1,5226 m/s^2; 1,2 m/s^2
53,06°

13-113 95,45 s; 19,47° ⦣

13-114 6,51 m/s ; 50,19° ⦤

13-116 73,69°; 138,8 km/h

13-119 188,90 m; 6,293 m/s

13-121 $\mathbf{r}_A = \sqrt{2{,}25 - s^2}\,\mathbf{j}$ m
$\mathbf{v}_A = -s/\sqrt{2{,}25 - s^2}\,\mathbf{j}$ m/s
$\mathbf{a}_A = -2{,}25 / [2{,}25 - s^2]^{3/2}\,\mathbf{j}$ m/s^2
$-0{,}9\mathbf{i} + 1{,}2\mathbf{j}$ m
$-0{,}3\mathbf{i} - 0{,}225\mathbf{j}$ m/s
− 0,1172 m/s^2

13-122 14,278 m
$5\mathbf{i} - 14{,}01\mathbf{j}$ m/s

13-124 6,401 m/s; 9,139 m
$1{,}401\mathbf{i} - 14{,}01\mathbf{j}$ m/s

13-126 13,59 m
$5{,}670\mathbf{i} - 9{,}047\mathbf{j}$ m/s

13-128 19,70 m/s
$5{,}71\mathbf{i} - 13{,}70\mathbf{j}$ m/s^2

13-130 $-216 \operatorname{sen} 6t\ \mathbf{i} - 108\sqrt{3}\cos 6t\ \mathbf{j} - 108\cos 6t\ \mathbf{k}$
$a = 216$ m/s^2 = constante

13-131 $10t\,\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 45t^2\mathbf{k}$ m/s
$10\mathbf{i} + 90t\mathbf{k}$ m/s²

13-133 $5{,}531\mathbf{i} + 1{,}5\mathbf{j} + 2{,}327\mathbf{k}$ m/s
$6{,}980\mathbf{i} - 16{,}592\mathbf{k}$ m/s

13-136 $2\pi\mathbf{e}_\theta$ m/s
$-2\pi^2\mathbf{e}_r + 32\pi^2\mathbf{k}$ m/s²

13-138 $0{,}1443\mathbf{e}_r + 0{,}25\mathbf{k}$ m/s
$1{,}8138\mathbf{e}_\theta$ m/s²
$0{,}1443\mathbf{e}_r + 3{,}628\mathbf{e}_\theta + 0{,}25\mathbf{k}$ m/s
$-22{,}79\mathbf{e}_r + 1{,}814\mathbf{e}_\theta$ m/s²

13-139 $0{,}1820\mathbf{e}_r + 0{,}5\mathbf{k}$ m/s
$2{,}287\mathbf{e}_\theta$ m/s²
$0{,}1820\mathbf{e}_r + 6{,}861\mathbf{e}_\theta + 0{,}5\mathbf{k}$ m/s
$-43{,}11\mathbf{e}_r + 2{,}287\mathbf{e}_\theta$ m/s²

13-141 1,094 m/s²

13-144 0,11227 rad/s

13-146 0,0500 rad/s; 0 rad/s²
0 rad/s; 0,00120 rad/s²

13-147 13,33 m/s²; 7,11 m/s²

13-148 2,0 m/s

13-150 205,8 m

13-153 11,48 m/s; 4,58 m; 6,615 m

13-155 255 m; 119,7 km/h

13-156 $-4\mathbf{i} - 2{,}667\mathbf{j}$ m/s
$0{,}15\mathbf{i} + 0{,}1\mathbf{j}$ m/s²

13-158 115,2 s; 18,58 s

13-161 8,302 m/s; 54,3°

13-162 460 s; 0,114 m/s²; 28,75 km

Capítulo 14

14-1 −0,3725 rad/s
3,3056 rad/s²

14-2 $\alpha = -9\theta/4$
$\theta = 5/3 \text{ sen } (1{,}5t + C)$

14-4 2,513 s; 75,4 rev

14-7 151,3 rad/s

14-9 4,944 s; 91,13 rad/s

14-10 21,63 s; 16,00 rad/s

14-12 1,787 s; 1,271 rev
8,936 rad/s

14-15 $a = 100\sqrt{4 + 16\theta^2}$
$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\theta}\right)$

14-16 4 rad/s; 1 rad/s²
$1{,}6\mathbf{i} + 0{,}1\mathbf{j}$ m/s²

14-18 1 m/s² ↓
$-26{,}67\mathbf{i} - 1{,}5\mathbf{j}$ m/s²

14-20 3,665 rad/s²; 2,182 rad/s²
208 rpm

14-23 4,620 s
529 rpm; 353 rpm

14-24 40,4 rad/s ↻

14-25 15,71 rad/s ↻

14-27 $\omega = \dfrac{v_C r}{x\sqrt{x^2 - r^2}}$

14-30 2,078 m/s ←; 14,40 m/s² ←

14-32 0,0324 rad/s ↺; 0,00028 rad/s² ↺

14-33 5,303 cm/s ↓; 2,9835 cm/s² ↓

14-35 $v_A = \dfrac{-v_B x}{\sqrt{d^2 - x^2}}$

$$a_A = \frac{-v_B^2 - a_B x - \dfrac{x^2 v_B^2}{d^2 - x^2}}{\sqrt{d^2 - x^2}}$$

14-38 0,1607 m/s $\measuredangle$ 50°

14-40 257,2 mm/s ↑; 805 mm/s² ↓

14-41 $v = \dfrac{yb\omega \cos\theta}{y - b \text{ sen } \theta}$

$$a = \frac{(2v\omega + y\alpha)\, b \cos\theta - v^2 - yb\omega^2 \text{ sen } \theta}{y - b \text{ sen } \theta}$$

14-42 0,03235 rad/s ↺; 6,699 mm/s ↓

14-43 0,1000 rad/s ↺

14-45 0,6944 rad/s ↻; 7042,5 mm/s ←

14-48 1,764 rad/s ↻; 825,6 mm/s →

14-50 2,500 rad/s ↻; 2,083 rad/s ↻
250 mm/s →

14-51 1,1452 rad/s ↻; 614,25 mm/s $\measuredangle$ 40°

14-53 2,068 rad/s ↻
$59{,}69\mathbf{i} - 103{,}39\mathbf{j}$ mm/s

14-54 0,592 rad/s ↺; 1,130 rad/s ↻
$32{,}03\mathbf{i} + 77{,}66\mathbf{j}$ mm/s

14-56 0 rad/s; 523,6 mm/s ←

14-57 1,0000 rad/s ↺; 300,00**j** mm/s

14-59 5,6346 rad/s ↺; 1,2971 rad/s ↺

14-62 3 rad/s

14-64 8,504 rad/s

14-65 6,69 rad/s

14-67 1,2826 rad/s ↻

14-68 0,03235 rad/s ↻; 6,699 mm/s ↓ 60°

14-69 0,1000 rad/s ↻

14-71 2,068 rad/s ↺; 119,38 mm/s ∠ 60°

14-74 4,1888 rad/s ↺; 360,0 mm/s

14-76 2 rad/s ↺; 1120 mm/s ←

14-77 3,118 rad/s ↺; 1,5 rad/s ↻
77,94 cm/s →

14-79 0 rad/s; 3 m/s →

14-82 30 rad/s ↺; 13,5 m/s →
4,5 m/s ←; 11,906 m/s ∠ 40,89°

14-84 6 rad/s ↺

14-85 45,0 rad/s ↻; 15 rad/s ↺
1778,75 mm/s ∠ 71,57°

14-86 0,00028 rad/s^2 ↻; 0,00087 m/s^2 ↓

14-87 0 rad/s^2
0,390**i** – 1,878**j** cm/s^2

14-89 6,570 rad/s^2 ↻; 0,6034 rad/s^2 ↺

14-92 18,277 rad/s^2 ↻
– 600**i** – 1827,7**j** mm/s^2

14-94 1210**i** – 3720**j** mm/s^2
– 1230**i** – 2440**j** mm/s^2

14-95 17,97 rad/s^2 ↻; 35,28 rad/s^2 ↺

14-97 3,6 rad/s^2 ↻; 1,800 rad/s^2 ↻
0,225 m/s^2 ←

14-100 13,391 rad/s^2 ↻

14-102 2 rad/s^2 ↻; 12,00 m/s^2 ↑

14-103 12,677 rad/s^2 ↻

14-104 13,678 m/s ∠ 23,97°
4,280 m/s^2 ∠ 22,25°

14-105 31,62 m/s ∠ 26,01°
5,92 m/s ∠ 51,14°

14-106 11,565 m/s ∠ 46,10°
4,140 m/s^2 ∠ 82,95°

14-109 28,35 m/s ∠ 1,87°
9,128 m/s^2 ∠ 49,99°

14-111 142,50 mm/s ∠; 0,6500 rad/s ↻

14-112 0,962 rad/s ↻; 173,08 mm/s ∠

14-114 2,022 rad/s^2 ↺; 623,4 mm/s^2 ∠

14-117 0,6283 rad/s ↻; 5,527 rad/s^2 ↻

14-119 0,8976 rad/s ↻; 66,98 rad/s^2 ↺

14-120 2,514 m/s ∠ 88,57°
15,811 m/s^2 ∠ 2,862°

14-122 2900 mm/s ←; 42 000 mm/s^2 ↑
3100 mm/s →; 48 000 mm/s^2 ↑

14-125 301 cm/s ∠ 85,24°
4562,5 cm/s^2 ∠ 9,46°
301 cm/s ∠ 85,24°
4562,5 cm/s^2 ∠ 9,46°

14-127 25 cm/s ←; 718,75 cm/s^2 ↑
25 cm/s ←; 781,25 cm/s^2 ↓

14-128 2924 mm/s ∠ 1,26°
42 800 mm/s^2 ∠ 86,08°
3078 mm/s ∠ 1,20°
47 390 mm/s^2 ∠ 86,46°

14-130 2900 mm/s →
42 060 mm/s^2 ∠ 88,64°
3100 mm/s ←
48 060mm/s^2 ∠ 88,81°

14-131 $\Delta\theta y = 90°$

14-132 $\Delta\theta y = 90°$

14-134 No hay variación

14-137 – 5**j** + 3**k** rad/s
15**i** – 10**k** rad/s^2
– 1525**i** – 1125**j** mm/s
6375**i** – 2700**j** – 3125**k** mm/s^2

14-139 – 75**i** – 125**j** rad/s
250**i** + 375**k** rad/s^2
– 275**k** mm/s
– 3125**i** + 1050**j** + 3000**k** mm/s^2

14-140 – 563,8**j** – 200,2**k** rpm
30,91**i** rad/s^2

14-142 88,54 mm/s↓ ; 21,06 mm/s^2↓
$0{,}10494\mathbf{i} - 0{,}02460\mathbf{j} + 0{,}02778\mathbf{k}$ rad/s
$0{,}01097\mathbf{i} = 0{,}00585\mathbf{j}$ rad/s^2

14-144 571,3 mm/s↓ ; 339,6 mm/s^2
$0{,}70787\mathbf{i} - 0{,}15869\mathbf{j} + 0{,}19353\mathbf{k}$ rad/s
$0{,}26663\mathbf{i} - 0{,}09435\mathbf{j} - 0{,}19927\mathbf{k}$ rad/s^2

14-146 $-1500\mathbf{i}$ mm/s; $2770\mathbf{i}$ mm/s^2
0 rad/s
$-3{,}750\mathbf{i} + 6{,}924\mathbf{j} - 1{,}385\mathbf{k}$ rad/s^2

14-148 $-6{,}928\mathbf{e}_x$ m/s; $-0{,}2076\mathbf{e}_y - 14{,}24\mathbf{e}_z$ m/s^2

14-150 $519{,}6\mathbf{e}_x + 226{,}5\mathbf{e}_y - 125{,}0\mathbf{e}_z$ mm/s
$-2685\mathbf{e}_x - 1602\mathbf{e}_y + 25\mathbf{e}_z$ mm/s^2

14-151 $100\mathbf{e}_x + 125\mathbf{e}_y + 216{,}5\mathbf{e}_z$ cm/s
$3614\mathbf{e}_x + 2165\mathbf{e}_y - 2050\mathbf{e}_z$ cm/s^2

14-153 0,4744 rad/s ↘ ; 0,16422 rad/s^2 ↘
$-59{,}30\mathbf{i} + 59{,}30\mathbf{j}$ mm/s
$-48{,}66\mathbf{i} + 20{,}53\mathbf{j}$ mm/s^2

14-158 $40{,}6991\mathbf{i}$ m/s; $-3553\mathbf{j}$ m/s^2
$-34{,}6991\mathbf{i}$ m/s; $3553\mathbf{j}$ m/s^2
Está a 31,8 mm del centro

14-160 2,341 rev; 5,423 rad/s; 1,947°
0,2203 rev; 5,261 rad/s; 19,864°
0,0859 rev; 4,627 rad/s; 42,811°

14-161 $-6{,}396\mathbf{i} + 233{,}42\mathbf{j} + 128{,}80\mathbf{k}$ m/s
$-167{,}95\mathbf{i} + 6126{,}35\mathbf{j}$ m; 5740,4 m

14-163 12,876 m/s ↘ 0,7484° ; 1,4555 m/s^2 ↘ 1,846°
89,58 m por debajo de *A*

Capítulo 15

15-1 1281 N; 781 N

15-2 2000 N

15-3 184,4 N
3,381 m/s^2

15-4 84,4 N
0,573

15-7 22,46 m/s; 56,16 m
10,94 m/s; 27,35 m

15-8 2,406 m/s^2
3,531 s
6,937 m/s

15-11 0,6792 m/s^2
269,2 N; 471,1 N

15-12 67,80 N

15-15 6,509 m/s
5,398 m

15-16 4,905 m/s^2 ↗
2,548 m

15-19 1,5092 m/s^2↑ ; 461,5 N

15-20 210,2 N; 420,4 N

15-23 0,6667 m/s^2↓
185,0 N
197,59 N

15-24 1,149 m/s^2 ↗
256,8 N
6,243 m/s

15-27 45,82 N
0,3337s
0,2503 m →

15-28 46,25 N
2,803 m/s↓
7,007 m↓

15-30 0,1369 m/s^2 →
17,491 N
1,7108 m →

15-32 41,2 m/s^2 ←
2,153 s
60,265 m

15-35 1,7153 m/s ↓
10,900 m/s^2↓

15-36 54,75 m/s
10,222 s

15-38 0,06416 m/s ↑
9,808 m/s^2↑
98,09 N

15-40 0,9574 m/s↓

15-43 8567 m; 42,84 s

15-44 1146,8 m
7945 m
30,58 s

15-47 20 865 m
65,57 s

15-48 4988 m
25,48 s

15-51	134,00 N ⦢ 50,659°
15-52	20,65 N ⦣ 54,462°
15-54	94 km/h
15-56	3141 N; 24 360 N
15-59	16,24°; 0,291
15-60	0,213
15-62	30,65 N
15-64	65,534°; 11,844 N
15-66	62,513 N 2,9147 rad/s
15-68	31,215 N 20,00 m
15-69	7457,72 m/s 10 547 m/s
15-70	7405 m/s 11 107 m/s
15-72	42 247 km 3072 m/s
15-74	0,280 5843 km 4848,1 m/s
15-76	0,06693 6833 m/s; 7813 m/s 107,1 min
15-78	2630 km 4465 m/s; 7742 m/s 218,0 min
15-80	0,11166 1745,3 m/s 135,2 min
15-82	2083 m/s; 5544 m/s
15-84	0,18025 511,7 m/s 466,9 m/s 347,3 min
15-86	168,3 m/s; 164,7 m/s
15-88	1680,55 m/s; 87,478° 36,48 m/s
15-90	0,37214 409 km 8983,9 m/s; 4110,8 m/s 172,2 min
15-93	334,64 kN 63,46 m
15-94	2,190 m/s^2 21,90 m/s 95,6 s
15-96	5585 N
15-98	75,52 N 4,995 m/s^2 ⦤ 40,892° 1,888 m/s^2
15-101	15 481 m
15-102	10 N ← 80 kN/m
15-107	7073,54 m/s 117,9 s
15-108	7118,3 m/s 10 067 m/s 11 028 m/s

Capítulo 16

16-1	0,763 m/s^2 → 1376,7 N ⦢ 78,69° 3212 N ⦢ 78,69°
16-2	0,372 m/s^2 → 1659,1 N ⦢ 81,47° 2111,6 N ⦢ 81,47°
16-5	10,569 s
16-6	5,924 s; 2,998 s
16-8	6,039 s; 2,998 s
16-10	7479,5 N; 2330,5 N
16-13	1502,1 N; 300,4 N 869,6 N; 173,93 N
16-14	2,453 m/s^2; 0,533
16-17	187,5 – 2389 sen θ
16-18	458,7 N; 56,35 N 147,15 N ⦢ 30°
16-21	0,8918 m/s^2 ↓ 2727 N
16-22	11,412 rad/s^2 ↻ 126,63 N
16-25	13,08 rad/s^2 ↻ 41,67 N 0 N →; 291,67 N ↑
16-26	781,4 N 292,4 N ⦣ 66,732°

16-29 $6{,}288\ rad/s^2$ ↲
$91{,}83$ N ↗ $59{,}86°$

16-30 $441{,}45$ N ←; $73{,}575$ N ↑

16-33 $7{,}3575\ m/s^2$ ↓
25 N ↑

16-34 $33{,}333\ rad/s^2$
$166{,}67$ N →; $1754{,}8$ N ↓

16-37 $0{,}181318\ m/s^2$ ↑
$245{,}38$ N

16-38 $69{,}06$ N
$139{,}54$ N ←; $692{,}2$ N ↑

16-42 $478{,}9$ N ←; $87{,}96$ N ↑

16-44 $18{,}426\ rad/s^2$ ↲
$0{,}155$

16-47 $13{,}138\ rad/s^2$ ↲
$89{,}33$ N ←; 275 N ↑

16-48 $4\ m/s^2$ →; $30{,}72\ rad/s^2$ ↲
$4{,}602\ m/s^2$ →; $23{,}011\ rad/s^2$ ↲

16-50 $0{,}6404\ m/s^2$ ←
$154{,}65$ N

16-52 $2{,}0940\ m/s^2$ ↓
$544{,}9$ N; $385{,}8$ N

16-55 5,40 m

16-56 1,487 s; 8,784 m

16-59 $4{,}459\ rad/s^2$ ↲
$44{,}51$ N ↗ $71{,}16°$
$51{,}98°$

16-60 $12{,}191\ rad/s^2$ ↳
$13{,}334$ N
$255{,}5$ N; $169{,}24$ N

16-63 $3{,}6740\ rad/s^2$ ↲
$4{,}1077\ m/s^2$ ↗ $26{,}565°$
$87{,}65$ N; $105{,}93$ N

16-64 $9{,}443\ rad/s^2$ ↲
$60{,}33$ N

16-67 $23{,}550\ rad/s^2$ ↳
$97{,}42$ N ↘; $9{,}578$ N ↗

16-68 $10{,}025\ rad/s^2$ ↲
$382{,}7$ N ↗; $79{,}556°$

16-71 $31{,}81$ N ↗; $54{,}93$ N ↑

16-72 $3{,}398\ rad/s^2$
$74{,}266$ N ↑; $59{,}551$ N ↘

16-76 $69{,}45$ N →; $121{,}46$ N ↑
$76{,}12$ N ←; $21{,}15$ N ↓
$101{,}14$ N ←

16-78 $-1956{,}9\mathbf{k}$ N
$2447{,}4\mathbf{k}$ N

16-80 $-2940{,}1\mathbf{k}$ N
$-1461{,}9\mathbf{k}$ N

16-82 $-3000\mathbf{i} + 59{,}95\mathbf{k}$ N
$-1500\mathbf{i} + 38{,}15\mathbf{k}$ N

18-84 $10{,}667\mathbf{i} - 2940{,}1\mathbf{k}$ N
$5{,}333\ N\mathbf{i} - 1461{,}9\mathbf{k}$ N

18-86 $-4306\mathbf{i} - 9730{,}9\mathbf{j} + 161{,}9\mathbf{k}$ N
$-9740{,}2\mathbf{i} - 4347{,}2\mathbf{j}$
$5{,}254$ m · N

16-87 $-7{,}800\mathbf{i} - 3020\mathbf{j}$ N
$7{,}800\mathbf{i} + 3220\mathbf{j}$ N

16-88 $-0{,}3996\mathbf{i} - 27{,}361\mathbf{j}$ N
$0{,}3996\mathbf{i} + 105{,}84\mathbf{j}$ N

16-90 $-66{,}601\mathbf{i} + 39{,}640\mathbf{j}$ N
$66{,}601\mathbf{i} + 38{,}840\mathbf{j}$ N

16-92 $-344{,}6\mathbf{j} + 107{,}91\mathbf{k}$ N
$1931{,}1$ N

16-94 $25{,}286\mathbf{i} - 344{,}6\mathbf{k} + 107{,}91\mathbf{k}$ N
$-6{,}069\mathbf{j} - 6{,}995\mathbf{k}$ m · N
$1931{,}1$ N

16-96 $-44{,}744\mathbf{i}$ N; $-2131\mathbf{i}$ N
$490{,}5\mathbf{j}$ N

16-97 2892 N; 12 608 N
0,755

16-98 339,58 N

16-101 99,84 m· N
4946 N ↖ $65{,}70°$

16-102 0,2865 rev
3,605 rad/s

16-104 $4{,}204\ m/s^2$ ↓; $84{,}086$ N
$1{,}72076\mathbf{i} - 2{,}92695\mathbf{j}\ m/s^2$
$103{,}246\mathbf{i} + 25{,}8114\mathbf{j}$ N

16-106 $78{,}152$ N
$186{,}94$ N ↗ $71{,}473°$
$34{,}402$ N ←

Capítulo 17

17-1 Debe desviarse 29,8 m más allá de la res
17,08 m/s

17-3	657 m
17-4	17,69 m 31,48 m
17-6	29 550 N
17-8	99,6% 1,596 m/s
17-10	6,65 m/s 11,27 m
17-12	3,145 m/s 5,155 m/s 5,42 m
17-14	0,262 m 6,53 m a la izquierda de la posición inicial
17-16	0,34
17-18	25,0 J
17-20	$\delta_1 = 140{,}4$ mm $\delta_1 = 40{,}4$ mm
17-22	9,27 m/s
17-24	8,32 m/s 831 mm
17-26	5,42 m/s
17-28	157,0 N/m
17-30	0,431 m/s; 0,0527 m 0,1055 m No rebotan
17-32	0,2356 m
17-36	0,900 m/s 0,277 m
17-37	0,316
17-38	3,145 m/s 5,155 m/s 5,42 m
17-39	21,80° 2,89 m/s 1,420 m
17-40	0,262 m 6,53 m a la izquierda de la posición inicial
17-42	9,27 m/s
17-44	49,05 N/m
17-46	6,49 m/s 5,85 m/s
17-48	6,07 m/s 20,60 N
17-50	4,593 m/s 15,45 N
17-52	42,8°
17-54	16,67 N
17-56	2,30 m/s
17-58	0,375 m 1,472 N
17-60	157,0 N/m
17-62	0,431 m/s; 0,0527 m 0,1055 m No rebotan
17-64	0,2356 m
17-66	2,170 m/s 2,396 m/s
17-68	4,08 m/s 8,17 m/s 0,850 m
17-70	490,5 W 490,5 W
17-72	2,677 m/s 856 W
17-74	3320 W 13 220 W 14 720 W
17-76	0,2917 m 0,04905 m
17-78	31,0 kW 1,333 m/s
17-80	$3{,}86 \text{ m/s} < v_0 < 3{,}96 \text{ m/s}$
17-82	2,02 m/s 2,11 m/s
17-84	6,30 m/s 2,99 m/s 9,99 m/s
17-87	15,77 kW 77 km/h

Capítulo 18

18-1	16,42 rev
18-2	616 m · N
18-4	0,8803 m 47,9 rad/s
18-6	6,07 rad/s 118,5 N ⦠ 76,5°

18-8 6,014 rad/s, 4543 N ∠ 86,316°
5,419 rad/s, 2472 N ∠ 51,648°
7,135 rad/s, 5348 N ∠ 1,680°

18-9 3,942 rad/s
13,204 N ∠ 27,03°

18-11 4,34 rad/s
160,7 ∠ 53,3°

18-14 55,15°

18-16 53,97°

18-18 22,35 m
14,90 m

18-19 1,77 m/s; 5,00 rad/s
0,736 m

18-22 4,15 m/s; 27,67 rad/s
5,53 m/s

18-24 0,2387 m
0,515 m/s; 3,432 rad/s
1,029 m/s
0,2177 m

18-26 $-5{,}495\mathbf{i} + 92{,}16\mathbf{j}$ N
$83{,}2\mathbf{i}$ N

18-28 $-0{,}0397\mathbf{i} + 102{,}63\mathbf{j}$ N
$-2{,}598\mathbf{i} + 68{,}57\mathbf{j}$ N

18-30 45,00°
desliza antes

18-32 9,38 rad/s
$18{,}48\mathbf{i} + 6{,}52\mathbf{j}$ m/s

18-34 3,93 rad/s antihorario
9,82 m/s^2 ↓

18-36 1,559 m
1,657 rad/s antihorario; 1,134 m/s →
94,2 N

18-38 3,00 rad/s ↘
7,49 m/s ↓

18-40 70,53°
3,13 rad/s
2,09 m/s

18-42 11,87 m/s ↑

18-44 5,476 m/s ↓

18-46 11,503 rad/s
0,415 m/s →

18-48 22,33 N

18-49 $v = \sqrt{4gd/5}$
$v = \sqrt{5gd/7}$
$v = \sqrt{2gd}$

18-52 2,506 m/s ↓

18-53 5,67 rad/s ↻, 1,133 m/s →
6,54 rad/s ↻, 2,62 m/s ←

18-56 2,760 horario, 0 m/s
1,949 horario, 5,85 m/s ←

18-57 120,19 J

18-58 199,4 J

18-60 137,41 J

18-62 372,0 J

18-64 2,477 J

18-66 9,363 J

18-68 3,33 J

18-70 213,3 J

18-72 4,374 m · N

18-74 15,81 rad / s

18-76 9,22 rad / s

18-78 60-20 rad / s

18-81 104,5 m
91,1 m

18-82 118,3 mm
3,14 rev

18-84 4,27 m/s
490,5 N
1,038 m

18-86 8,57 J

18-88 2,770 m/s →
1,565 N ←
117,1 N ↑

18-90 4,45 m / s

18-92 736 rev
1,473 m · N

Capítulo 19

19-1 0,3629 N
0,204

19-2 14,16 s

19-4 185,7 N
0,183

19-6 $14{,}821\mathbf{i} + 5{,}745\mathbf{j}$ m/s
$19{,}27\mathbf{i} + 8{,}618\mathbf{j}$ m/s
$14{,}821\mathbf{i} + 5{,}745\mathbf{j}$ m/s

19-8 $18{,}035\,\mathbf{i} + 19{,}151\,\mathbf{j}$ m/s

19-10 41,7 N ∠ 10,72°

19-12 $33{,}5(-0{,}5599\mathbf{i} + 0{,}7708\mathbf{j} + 0{,}3040\mathbf{k})$ m/s
$47{,}6(-0{,}6968\mathbf{i} + 0{,}7172\mathbf{j} + 0{,}0080\mathbf{k})$ m/s
$54{,}9(-0{,}7099\mathbf{i} + 0{,}6831\mathbf{j} + 0{,}1718\mathbf{k})$ m/s

19-14 7,848 s
7,50 m/s; 14,114 s
19,59 s

19-16 8,186 s
15,68 s; 12,39 m/s
23,57 m/s

19-18 $5{,}667\mathbf{i} + 5{,}167\mathbf{j}$ m
$0{,}6667\mathbf{i} + 2{,}333\mathbf{j}$ m/s

19-22 9,62 km/h

19-24 $-2{,}000\mathbf{i} + 7{,}50\mathbf{j}$ N · s
$-1{,}666\mathbf{i} + 6{,}250\mathbf{j}$ m/s
750 m
1 s

19-26 – 31,66; 1078,9 m
$7{,}88\mathbf{i} - 72{,}30\mathbf{j} + 7{,}43\mathbf{k}$ N · s
24 370 N

19-28 4,293 m/s
187,8 mm
102,3 m/s^2

19-30 6,977 m/s
8,27 m

19-32 13,636 m/s
0,0903 m

19-34 147,6 m/s

19-35 0,5737 m/s
8,58°

19-36 25,4 km/h; 35,2 km/h

19-38 –1,0909 m/s; 0,3091 m/s
46,4%
– 309 N

19-40 – 0,900 m/s; 2,700 m/s
19,00%
–1140 N

19-44 –0,9454 m/s; –0,3086 m/s
2,0483 m/s; 60,6%

19-47 0,913
0,530 m

19-48 40,97°; 2,87°

19-50 74,28°

19-52 1,21305 m/s →
46,99°

19-55 1,275 m/s ∠ 80,93°
5,01 m/s ∠ 20,31°

19-56 4,331 m/s ∠ 60,83°

19-58 2,887 m/s
2,091 kg; 2,391 m/s

19-60 0,630 m
1,031 m
0,438 m

19-62 $x = 0{,}376$ m
$y = 0{,}343$ m

19-64 67,16°

19-66 12,5 m/s

19-67 0,3125 rad/s

19-70 2463 m/s; 4845 m/s

19-71 37,04°

19-72 1,1654 m
0,1871 m

19-74 3,112 m/s; 25,37°
0,8342 m; 1,199 m/s
4,472 m/s; 158,12°

19-79 15,96 N ∠ 45°

19-80 6,26 N

19-82 383,6 kN

19-85 0,0004055 m^3/s

19-87 0,085

19-88 15,31 m/s

19-90 –27 000 N
–12,272 m/s^2
6780 m/s

19-92 154,8 m/s

19-94 0,333 m/s

19-96 4987N ←

19-98 2 N; 2 N; 2 N

19-102 4,429 m/s

19-103 14,32 m
40,7%

19-104 $b = 0{,}397$ m
$c = 0{,}397$ m
$h = 0{,}07322$ m

19-107 1,5018 m/s ↘ 62,83°
45,84°

19-109 42,93°
1,4346 m/s
15,25 N

19-112 5,988 m/s

19-114 2,38 m/s →
0,077 m/s ←

Capítulo 20

20-1 0,1876 m · N

20-2 0,0503 m · N

20-4 32,65 m/s

20-6 24,50 m/s

20-8 4,96 s
19,77 s

20-10 16,01 s
157,1 rad/s ↻
78,5 rad/s ↺

20-12 47,62 rad/s ↺ ; 31,75 rad/s ↻
95,24 rad/s ↻ ; 142,86 rad/s ↺
158,73 rad/s ↻ ; 238,10 rad/s ↺

20-14 9,15 s
13,46 m/s ←
89,76 rad/s antihorario

20-16 12,57 m/s →

20-20 4,269 m/s

20-22 2,344 rad/s antihorario
1093,8 N ↓

20-24 0,5333 m

20-25 6,393 rad/s ↻
377,6 N
377,6 N
70,0 %

20-26 8,108 rad/s ↻
10,378 N
649 N ←
98,8 %
141,78°

20-28 2,113 rad/s ↻
655 N ←
99,9 %
28,51°

20-31 $2\ell/3$
$5\ell/6$
no existe

20-33 3,900 m/s ↘ 87,94°
0,4780 m/s →
3,902 rad/s
122,5 mm sobre G

20-34 6,811 m/s ↗ 70,70°
0,991 m/s →
2,937 rad/s
338 mm sobre G

20-38 $4{,}2064\mathbf{i} + 7{,}2856\mathbf{j}$ m/s
$-2{,}490\mathbf{i} + 7{,}2852\mathbf{j}$ m/s
4019 N
32,78°

20-40 $8{,}577\mathbf{i} + 4{,}952\mathbf{j}$ m/s
$-4{,}908\mathbf{i} + 7{,}587\mathbf{j}$ m/s
286,0 N

20-42 0,518
2,293 rad/s
427,4 N →

20-44 66,2°
21,65 rad/s antihorario
0,890 m/s ↑

20-46 12,135 rad/s ↻ ; 15,556 rad/s ↻
6930 N ↘ 68,61°

20-49 $-0{,}01621\mathbf{j} + 0{,}00811\mathbf{k}$ m · N · s
63,43°

20-50 $0{,}04241\mathbf{i} + 0{,}05655\mathbf{j}$ m · N · s
36,87°

20-54 $-0{,}84823\mathbf{j} + 3{,}30753\mathbf{k}$ m · N · s
14,38°

20-56 $0{,}00723\mathbf{j} - 0{,}00599\mathbf{k}$ m · N · s
39,64°

20-58 $0{,}8263\mathbf{j} + 0{,}9468\mathbf{k}$ m · N · s
48,89°

20-60 $-2\mathbf{i}$ m/s
$40\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$ rad/s
48,89°

20-62 0°
$-3{,}5\mathbf{i}$ m/s

20-64 0°
$3{,}333\mathbf{i}$ m/s

20-66 54,09°
$3{,}179\mathbf{i} + 1{,}010\mathbf{j} - 0{,}882\mathbf{k}$ m/s

20-68 7,33°
$0{,}3816\mathbf{i} + 1{,}3249\mathbf{j} - 0{,}7470\mathbf{k}$ m/s

20-70 $-1{,}402\mathbf{i}$ m/s
$28{,}04\mathbf{j} + 10{,}61\mathbf{k}$ rad/s
$9{,}81\mathbf{i}$ m/s

20-72 $-5{,}023\mathbf{i}$ N · s
$0{,}7535\mathbf{j} + 1{,}3051\mathbf{k}$ m· N · s
$-12{,}558\mathbf{i}$ m/s

20-74 $-2{,}197\mathbf{i} - 0{,}1491\mathbf{j} + 0{,}3159\mathbf{k}$ m/s
$0{,}7897\mathbf{i} + 26{,}172\mathbf{j} + 14{,}985\mathbf{k}$ rad/s
$-12{,}117\mathbf{i} - 0{,}0306\mathbf{j} + 0{,}6317\mathbf{k}$ m/s

20-76 12,82 m · N
$1{,}301\mathbf{j} + 2{,}253\mathbf{k}$ m · N · s
$-23{,}658\mathbf{i} - 0{,}954\mathbf{j} + 0{,}551\mathbf{k}$ m/s

20-78 14,20 m/s

20-79 0,800 s

20-81 $v_0 = 1{,}051\sqrt{(ag)}$
$\mathbf{v}_G = 0{,}5574\sqrt{(ag)}$ ∠ 45°
$\omega = 0{,}7882\sqrt{(a/g)}$

20-82 $h = 7r/5$

20-85 $v_A = 0;\ \omega_A = v_0/r$
$v_B = v_0;\ \omega_B = 0$
$v_{Af} = 2v_0/7$
$v_{Bf} = 5v_0/7$

20-86 2,451 rad/s ↺; 1,255 m/s ∠; 36,780°
4,411 rad/s

20-88 $-5{,}314\mathbf{i} - 1{,}137\mathbf{j} + 0{,}656\mathbf{k}$ m/s
$27{,}89\mathbf{j} + 48{,}32\mathbf{k}$ rad/s
71,11 m· N

20-90 8,036 rad/s; 1,607 m/s
58,7%
1,841 m/s

Capítulo 21

21-1 $\dot{x}(t) = -8\pi \text{ sen } \pi t$ cm/s
$\ddot{x}(t) = -8\pi^2 \cos \pi t$ cm/s^2

21-2 $\dot{x}(t) = (5\pi/4) \cos \pi t/4$ mm/s
$\ddot{x}(t) = -(5\pi^2/16) \text{ sen } \pi t/4$ mm/s^2

21-4 $\dot{x}(t) = (30\pi/4) \cos (3\pi t/4 + 8\pi/8)$ mm/s
$\ddot{x}(t) = -(90\pi^2/16) \text{ sen } (3\pi t/4 + 8\pi/8)$ mm/s^2

21-7 $x(t) = 5 \cos (\pi t + 0{,}9273)$ cm
$v_{\text{máx}} = 5\pi$ cm/s en $x = 0$ cm
$a_{\text{máx}} = 5\pi^2$ cm/s^2 en $x = -5$ cm

21-9 $x(t) = 10 \cos (10t - 0{,}6435)$ cm
$v_{\text{máx}} = 100$ cm/s en $x = 0$ cm
$a_{\text{máx}} = 1000$ cm/s^2 en $x = -10$ cm

21-10 $x(t) = 26 \cos (3\pi t/4 + 1{,}1760)$ mm
$v_{\text{máx}} = 61{,}26$ mm/s en $x = 0$ mm
$a_{\text{máx}} = -144{,}34$ mm/s^2 en $x = -26$ mm

21-13 $x(t) = 13 \text{ sen } (\pi t + 2{,}7468)$ cm
0,1257 s; 0,6257 s

21-14 $x(t) = 5 \text{ sen } (\pi t/2 + 0{,}9273)$ mm
1,4097 s; 0,4097 s

21-17 $x(t) = 5 \text{ sen } (\pi t + \pi/2)$ cm
0,5 s; 0 s

21-19 48,63 mm; 1,5278 m/s

21-22 1,732 m/s

21-24 $k = k_1 + k_2$

21-25 $k = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

21-27 $\ddot{y} + 294{,}3y = 0$
0,3662 s; 280 mm
$y(t) = -218{,}6 \text{ sen } 17{,}155t - 175 \cos 17{,}155t$ mm
0,1437 s

21-30 $\ddot{x} + 700x = 0$
0,2375 s; 39,23 mm
$x(t) = 30{,}24 \text{ sen } 26{,}458t + 25 \cos 26{,}458t$ mm
0,09263 s

21-32 $\ddot{x} + 181{,}818x = 0$
13,484 rad/s; 0,4660 s

21-34 $\ddot{x} + 342{,}857x = 0$
2,947 Hz; 0,3393 s

21-36 $y(t) = 332{,}2 \text{ sen } 20t$ mm

21-38 $y(t) = 210{,}11 \text{ sen } 15{,}811t - 14{,}715 \cos 15{,}811t$ mm

21-40 $\ddot{y}_G + 533{,}33y_G = 0$
3,6088 Hz; 0,2771 s

21-42 $\ddot{\theta} + 32{,}700\theta = 0$
0,9101 Hz; 1,0988 s

21-43 $\ddot{\theta} + 31{,}39\theta = 0$
0,8917 Hz; 1,1215 s

21-46 $\ddot{\theta} + 1650\theta = 0$
0,6093 m/s

21-48 $\ddot{\theta} + 127{,}87\theta = 0$
1,7986 Hz; 0,556 s

21-50 $\ddot{y} + 266{,}667y = 0$
2,599 Hz; 0,3848 s

21-52 $\ddot{x} + 299{,}861x = 0$
2,7563 Hz; 0,3628 s

21-54 $\ddot{\theta} + 28{,}095\theta = 0$
0,8436 Hz; 1,1854 s

21-55 subamortiguado
$\dot{x}(t) = e^{-0{,}1t}[-\cos(5t-1{,}2) - 50 \operatorname{sen}(5t-1{,}2)]$ cm/s
$\ddot{x}(t) = e^{-0{,}1t}[-249{,}9 \cos(5t-1{,}2) + 10 \operatorname{sen}(5t-1{,}2)]$ m/s^2

21-56 amortiguamiento crítico
$\dot{x}(t) = (-7-6t)e^{-2t}$ mm/s
$\ddot{x}(t) = (8+12t)e^{-2t}$

21-58 subamortiguado
$\dot{x}(t) = e^{-0{,}05t}[-18{,}4 \cos 3t - 23{,}7 \operatorname{sen} 3t]$ mm/s
$\ddot{x}(t) = e^{-0{,}05t}[-70{,}18 \cos 3t + 56{,}39 \operatorname{sen} 3t]$ mm/s^2

21-60 amortiguamiento crítico
$\dot{x}(t) = (8-7{,}5t)e^{-1{,}5t}$ rad/s
$\ddot{x}(t) = (-19{,}5 + 11{,}25t)e^{-1{,}5t}$ rad/s^2

21-63 amortiguamiento crítico
$\dot{x}(t) = (-9+2t)e^{-0{,}2t}$ cm/s
$\ddot{x}(t) = (3{,}8-0{,}4t)e^{-0{,}2t}$ cm/s^2

21-65 amortiguamiento crítico
$\dot{x}(t) = (-5{,}8+1{,}2t)e^{-1{,}2t}$ rad/s
$\ddot{x}(t) = (8{,}16-1{,}44t)e^{-1{,}2t}$ rad/s^2

21-66 subamortiguado
$\dot{x}(t) = e^{-0{,}15t}[-0{,}9 \operatorname{sen}(10t-2{,}5) + 60 \cos(10t-2{,}5)]$ mm/s
$\ddot{x}(t) = e^{-0{,}15t}[-600 \operatorname{sen}(10t-2{,}5) - 18 \cos(10t-2{,}5)]$ mm/s^2

21-69 subamortiguado
$x(t) = e^{-5t}[3 \cos 7{,}416t + 4{,}045 \operatorname{sen} 7{,}416t]$ cm
$\dot{x}(t) = e^{-5t}[15 \cos 7{,}416t - 42{,}47 \operatorname{sen} 7{,}416t]$ cm/s
$\ddot{x}(t) = e^{-5t}[-390 \cos 7{,}416t + 101{,}13 \operatorname{sen} 7{,}416t]$ cm/s^2

21-70 sobreamortiguado
$x(t) = -31{,}771e^{-5{,}53t} + 1{,}771e^{-14{,}47t}$ mm
$\dot{x}(t) = 175{,}63e^{-5{,}53t} - 25{,}63e^{-14{,}47t}$ mm/s
$\ddot{x}(t) = -970{,}9e^{-5{,}53t} + 370{,}9e^{-14{,}47t}$ mm/s^2

21-72 subamortiguado
$x(t) = e^{-t}[100 \cos 4{,}359t + 57{,}35 \operatorname{sen} 4{,}359t]$ mm
$\dot{x}(t) = e^{-t}[150 \cos 4{,}359t - 493{,}2 \operatorname{sen} 4{,}359t]$ mm/s
$\ddot{x}(t) = e^{-t}[2300 \cos 4{,}359t - 160{,}6 \operatorname{sen} 4{,}359t]$ mm/s^2

21-75 amortiguamiento crítico
$x(t) = (-15-75t)e^{-5t}$ cm
$\dot{x}(t) = 375te^{-5t}$ cm/s
$\ddot{x}(t) = (375-1875t)e^{-5t}$ cm/s^2

21-77 $c = c_1 + c_2$

21-80 $\ddot{y} + 25\dot{y} + 666{,}7y = 0$
0,278 s
$y(t) = e^{-12{,}5t}[-5 \cos 35{,}438t - 14{,}550 \operatorname{sen} 35{,}438t]$ mm
0,0552 s

21-82 $4\ddot{y} + 125\dot{y} + 6000y = 0$
0,1773 s
$y(t) = e^{-15{,}625t}[5 \cos 35{,}438t - 14{,}550 \operatorname{sen} 35{,}438t]$ mm
0,0552 s

21-83 2,46
sobreamortiguado
No hay frecuencia o periodo
40,13 cm

21-84 1,434
sobreamortiguado
No hay frecuencia o periodo
188,3 mm

21-88 8,032 N · s/m

21-90 0,986 s
1,190 s; 2,48 ciclos

21-92 1,0541
Sobreamortiguado
No hay frecuencia o periodo

21-94 11,041
Sobreamortiguado
No hay frecuencia o periodo

21-96 Igual que las ec. 21-39 y 21-40

21-98 $20\ddot{x} + 40\dot{x} + 500x = 2500 \operatorname{sen} 8t - 1600 \cos 8t$
$x(t) = 3{,}521 \operatorname{sen}(8t + 2{,}962)$ mm

21-100 $2\ddot{y} + 50\dot{y} + 1333{,}33y = 600 \operatorname{sen} 20t$
$y(t) = e^{-12{,}5t}[472{,}1 \cos 22{,}593t + 112{,}3 \operatorname{sen} 22{,}593t] + 529{,}4 \operatorname{sen}(20t - 1{,}081)$ mm

21-102 $4\ddot{y} + 125\dot{y} + 6000y = 150 \operatorname{sen} 8t$
$y(t) = e^{-12{,}625t}[-2{,}587 \cos 35{,}438t + 6{,}842 \operatorname{sen} 35{,}438t] + 28{,}766 \operatorname{sen}(18t - 0{,}4462)$ mm

21-104 33,95 mm
$5{,}298 \le \Omega \le 8{,}629$ rad/s

21-106 53,20 mm

21-108 86,3 mm

21-110 1,10 mm
1,46 mm

21-112 34,54 mm

21-114 46,17 mm

21-116 $\ddot{x} + 181,818x = 0$

21-118 $\ddot{x} + 342,86x = 0$

21-120 $\ddot{y}_G + 533,33y_G = 0$

21-122 $\ddot{\theta} + 1650\theta = 0$

21-124 $\ddot{y}_G + 266,67y_G = 0$

21-125 14,577 rad/s

21-126 59,161 rad/s

21-128 35,355 rad/s

21-130 13,484 rad/s

21-132 18,516 rad/s

21-134 5,718 rad/s

21-136 4,952 rad/s

21-138 5,301 rad/s

21-139 357 N/m
0,1433 N · s/m

21-140 $4,5\ddot{\theta} + 5,4\dot{\theta} + 49,05\theta = 19,282 \text{ sen } (5t - 0,2355)$
0,2798 rad

21-142 $F_k = 114,25$ N
$F_c = 4,863$ N

21-144 0,2701 m
2,701
229,2 N
2,86

21-146 0,5371 m
$\Omega < 4,329$ rad/s; $\Omega > 4,527$ rad/s

21-148 $\ddot{y} + 228,53y = 0$
16,986 rad/s; 50 mm
$y(t) = -50 \cos 16,986t$ mm

Apéndice A

A-1 $I_z = 3mR^2/10$

A-2 $I_y = 3m(R^2 + 4h^2)/20$

A-5 $I_y = m(3R^2 + 4L^2)/12$

A-6 $I_x = 2mR^2/5$

A-9 $I_{yG} = m(2h^2 + 3L^2)/36$

A-10 $I_x = m(b^2 + c^2)/10$

A-13 $I_x = mR^2(1 + 3R^2)/6$

A-14 $I_{yG} = 19mR^2/160$

A-17 $I_y = 0,335 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

A-18 $I_y = 1,004 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

A-21 $I_x = 24,7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

A-22 $I_x = 22,9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

A-27 $I_y = 0,832 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

A-28 $I_y = 0,464 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

A-31 $I_y = 10,37 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

A-32 $I_y = 1,616 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

A-35 $I_{xy} = mbL/4$

A-36 $I_{xy} = 2mR^2/5\pi$

A-39 $I_{xy} = -0,610 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$I_{zy} = -0,1472 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$I_{zx} = -0,442 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

A-40 $I_{xy} = 4mRh/5\pi$
$I_{zx} = 3mR^2/5\pi$

A-43 $I_{\text{máx}} = 0,871 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$\theta_x = 68,6°$
$\theta_y = 81,5°$
$\theta_z = 23,1°$
$I_{\text{int}} = 0,8341 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$\theta_x = 71,0°$
$\theta_y = 25,2°$
$\theta_z = 105,9°$
$I_{\text{mín}} = 0,8341 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$\theta_x = 29,2°$
$\theta_y = 113,5°$
$\theta_z = 106,4°$

A-44 $I_{\text{máx}} = 0,402 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$\theta_x = 101,3°$
$\theta_y = 76,5°$
$\theta_z = 17,8°$
$I_{\text{int}} = 0,378 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$\theta_x = 52,9°$
$\theta_y = 37,4°$
$\theta_z = 94,1°$
$I_{\text{mín}} = 0,0546 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$\theta_x = 39,3°$
$\theta_y = 124,0°$
$\theta_z = 72,7°$

A-46 $I_{máx} = 1{,}439 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$\theta_x = 84{,}1°$
$\theta_y = 95{,}1°$
$\theta_z = 7{,}8°$
$I_{int} = 1{,}263 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$\theta_x = 40{,}7°$
$\theta_y = 49{,}3°$
$\theta_z = 91{,}1°$
$I_{mín} = 0{,}201 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$\theta_x = 130{,}1°$
$\theta_y = 41{,}2°$
$\theta_z = 82{,}3°$

A-48 $I_{máx} = 2{,}42 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$\theta_x = 130{,}6°$
$\theta_y = 75{,}8°$
$\theta_z = 44{,}1°$
$I_{int} = 1{,}925 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$\theta_x = 100{,}6°$
$\theta_y = 29{,}9°$
$\theta_z = 117{,}6°$
$I_{mín} = 0{,}892 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$\theta_x = 42{,}6°$
$\theta_y = 64{,}3°$
$\theta_z = 58{,}7°$

ÍNDICE ALFABÉTICO

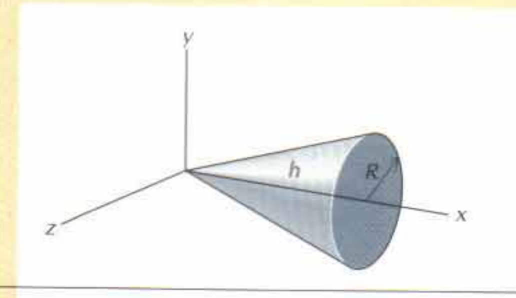
FOTOGRAFÍAS

Capítulo 12	John Elk III/Bruce Coleman
Capítulo 13	Tim Defrisco/Allsport
Capítulo 14	H. P. Merten/Stock Market
Capítulo 15	Comstock
Capítulo 16	Courtesy NASA
Capítulo 17	Courtesy Fleming Companies, Inc.
Capítulo 18	Focus on Sports
Capítulo 19	Henry Groskinsky/Peter Arnold
Capítulo 20	Werner H. Muller/Peter Arnold
Capítulo 21	Robert Mathena/Fundamental Photos

Tabla B.5 MOMENTOS DE INERCIA DE FIGURAS CORRIENTES

Varilla	$I_x = 0$ $I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$
Placa rectangular	$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + h^2)$ $I_y = \frac{1}{12}mb^2$ $I_z = \frac{1}{12}mh^2$
Placa circular	$I_x = \frac{1}{2}mR^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4}mR^2$
Prisma rectangular $V = bhL$	$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + h^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m(b^2 + L^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m(h^2 + L^2)$

Tabla B.5 MOMENTOS DE INERCIA DE FIGURAS CORRIENTES (continuación)



Cono de revolución

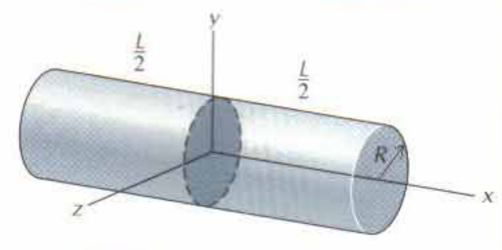
$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

$\bar{x} = \frac{3}{4}h$

$I_x = \frac{3}{10}mR^2$

$I_y = I_z = \frac{3}{20}m(R^2 + 4h^2)$

$I_{yG} = I_{zG} = \frac{3}{80}m(4R^2 + h^2)$

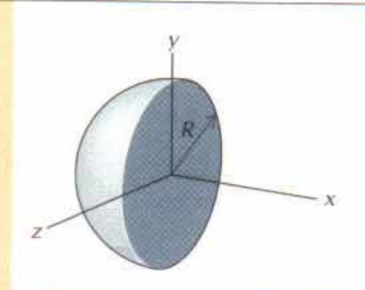


Cilindro de revolución

$V = \pi R^2 L$

$I_x = \frac{1}{2}mR^2$

$I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3R^2 + L^2)$



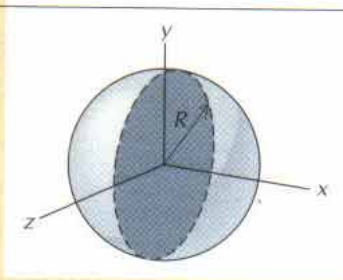
Semiesfera

$V = \frac{2}{3}\pi R^3$

$\bar{x} = \frac{3}{8}R$

$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mR^2$

$I_{yG} = I_{zG} = \frac{83}{320}mR^2$



Esfera

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mR^2$